LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS ACADEMIAE SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
HANS-CHRISTOPH IM HOF · THOMAS STEINER

SERIES SECUNDA · OPERA MECHANICA ET ASTRONOMICA · VOLUMEN VICESIMUM SEPTIMUM

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ASTRONOMICAE AD THEORIAM PERTURBATIONUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM

EDIDIT
ANDREAS VERDUN

AUCTORITATE ET IMPENSIS
ACADEMIAE SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

ONLINE-EDITION
BERNOULLI-EULER-GESELLSCHAFT
BASEL 2022

PUBLIKATIONEN DES BERNOULLI-EULER-ZENTRUMS

BAND 7, 2022

Online-Schriftenreihe
herausgegeben vom Bernoulli-Euler-Zentrum
und von der Bernoulli-Euler-Gesellschaft

Basel

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ASTRONOMICAE AD THEORIAM PERTURBATIONUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM

HERAUSGEGEBEN VON
ANDREAS VERDUN

ONLINE-EDITION
BERNOULLI-EULER-GESELLSCHAFT
BASEL 2022

Herausgeber

Andreas Verdun
Astronomisches Institut
Universität Bern
Bern

PRELIMINARY VERSION!

The final and official version with DOI and ISBN will appear on «Publikationen des Bernoulli-Euler-Zentrums»

Online-Version des Bandes II 27 der Opera Omnia Leonhardi Euleri,
erschienen 2021 bei Birkhäuser Basel
ISBN 978-3-7643-1473-6

© 2022 Bernoulli-Euler-Gesellschaft
Departement Mathematik und Informatik
der Universität Basel
Spiegelgasse 1, 4051 Basel
Schweiz

Die Beiträge stehen unter der Creative Commons Lizenz CC BY-NC-SA 4.0

Leonhard Euler im Jahr 1778
Gemälde von Joseph Friedrich August Darbes
Musée d'Art et d'Histoire, Genève

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Der vorliegende Band 27 der *Series secunda* von EULERs *Opera omnia* enthält Abhandlungen zur Störungstheorie und schliesst die inhaltlich verbundene Trilogie der Bände 25, 26 und 27 mit einer umfassenden Einleitung ab. Darin werden EULERs Arbeiten zur Himmelsmechanik im Allgemeinen und zur Störungstheorie im Besonderen sowohl im wissenschaftlichen Kontext seiner Zeit als auch bezüglich seines umfangreichen Gesamtwerkes zur Himmelsmechanik umrissen und gewürdigt.

In den in diesem Band enthaltenen Abhandlungen behandelt EULER folgende Teilgebiete aus der Himmelsmechanik punktförmiger und ausgedehnter Körper:[1]

Planetenbewegung als störungstheoretisches Problem (E 416, Kommentare)

Störungen der Erdbewegung durch die Venus (E 511, Kommentare und E 512, Kommentare)

Mondtheorie und Theorie der Satellitenbewegung (E 548, Kommentare und E 549, Kommentare)

Prinzipien der allgemeinen Störungstheorie (E 578, Kommentare)

Störungstheorie der Planetenbewegungen (E 626, Kommentare und E 841, Kommentare)

Störungstheorie ausgedehnter Himmelskörper (E 834, Kommentare)

Rotation von Himmelskörpern (E 835, Kommentare)

Die einleitenden Kommentare des Herausgebers zu den einzelnen Abhandlungen sollen einen raschen und prägnanten Überblick über die hier präsentierten Abhandlungen EULERs ermöglichen. Darin werden diese jeweils kurz in ihren historischen Kontext sowohl bezüglich der hierfür relevanten Werke EULERs als auch bezüglich der damaligen wissenschaftlichen Fragestellungen gestellt und deren Inhalt kurz zusammengefasst. Für ausführliche Details betreffend wissenschaftshistorischen Kontext und Entstehungsprozess der einzelnen Abhandlungen sei auf [Verdun 2015] verwiesen. Dort finden sich auch deutsche Paraphrasierungen der hier in den Originalsprachen Latein und Französisch herausgegebenen Abhandlungen.

1 Für eine genaue inhaltliche und chronologische Verortung der behandelten Themen siehe [Verdun 2015].

EULERS SCHRIFTEN ZUR STÖRUNGSTHEORIE

Einleitung

EULERs Schriften zur Störungstheorie erscheinen in den drei Bänden 25, 26 und 27 der Series II der *Opera omnia*. Diese Trilogie enthält Arbeiten zur "Störungstheorie" als Teilgebiet der "Himmelsmechanik" und somit der klassischen Positionsastronomie. Die beiden Fachbegriffe "Störungstheorie" und "Himmelsmechanik" existierten zu EULERs Zeiten noch nicht und kamen erst Ende des 18. Jahrhunderts in Gebrauch, vermutlich auch durch das zwischen 1799 und 1825 in fünf Bänden publizierte monumentale Werk *Traité de Mécanique Céleste* von PIERRE-SIMON MARQUIS DE LAPLACE [Laplace 1799]. EULER führte in den 1750er Jahren im Zusammenhang mit seinen Forschungsarbeiten zur Rotation starrer Körper den Begriff "Mechanische Astronomie" (Astronomia mechanica) ein, nicht zuletzt deshalb, um die Himmelsmechanik punktförmiger Objekte (Massenpunkte) auf die Himmelsmechanik ausgedehnter (starrer) Körper zu erweitern und deren Ausdehnung, Figur und Rotationsverhalten zu berücksichtigen. Damit verband er die Mechanik des Himmels mit der Mechanik starrer Körper und dadurch mit den heute sogenannten "Eulerschen Prinzipien der Mechanik", dem Impuls- und Drehimpulssatz. Obwohl er den Begriff "Störung" (Perturbatio) schon um 1730 in Zusammenhang mit der Entwicklung seiner frühen Mondtheorien verwendete, hat sich der Fachbegriff "Störungstheorie" bei ihm noch nicht durchgesetzt. Andere Bezeichnungen wie "Dreikörperproblem" oder "eingeschränktes Dreikörperproblem" (Problemum restrictum) gehen direkt auf ihn zurück oder wurden durch ihn überhaupt erst geprägt und als Fachtermini etabliert. Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass jene Art von Wechselwirkung zwischen Massen, die heute mit dem Begriff "Gravitation" bezeichnet und mit der Allgemeinen Relativitätstheorie in Verbindung gebracht wird, zur Zeit NEWTONs als "Schwere von Körpern zueinander" aufgefasst wurde. Die Begriffe "Gravitation" und "Anziehung" sind daher nur mit der jeweils dahinterstehenden Theorie zu verstehen. Erst aus der Sicht von EULERs "Gravitationstheorie" wird verständlich, weshalb er in seinen Schriften manchmal davon spricht, dass ein Körper gegen einen anderen "getrieben" oder "gestossen" wird, was auf eine Nahwirkungstheorie hindeutet.

Diese Begriffsklärungen sollen bereits andeuten, dass die Himmelsmechanik und insbesondere die Störungstheorie neben der Mathematik wohl die zentrale Rolle im Forscherleben von EULER spielte.[2] Seine wissenschaftlichen Notizbücher und seine nicht publizierten Manuskripte sowie sein umfangreicher Briefwechsel belegen, dass er sich seit seiner Basler Zeit in den späten 1720er Jahren bis Ende der 1770er Jahre intensiv und ununterbrochen mit Himmelsmechanik im weite-

2 [Verdun 2003a], [Verdun 2003b], [Verdun 2004a], [Verdun 2004b], [Verdun 2005], [Verdun 2006], [Verdun 2010], [Verdun 2011], [Verdun 2013a], [Verdun 2013b], [Verdun 2015], [Verdun 2020], [Verdun 2021].

sten Sinne beschäftigt und diese substantiell vorangetrieben hat. Dieser Befund kommt nicht nur in den Abhandlungen der Bände 25 bis 27 zum Ausdruck, sondern auch in allen ca. 170 publizierten Arbeiten EULERs und seiner Söhne, die verstreut in den Bänden der Series I–III der *Opera omnia* zu finden sind, im umfangreichen wissenschaftlichen Briefwechsel der Series IV A sowie in den ca. 30 nicht publizierten Arbeiten und den zahlreichen Aufzeichnungen in seinen zwölf Notizbüchern, welche direkt oder indirekt mit dem Thema Himmelsmechanik in Zusammenhang stehen.

Um die Abhandlungen der Bände 25 bis 27 in der Gesamtheit von EULERs himmelsmechanischem Werk einordnen und würdigen zu können, ist es nützlich, zuerst einen thematischen und chronologischen Überblick über sämtliche vorhandenen (publizierten und nicht publizierten) Dokumente zur Himmelsmechanik zu geben, bevor diese mit dem wissenschaftshistorischen Hintergrund kontextuell verbunden werden.[3] Dabei sollen die heute verwendeten, modernen Fachgebietsbezeichnungen verwendet werden im Bewusstsein, dass diese zu EULERs Zeiten unter Umständen gar noch nicht existierten. Schliesslich sollen die bedeutendsten Errungenschaften und Leistungen EULERs zur Himmelsmechanik im Allgemeinen und zur Störungstheorie im Besonderen kurz besprochen und zusammengefasst werden.

1. Strukturierte Übersicht über EULERs Werke zur Himmelsmechanik

In unserem Sonnensystem sind die Planeten untereinander und von der Sonne so weit entfernt, dass sie himmelsmechanisch als punktförmige Körper (Massenpunkte) behandelt werden können. Sobald aber die Bewegungen von Monden um ihre Zentralkörper oder das Rotationsverhalten der Himmelskörper beschrieben werden sollen, ist die Grösse und Figur (Abplattung) dieser Körper nicht mehr vernachlässigbar. Es ist das grosse Verdienst EULERs, diese Unterscheidung als "Störungstheorie" in die Himmelsmechanik eingeführt und die (gestörten) Rotationsbewegungen der Zentralkörper selbst als Teil der Störungstheorie und der Himmelsmechanik behandelt zu haben. Er krönte diesen Beitrag mit der Herleitung und Anwendung der heute nach ihm benannten "Eulerschen Bewegungsgleichungen der Starrkörperrotation", mit denen er sowohl die freien und erzwungenen Rotationsbewegungen der Erde als auch die gebundene Rotation (Libration) des Mondes oder die resonanten Bewegungen der Jupitermonde erstmals korrekt beschreiben konnte. Es liegt daher auf der Hand, diese Übersicht aufzuteilen

3 Die "nicht publizierten" Dokumente (Manuskripte, Notizbücher) waren ursprünglich für die Veröffentlichung in der Series IV B der *Opera omnia* vorgesehen.

nach EULERs Beiträgen zur Himmelsmechanik punktförmiger und jenen zur Himmelsmechanik ausgedehnter Körper, wobei jeweils zu unterscheiden ist zwischen rein theoretischen und anwendungsbezogenen Arbeiten. Als "anwendungsbezogen" werden solche Arbeiten betrachtet, die einen Bezug zu astronomischen Beobachtungen und/oder zu theoretisch bestimmten Prädiktionen haben und somit die Wechselwirkung zwischen Theorie und Empirie repräsentieren. Diese grobe Gliederung wird sodann durch die Teilbereiche, wie sie heute benannt werden, jeweils durch Einrücken optisch feiner strukturiert und die EULERschen Arbeiten den entsprechenden Themen zugeordnet, wobei auch mehrfache Zuordnungen vorkommen können. Prägnante Zusammenfassungen der einzelnen Beiträge findet man in [Verdun 2015] und [Verdun 2021]. Da EULER zudem versucht hat, eine Theorie für die physikalische Ursache der Gravitation zu entwickeln und verschiedene Gravitationsgesetze vorschlug, ist es angebracht, auch diese Beiträge in einer eigenen Abteilung zusammenzufassen (siehe dazu auch [Verdun 2000] sowie [Verdun 2015], pp. 74–89). Die in der nachfolgenden Übersicht aufgeführten Werke können auch nur relevante Teile oder gewisse Aspekte jener Fachbereiche enthalten, unter denen sie aufgelistet sind.

Die publizierten Werke werden wie üblich gemäss [Eneström 1910/13] mit der ENESTRÖM-Nummer "E xyz" bzw. "A xyz", die nicht publizierten mit "Ms xyz" gemäss dem Verzeichnis von [Kopelevič et al. 1962] abgekürzt. Die Chronologie der Werke, sortiert nach Abfassungs- bzw. Präsentationsdatum innerhalb des Dokumententyps (Publikation, Manuskript), ist aus dem Literaturverzeichnis ersichtlich. Der wissenschaftliche Briefwechsel EULERs kann in dieser Zusammenstellung wegen seines Umfangs leider nicht berücksichtigt werden, siehe dazu aber [Verdun 2015] und [Verdun 2021]. Anonym publizierte Arbeiten EULERs, die nicht von ENESTRÖM verzeichnet wurden, werden ebenfalls mit "E" gefolgt vom Publikationsjahr abgekürzt.

1.1. Werke zur Himmelsmechanik punktförmiger Körper

Theoretische Arbeiten

Zur Theorie des Zweikörperproblems
[E 15], [E 37], [E 39], [E 66], [E 105], [E 458], [E 519], [E 538], [Ms 167], [Ms 185], [Ms 254], [Ms 397], [Ms 399]

Zur Störungstheorie (Drei- und Mehrkörperproblem)

Allgemeine Störungsrechnung
[E 112], [E 232], [E 400], [E 578], [Ms 259], [Ms 401]

Allgemeines Dreikörperproblem
[A 14], [E 348]

Eingeschränktes Dreikörperproblem
[E 301], [E 304], [E 327], [E 328], [E 337], [E 372], [E 400], [E 626], [E 834], [E 841], [Ms 198], [Ms 251], [Ms 267], [Ms 397]

Spezielle Störungsrechnung (mit numerischer Integration)
[E 398], [E 425], [E 472], [E 538], [E 549], [E 578]

Anwendungsbezogene Arbeiten

Spezielle Anwendungen des Zweikörperproblems (inkl. Bahnbestimmung)
[E 37], [E 38], [E 58], [E 66], [E 131], [E 389], [E 547], [E 834], [E 840], [Ms 285], [Ms 286], [Ms 287], [Ms 288], [Ms 289], [Ms 290], [Ms 291], [Ms 397], [Ms 398], [Ms 399], [Ms 400]

Spezielle Anwendungen des Dreikörperproblems
[A 7], [E 416], [E 372], [E 834], [E 841], [Ms 264]

Sonnentheorie

Sonnentheorie als Zweikörperproblem
[E 37], [E 38], [E 131], [Ms 275], [Ms 397], [Ms 398], [Ms 399], [Ms 400]

Sonnentheorie als Dreikörperproblem
[E 138], [E 139], [E 414], [E 425], [E 472], [E 511], [E 512], [Ms 258], [Ms 266], [Ms 281]

Theorie und Beobachtung
[E 37], [E 38], [E 50], [E 89], [E 131], [E 223], [E 836a], [Ms 252], [Ms 253], [Ms 270], [Ms 293], [Ms 295], [Ms 399], [Ms 400], [Ms 401]

Bestimmung der Sonnenparallaxe
[E 397], [A 29]

Sonnentafeln
[E 87], [E 836], [E 836a], [Ms 261], [Ms 281]

1.2. Werke zur Himmelsmechanik ausgedehnter Körper

Theoretische Arbeiten

Themenrelevante Arbeiten aus der Starrkörpermechanik

Die Eulerschen Prinzipien der Mechanik

Impuls und Impulssatz
[E 15], [E 112], [E 138], [E 174], [E 289], [Ms 167], [Ms 281], [Ms 399], [Ms 400]

Drehimpuls und Drehimpulssatz (für raumfeste Achsen)
[E 69], [E 78], [E 86], [E 96], [E 110], [E 174], [E 174a], [E 415], [E 426], [E 434], [E 469], [E 525], [E 568], [E 569], [E 585], [E 603], [E 612], [E 634], [E 641], [E 649], [E 827], [E 828], [E 829], [E 835], [A 11], [Ms 167], [Ms 397], [Ms 398], [Ms 399], [Ms 400]

Koordinatentransformation beim Impuls- und Drehimpulssatz
[E 478], [E 479], [E 658], [E 825], [Ms 403], [Ms 404], [Ms 407], [Ms 408]

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen der Starrkörperrotation

Drehimpuls und Drehimpulssatz (für bewegliche Achsen)
[E 138], [E 138a], [E 171], [E 177], [E 289], [E 292], [E 308], [E 336], [E 374], [E 471], [E 478], [E 479], [E 481], [E 482], [E 608], [E 825], [A 6], [Ms 202], [Ms 274], [Ms 281], [Ms 401], [Ms 402], [Ms 403], [Ms 404], [Ms 405], [Ms 406], [Ms 407], [Ms 408]

Die Eulerschen kinematischen Gleichungen
[E 289], [E 308], [E 336], [E 373], [E 825], [A 6]

Die Bestimmung der Hauptträgheitsachsen und -momente
[E 289], [E 291], [E 658], [E 659], [A 27]

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen
[E 177], [E 180], [E 289], [E 292], [E 308], [E 336], [E 373], [A 6], [A 27]

Die allgemeine, kräftefreie und erzwungene Lösung
[E 289], [E 292], [E 308], [E 336], [A 6]

Kräfte und Drehmomente bei ausgedehnten Himmelskörpern
[E 97], [E 171], [E 289], [E 834], [E 835], [A 6], [A 18], [Ms 179], [Ms 189], [Ms 202], [Ms 204], [Ms 268], [Ms 400], [Ms 401], [Ms 407], [Ms 408]

Gleichgewichtsfiguren ausgedehnter Himmelskörper
[E 225], [E 375], [Ms 400], [Ms 402]

Gezeitentheorie
[E 57], [E 375], [E 546], [E 1740], [Ms 220], [Ms 375], [Ms 393]

Anwendungsbezogene Arbeiten

Bestimmung von Figur und Rotation der Himmelskörper

Bestimmung von Grösse und Figur (Abplattung) der Erde
[E 32], [E 97], [E 132], [E 215], [E 224], [A 24], [E 619], [E 835], [Ms 297], [Ms 298]

Bestimmung der Rotation der Himmelskörper

Rotation der Erde (Präzession, Nutation, Polschwankung)
[E 171], [E 180], [E 223], [E 289], [E 293], [E 308], [E 336], [E 373], [E 835], [Ms 265]

Rotation anderer Himmelskörper und Libration des Mondes
[E 289], [A 6], [A 26]

Bestimmung der Bewegung von Satelliten um ihre Zentralkörper
[E 193], [E 402], [Ms 255], [Ms 257], [Ms 260]

1.3. Werke zur Gravitationstheorie

Physikalische Ursache der Gravitation
[E 1743], [E 109], [E 183], [E 184], [E 343], [E 842], [Ms 401]

Mögliche (verallgemeinerte) Gravitationsgesetze
[Ms 273], [E 112]

Auswirkungen eines gravitativ und/oder dissipativ wirkenden Mediums (Äther)
[E 89], [E 842], [E 1751], [A 8], [A 8^2], [Ms 261]

Empirische Bestätigungen des $1/r^2$-Gesetzes
[E 97], [E 120], [E 187], [E 308], [E 384], [A 6]

2. EULERs Himmelsmechanik im wissenschafts-historischen Kontext

EULERs Arbeiten zur Himmelsmechanik sind nur aus dem wissenschaftshistorischen Kontext seiner Zeit heraus, insbesondere der Rezeption des Erbes von DESCARTES (Nahkraftwirkung bzw. "Wirbeltheorie") und NEWTON (Fernkraftwirkung), verständlich. Sie können in diesem Sinne interpretiert werden als seine in diesem Zusammenhang erbrachte Antwort auf die damals aktuell anstehenden Probleme, die aus der Diskrepanz zwischen steigender Beobachtungsgenauigkeit in der Astronomie und theoretischen Defiziten der Himmelsmechanik (Gravitationstheorie und Dreikörperproblem) sowie der Mathematik (Integration gekoppelter Differentialgleichungssysteme und Parameterbestimmung) entstanden sind. Es ist daher notwendig, zuerst die durch DESCARTES und NEWTON verursachten Probleme der Himmelsmechanik des 18. Jahrhunderts, dann die daraus folgenden allgemeinen oder fundamentalen Probleme, die sich aus den Unzulänglichkeiten der physikalischen Theoriebildung und der mathematischen Problemlösungsmethoden ergaben, und schliesslich die damit verbundenen besonderen oder theoretischen Probleme, welche sich vorwiegend durch die Interpretation der astronomischen Beobachtungen und Phänomene stellten, etwas näher zu betrachten.

2.1. Das Erbe von DESCARTES und NEWTON

Die erste Hälfte des 18. Jahrhunderts war geprägt durch die Bemühungen, einerseits die zentralen Aussagen NEWTONs in seinen *Philosophiae naturalis principia mathematica*[4] empirisch zu verifizieren und in die Sprache des LEIBNIZschen Kalküls zu transformieren (wobei diese z.T. ebenfalls erst noch ausformuliert werden musste), andererseits die darin aufgeworfenen und meist nur qualitativ gelösten Probleme quantitativ, d.h. mathematisch, mit genau diesen Prinzipien zu beschreiben und zu lösen. Dies vollzog sich in einem komplizierten und komplexen Prozess, der schon alleine angesichts der Tatsache beeindruckt, dass aus den Definitionen, den Bewegungsgesetzen einschliesslich dem Parallelogrammgesetz, dem Zentripetalkraftproblem sowie dem auf punktförmige und ausgedehnte Körper angewandte Gravitationsgesetz, wie NEWTON die Erkenntnisse seines Jahrhunderts in seinem Werk darlegte und zu "axiomatisieren" versuchte, erst etwa zur Mitte des folgenden Jahrhunderts die wichtigsten Phänomene der Himmelsmechanik innerhalb der Messgenauigkeit in Übereinstimmung mit den Beobachtungen gebracht und vorausberechnet werden konnten. Die von NEWTON in seinen *Principia* dargelegten Grundlagen lieferten zugleich eine problematische "Ausgangslage" für die Theoriebildung des folgenden 18. Jahrhunderts, aus der sich die enorm schwierige Aufgabe ergab, diese Situation dadurch zu überwinden, in-

4 [Newton 1687], [Newton 1713], [Newton 1726]; [Cohen et al. 1999]; [Newton 1999].

dem NEWTONs Grundlagen in den LEIBNIZschen Formalismus umgegossen und die daraus folgenden theoretischen Resultate mit den immer genauer werdenden astronomischen Beobachtungen verglichen werden mussten. Es ist eines der grossen Verdienste und ein zentrales Forschungsergebnis TRUESDELLs, erkannt zu haben[5], dass mit NEWTONs Formulierung der Bewegungsgesetze und seiner Fluxionenrechnung die später aufgeworfenen und bearbeiteten Probleme der Mechanik (und Himmelsmechanik) nicht gelöst werden konnten, sondern dass es der Leistungen und Beiträge von Wissenschaftlern vom Format eines BERNOULLI (JOHANN I oder JACOB I), eines JACOB HERMANN oder eines EULER bedurfte. TRUESDELL zeigte in seinen Arbeiten, dass sich in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts allgemeine Lösungsmethoden, aus denen in der Folge teils "universell gültige Prinzipien" erkannt wurden, erst aus der Lösung zahlreicher Einzelprobleme ergaben, die manchmal inhaltlich sogar völlig unabhängig voneinander waren. Als "Paradebeispiel" zu dieser Einsicht erwähnt TRUESDELL in seinen Schriften immer wieder den Impulssatz in der Form

$$F_x = Ma_x \, , \qquad F_y = Ma_y \, , \qquad F_z = Ma_z \, ,$$

und bemerkt dazu, dass es nach Erscheinen von NEWTONs *Principia* mehr als sechzig Jahre benötigte, um zur Einsicht zu gelangen, dass es sich hier um ein "neues Prinzip" der Mechanik handelt.[6] Die Entstehung und Rezeptionsgeschichte des Bewegungsgesetzes wurde seither historisch näher untersucht.[7]

Es gibt allerdings bei der Anwendung der "NEWTONschen Grundlagen" auf die Himmelsmechanik einen gewichtigen Aspekt, den es bei ihrer Rezeptionsgeschichte in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts zu berücksichtigen gilt: Die "Gravitationstheorie" NEWTONscher Prägung hatte eine nicht unbedeutende Konkurrentin, nämlich die "Wirbeltheorie" von RENÉ DESCARTES. Obwohl bereits NEWTON in seinen *Principia* vernichtende Argumente gegen diese vorbrachte,[8] konnte sie sich – zusammen mit anderen Nahwirkungs- oder Korpuskulartheorien – in der Himmelsmechanik bis in die Jahrhundertmitte halten.[9] Der Grund hierfür war der Mangel einer plausiblen physikalischen Erklärung der gravitativen Fernwirkung. Die Bedeutung der Wirbeltheorie für die damalige Astronomie ist daher nicht zu unterschätzen. Als EULER im Herbst 1723 seine Magisterwürde an der philosophischen Fakultät der Universität Basel erlangte, hielt der Neugraduierte aus diesem Anlass 1724 seine erste öffentliche Rede.[10] Darin verglich er die naturphilosophischen Systeme von DESCARTES und NEWTON und wählte damit ein hochaktuelles Thema, das damals im Brennpunkt des

5 [Truesdell 1960].
6 [Truesdell 1968], pp. 92–93; 96; 116–117.
7 [Hankins 1967], [Kutschmann 1983], [Maltese 1992], [Watkins 1997], [Pourciau 2006], [Pourciau 2011], [Sharma 2014].
8 [Newton 1687], Lib. II, Sect. IX, pp. 373–400.
9 [Aiton 1969], [Aiton 1972], [Aiton 1989], [van Lunteren 1991], [Aiton 1995], [Aiton 2002].
10 [Fellmann 1995], p. 21–22; *Opera omnia* IVA 2, p. 15. Der Text dieser Rede ist nicht erhalten.

wissenschaftlichen Interesses lag, denn einige Phänomene liessen sich scheinbar besser mit der Cartesischen Wirbeltheorie, andere mit der Newtonschen Gravitationstheorie leichter erklären und hielten sich zu dieser Zeit somit die Waage. Es gab sogar Bestrebungen, diese beiden Theorien miteinander in Einklang zu bringen.[11] In den ersten Jahren nach der Erstveröffentlichung der *Principia* im Jahre 1687 waren es vor allem Pierre Varignon, Jacob I Bernoulli, Johann I Bernoulli und Jacob Hermann, welche deren Inhalte in die mathematische Notation Leibnizscher Provenienz umzuformulieren begannen.[12] Den wichtigsten Schritt in dieser Richtung vollzog aber erst Euler mit seiner 1736 publizierten, sogenannten "ersten" Mechanik, erschienen in zwei Bänden [E 15] und [E 16], die ursprünglich ein Werk über Himmelsmechanik werden sollte.

Obwohl Euler eine Fernwirkung der Gravitation aus physikalischen Gründen ablehnte und in dieser Hinsicht den Cartesischen Ideen der Existenz eines wie auch immer gearteten Mediums näher stand, verwendete er in all seinen Schriften stets ein $1/r^2$-Gesetz und behandelte andere Formen des Gravitationsgesetzes bloss als akademische Möglichkeiten. Dem Mangel einer physikalischen Erklärung des $1/r^2$-Gesetzes entgegnete er mit der Entwicklung einer eigenen Gravitationstheorie, die im wesentlichen auf der Druckverteilung eines kosmischen Mediums oder Äthers beruht: In der Nähe eines Himmelskörpers nimmt der Ätherdruck aufgrund der Rotation des Himmelskörpers und somit der grösseren Relativgeschwindigkeit zwischen diesem und dem Äther proportional zum Abstand vom Himmelskörper ab. Diese $1/r$-Druckabnahme impliziert eine Kraft, die einen anderen Körper mit $1/r^2$ gegen den betrachteten Zentralkörper drückt oder stösst. Diese Theorie erschien ihm plausibel genug, um Zeit seines Lebens daran festzuhalten, obwohl seine eigenen Untersuchungen über eine mögliche Wirkung des durch ein solches Medium verursachten Reibungswiderstandes auf die Umlaufbewegung und somit die Halbachse eines Planeten zeigten, dass keine nennenswerte Abnahme der grossen Halbachsen über grössere Zeiträume zu beobachten sind. Es waren letztlich andere Gründe, die Euler – zumindest vorübergehend – an der Gültigkeit des $1/r^2$-Gesetzes zweifeln liessen, so z.B. die Apsidendrehung der Mondbahn oder die Grosse Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn. Solange diese Probleme ungeklärt blieben und keine allgemein akzeptierte physikalische Theorie der Gravitation bestand, gehörte die Gravitationstheorie (also das $1/r^2$-Gesetz, dessen physikalische Ursache sowie dessen universale Gültigkeit) zu den fundamentalen Problemen seiner Zeit.

Hinzu kam ein weiteres fundamentales Problem, an dem bereits Newton gescheitert war und das ihn in seiner Mondtheorie sogar dazu zwang, der Epizykeltheorie von Jeremiah Horrocks noch einen eigenen Epizykel aufzusetzen, um den Beobachtungen der Variationen in der Mondbewegung gerecht zu werden. Euler erkannte vermutlich schon während der Bearbeitung seiner "ersten"

11 [Aiton 1972], Chap. IX, pp. 209–243.

12 [Fleckenstein 1948], [Whiteside 1970], [Aiton 1989], [Blay 2004].

Mechanik, dass eine adäquate Mondtheorie als sogenanntes Dreikörperproblem – gebildet durch die drei Himmelskörper Erde, Sonne und Mond – behandelt werden muss. Zahlreiche vergebliche Versuche führten ihn zur Einsicht, dass dieses Problem äusserst schwierig und vermutlich wegen Unzulänglichkeiten der Analysis noch nicht zu lösen sei.

Schliesslich war EULER in mindestens zwei wichtigen astronomischen Phänomenen (der Grossen Ungleichheit und der Bestimmung der Sonnenparallaxe) mit dem Problem konfrontiert, wie redundante Beobachtungen (statistisch) korrekt auszuwerten sind und wie gewisse Parameter, die ein Phänomen theoretisch beschreiben, aus solchen Beobachtungen bestimmt werden können. Dieses sogenannte Parameterbestimmungsproblem war zu seiner Zeit völlig neu, und die Methode der kleinsten Quadrate wurde erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts entwickelt. In der Wechselwirkung zwischen Theorie und Beobachtung ist es – gerade in der Astronomie und insbesondere der Himmelsmechanik – entscheidend, eine Methode zur Verfügung zu haben, die es erlaubt, redundante Beobachtungen korrekt auszuwerten. Eine solche Methode fehlte aber und stellte somit ein drittes fundamentales Problem dar.

Für das Verständnis der EULERschen Werke zur Himmelsmechanik ist es von grosser Bedeutung, diese allgemeinen oder fundamentalen Probleme genauer zu verstehen und bei der Interpretation seiner Schriften zu berücksichtigen.

2.2. Allgemeine (fundamentale) Probleme

Die Entwicklung der theoretischen Astronomie im 18. Jahrhundert wurde durch die drei genannten Problembereiche bestimmt und charakterisiert. Sie waren allen anderen Problemen übergeordnet und somit allgemein – das ganze Jahrhundert hindurch, teils ungelöst bleibend, in latenter Präsenz als fundamentale Probleme hintergründig vorhanden.

Gravitationstheorie

Eine Gravitationstheorie beinhaltete nicht nur die Frage nach der physikalischen Ursache der Gravitation (Nah- oder Fernwirkung), sondern verlangte wegen ihrer postulierten "universellen" Gültigkeit, wonach sich alle Partikel gegenseitig anziehen, nach einer konsequenten Anwendung des vorgeschlagenen Gravitationsgesetzes. Der in diesem Zusammenhang erfolgte Wechselwirkungsprozess zwischen Theorie und Beobachtung stellte zeitweilig zwar sogar die Richtigkeit des $1/r^2$-Gesetzes in Frage. Aus dessen konsequenten Anwendung entstanden aber in der Folge fundamentale Prinzipien und Theorien von weitreichender Bedeutung nicht nur für die Himmelsmechanik, sondern für die gesamte Physik. In diesem Kontext entstanden z.B. der Impuls- und Drehimpulssatz, die nach der Zeit parametrisierten Bewegungsgleichungen von Punktmassen oder Starrkörpern, insbesondere die Bewegungsgleichungen der Starrkörperrotation, und die Potenialtheorie, um nur einige Beispiele zu nennen. An diesem Punkt und in diesem Zusammenhang wurde die Himmelsmechanik zu einer physikalischen Wissenschaft (im Sinne der rationalen Mechanik).

Die gewöhnlich mit NEWTON in Verbindung gebrachten Errungenschaften auf dem Gebiet der Himmelsmechanik des auslaufenden 17. Jahrhunderts sind allgemein zwar unbestritten, gründen jedoch nicht allein auf seinen eigenen Leistungen. Unter dem Begriff "Gesetz der universellen Gravitation" sind nämlich drei verschiedene Entitäten zu unterscheiden: das Gravitationsgesetz, die physikalische Ursache der Gravitation sowie die universale Gültigkeit des Gravitationsgesetzes bzw. universale Wirksamkeit der Gravitation. Jeder dieser Aspekte bildete sich aus ersten Hypothesen heraus, etablierte sich in einem sukzessiven Entwicklungsprozess und hat daher seine eigene Problemgeschichte und seine eigenen "Entdecker", die zu dieser Geschichte beigetragen haben.[13]

Die Grundlage der Himmelsmechanik besteht somit aus einer Theorie, mit der beschrieben wird, wie die Himmelskörper (oder die Partikel eines Körpers) gegenseitig aufeinander einwirken. Diese Theorie umfasst nicht nur die Frage nach der mathematischen Gesetzmässigkeit der Wirkung, sondern auch jene nach der physikalischen Ursache der Schwere oder Anziehung. Beide Fragen betreffend eine adäquate Gravitationstheorie wurden am Ende des 17. und in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts heftig diskutiert, was allein schon aus der Anzahl der damals publizierten Dissertationen zu diesem Thema hervorgeht. Während die erste Frage mit dem Gravitationsgesetz, wonach die Himmelsköper proportional zu ihren Massen im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat ihres Abstandes gegenseitig aufeinander einwirken, um die Jahrhundertmitte entschieden werden konnte, blieb die zweite Frage nach der physikalischen Ursache unbeantwortet. Die Geschichte der verschiedenen, seit dem 17. Jahrhundert entwickelten Gravitationstheorien wurde eingehend untersucht.[14] Die empirischen Befunde, die zur Entstehung, zur Infragestellung und zum Erfolg der Gravitationstheorie führten, haben diese Entwicklung fast über ein Jahrhundert von der Mitte des 17. bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts angetrieben und einen wesentlichen Einfluss auf die Arbeiten EULERs ausgeübt. Diese Befunde betreffen die Figur und Rotation der Erde (Präzession der Erdachse), die Meeresgezeiten, die Mondbewegung (Apsidendrehung der Mondbahn) sowie die Grosse Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn. Bereits NEWTON versuchte, quantitative Werte dieser Phänomene aus dem Gravitationsgesetz theoretisch herzuleiten, was vermutlich zu einer eindeutigen und raschen Durchsetzung der Gravitationstheorie geführt hätte, wenn ihm dies in aller Schärfe gelungen wäre. Erhebliche Diskre-

13 OFER GAL bemerkt zu Recht, dass man die "Entdeckung" des Gravitationsgesetzes keiner Person zuschreiben könne, "... because ISL [i.e., inverse square law] was never 'discovered'. It had been suggested, speculated and hypothesized by different people, for different reasons, in different contexts, to fulfill different goals.", cf. [Gal 2002], p. 169.

14 [van Lunteren 1991], [Nick 2001].

panzen zwischen seinen theoretischen Resultaten und entsprechenden Beobachtungen verschiedenster Qualität liessen dies vorerst jedoch nicht zu.

Nach der ersten im Jahr 1669 durchgeführten französischen Gradmessung durch Jean-Felix Picard fand Jean Richer 1672 anlässlich seiner Expedition nach Cayenne, dass ein Sekundenpendel dort gegenüber Paris um $1\frac{1}{4}$ Linien verkürzt werden muss. Dieser folgenschwere Befund wurde sukzessive und unabhängig einerseits von Newton, andererseits von Huygens aus der Überlagerung von Zentripetalkraft (erzeugt durch die von der Massenverteilung der Erde abhängigen lokalen Gravitationskraft, Newtons Beitrag) und Zentrifugalkraft (erzeugt durch die Erdrotation, Huygens' Beitrag) am Ort der Messung theoretisch erklärt, was gemäss Newton zwingend eine Abplattung der Erde an ihren Polen implizierte. Er bestimmte das Verhältnis der Zentrifugal- zur Zentripetalkraft eines Teilchens zu $\frac{1}{290}$ und daraus das Verhältnis zwischen dem Äquator- und dem Poldurchmesser zu $\frac{692}{689}$, wobei er diese Werte später korrigierte. Eine sphäroidische Figur der Erde widersprach aber den vermeintlichen Befunden aus Meridianbogenmessungen, nach denen die Längen der Gradbögen mit wachsender geographischer Breite abzunehmen scheinen. Diese Befunde wurden durch Jean Jacques d'Ortous de Mairan scheinbar sogar theoretisch bestätigt. Mitte der 1730er Jahre standen somit durch das Problem der Figur der Erde zwei Systeme, jenes von Newton (oblate Figur) und jenes von Descartes (oblonge Figur), einander gegenüber, das auch durch die theoretischen Untersuchungen von Bouguer und Maupertuis vorerst nicht gelöst werden konnte. Erst die beiden Expeditionen nach Lappland, angeführt von Maupertuis, und Peru, angeführt von Charles-Marie de La Condamine, brachten durch ihre Resultate 1738 und 1744/45 den empirischen, die Arbeiten [E 97] von Euler (1738) und [Clairaut 1743] von Clairaut (1743) dann auch den theoretischen Nachweis für die gemäss Newton abgeplattete Erdfigur und somit für die Gültigkeit des $1/r^2$-Gesetzes, zumindest für dieses Phänomen.

Die scheinbar eindeutige, das $1/r^2$-Gesetz bestätigende, Evidenzlage geriet aber bald darauf durch die Apsidendrehung der Mondbahn wieder ins Wanken. Bereits Newton stellte fest, dass die aus diesem Gesetz hergeleitete Apsidendrehung der Mondbahn nicht mit dem entsprechenden beobachteten Wert übereinstimmt: "Die [beobachtete] Apside des Erdmondes ist ungefähr doppelt so schnell [wie die berechnete]."[15] Eine solche Drehung lässt sich aber mit einem um einen Zusatzterm erweiterten Gravitationsgesetz der Form $\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}$ herleiten, wobei r die Entfernung des Mondes vom Erdzentrum und α sowie β Konstanten bedeuten. Mit einem ähnlichen Ansatz hat auch Euler zwischen 1727 und 1730 in seinem unpulizierten Manuskript [Ms 273], Prop. II, fol. 3r–3v, versucht, die Apsidendrehung im Rahmen des Zweikörperproblems zu beschreiben. Er disku-

15 [Newton 1999], p. 167. "Apsis lunae est duplo velocior circiter."[Newton 1726], Lib. I, Sectio IX, p. 141.

tierte die verschiedenen möglichen vor- ("in consequentia") und rückwärts- ("in antecedentia") gerichteten Bewegungen der Apsidenlinie mit Hilfe der gefundenen Gleichungen auf qualitative und quantitative Weise und bestimmte auf fol. 8r die Orte der maximalen und minimalen Änderungen. Diese Ideen entwickelte er in Kapitel V seiner "ersten" Mechanik [E 15] weiter. Ab etwa 1743/44 war er in der Lage, die allgemein gültigen Bewegungsgleichungen aufzustellen und damit die Mondbewegung als Dreikörperproblem analytisch zu behandeln. Vermutlich gleichzeitig mit CLAIRAUT stellte er fest, dass sich die beobachtete Bewegung der Apsidenlinie der Mondbahn scheinbar nicht aus dem $1/r^2$-Gesetz herleiten lasse.[16] CLAIRAUT hat EULER erstmals in einem Brief vom 3. September 1747 auf dieses Problem angesprochen und seine Vermutung, dass die beobachtete Apsidenbewegung vermeintlich nicht mit diesem Gesetz vereinbar sei, in einem versiegelten Couvert bei der Pariser Akademie deponiert.[17] Im folgenden Brief [R 419] an EULER vom 11. September 1747 schlug CLAIRAUT vor, das Gravitationsgesetz durch einen zusätzlichen Term (im Sinne NEWTONS) zu erweitern,[18] wodurch er sich erhoffte, dass auch das Problem der Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn gelöst werden könnte. Im Antwortschreiben [R 420] an CLAIRAUT vom 30. September 1747 bestätigte EULER dessen Feststellung und die Vermutung, dass das Gravitationsgesetz zu modifizieren sei, obwohl EULER inzwischen zumindest die Knotendrehung der Mondbahn (innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit) in [E 138] aus dem Gravitationsgesetz herleiten konnte.

Der durch die Diskrepanz zwischen beobachteter und berechneter Apsidenbewegung der Mondbahn aufgekommene Zweifel an der Richtigkeit des $1/r^2$-Gesetzes schien sich durch die Preisfrage der Pariser Akademie von 1748 zum Problem der Grossen Ungleichheit nämlich noch zu verstärken. Die Entdeckung einer langperiodischen Anomalie in den Bewegungen von Jupiter und Saturn, die später unter dem Begriff "Grosse Ungleichheit" bekannt wurde, geht vermutlich auf KEPLER zurück. Er erkannte, dass sich die Konstellationen von Jupiter und Saturn bezüglich des Tierkreises nach ungefähr 800 Jahren wiederholen. Das Problem bestand nun darin, die Positionen bzw. ekliptikalen Längen von Jupiter und Saturn theoretisch so zu bestimmen, dass sie mit den Beobachtungen übereinstimmten, ohne dass man das aus kurz- und langperiodischen Störungen zusammengesetzte "Störungsmuster" a priori kannte. Insbesondere waren die Amplitude und die Phase dieser langperiodischen Störung unbekannt und man erwartete, dass die Bewegungen (Positionen zu jedem beliebigen Zeitpunkt) von Jupiter und Saturn, die sich aufgrund ihrer Anziehung gegenseitig stören, aus dem Gravitationsgesetz hergeleitet werden können, was vorerst jedoch nicht gelang.

16 [E 112], insbesondere §6 und §11, sowie [R 420] und [R 1525].

17 [R 418], insbesondere Anm. 2 und 3, p. 172. Diese Abhandlung hat CLAIRAUT am 15. November 1747 vor der Pariser Akademie gelesen, cf. [Clairaut 1749].

18 [Clairaut 1749], p. 358 und p. 362.

Die wissenschaftliche Gemeinschaft spaltete sich somit noch Ende der 1740er Jahre in zwei Lager: Das eine befürwortete eine "Nahwirkung", bei welcher der Gravitationseffekt durch direkten Kontakt zwischen zwei Körpern und einem zwischen diesen befindlichem Medium zustande kommt; das andere vertrat die hypothetische Ansicht, dass zwei Körper gravitativ aufeinander einwirken können, ohne dass ein "vermittelndes" Medium die Gravitationswirkung "transportiert" und die Gravitation somit (instantan) über den leeren Raum sich als "Fernwirkung" ausbreiten kann. Jene Gruppe, die für eine Nahwirkung eintrat, teilte sich ihrerseits in zwei Parteien. Die eine schrieb diese Nahwirkung bestimmten Wirbelbewegungen irgendwelcher Medien zu, in denen die Himmelskörper schwimmen und durch diese fortgetragen werden. Die andere versuchte, die Gravitationswirkung durch ein subtiles Medium (Äther) zu erklären, das unter hohem Druck steht (sei dies nun eine Art hydrodynamischer Druck oder einer, der durch Stösse von schnell bewegten Partikeln entsteht) und durch lokale, von den Himmelskörpern erzeugte Druckverminderungen die Gravitationswirkung hervorzubringen im Stande war.

Euler versuchte, auf beide Fragen – zur Ursache der Gravitation und zur Form des Gravitationsgesetzes – eine Antwort zu finden. So diskutierte er in §45 seiner fundamentalen Abhandlung [E 112], die er am 8. Juni 1747 präsentierte, drei verschiedene Kraftgesetze:

$$\frac{aV}{\Pi} = \frac{mc^3}{rr}\,, \qquad \frac{aV}{\Pi} = \frac{mc^3}{rr} + \frac{\mu c^{\nu+1}}{r^\nu}\,, \qquad \frac{aV}{\Pi} = \frac{\mu c^{3+\mu}}{r^{2+\mu}}\,,$$

wobei r der Abstand des betrachteten Körpers vom Zentralkörper, Π die Kraft, mit der die Erde im Abstand a zur Sonne angezogen wird, $V = \frac{aa}{rr}\Pi$ somit die "normierte" Zentralkraft, und m, c, μ sowie ν Konstanten bezeichnen, im dritten Fall jedoch $\mu \ll 1$ gilt. Er schloss in Kapitel I seiner Preisschrift [E 120] sogar eine Modifikation des Gravitationsgesetzes auch für die Behandlung des Problems der Grossen Ungleichheit nicht aus. Die Ursache der Gravitation glaubte Euler, vermutlich beeinflusst durch die Abhandlung [Bernoulli 1683] von Jacob I Bernoulli, mit einem raumfüllenden Äther erklären zu können, der hydrodynamische Eigenschaften besitzt und dessen Druck umgekehrt proportional zur Entfernung von einem Himmelskörper zunimmt.[19] Diese Vorstellung legte er 1743 in einer anonym publizierten Abhandlung[20] sowie in §23 und §24 seiner Preisschrift [E 109] für 1744 dar. Inwiefern Euler durch die im selben Jahr erschienene Schrift [Müller 1743] von Gerhard Andreas Müller beeinflusst wurde, welche im Wesentlichen dieselbe Erklärung für die Ursache der Gravitation enthält, ist unklar. Jedenfalls scheint sicher, dass Euler spätestens seit 1743 nach einer mechanischen Erklärung für die Ursache der Gravitation suchte,

19 [Isenkrahe 1881], [Wilson 1992], [Verdun 2000].
20 [E 1743], Kommentar in *Opera omnia* II 31, pp. LXXXVII–XCIII.

wie auch die Positionen 53–56 der “Theses Philosophicae” in seinem Notizbuch [Ms 401], fol. 11v, belegen.

EULER postulierte ein Ungleichgewicht des Äthers in der Nähe eines Himmelskörpers, das dadurch zustande kommt, dass sich die Relativgeschwindigkeit des Äthers durch die “Reibung” und Rotation des Himmelskörpers gegenüber dem unbewegten Äther erhöht und der Ätherdruck somit umkehrt proportional zur Entfernung vom Zentrum O des Körpers gegenüber dem universal vorhandenen Ätherdruck E abnimmt.[21] Auf die Oberseite eines kubischen Körpers Pp in der Nähe von O wirkt somit der Druck $E - A/OP$, während auf der Unterseite der Druck $E - A/Op$ herrscht, wobei A die druckwirksame Fläche des Körpers und OP bzw. Op die Entfernungen der oberen bzw. unteren Fläche bezüglich C bezeichnen. Die durch den Druckunterschied zwischen diesen beiden Seiten resultierende “Anziehungskraft” bzw. “Stosskraft” zu C hin beträgt somit $A \cdot Pp/Op \cdot OP$ und nimmt daher mit dem Quadrat des zunehmenden Abstandes von C ab. EULER verallgemeinerte diese Gravitationstheorie im Kapitel 19 seiner unveröffentlicht gebliebenen *Anleitung zur Naturlehre* [E 842]. Sei h der allgemeine Ätherdruck, der mit $1/x$ gegen das Zentrum A eines Himmelskörpers abnimmt, aa die druckwirksame Fläche des betrachteten Körpers der Länge b und des Gewichtes P, das gegeben ist durch dessen Entfernung x vom Zentrum C des anziehenden Zentralkörpers A, zu dem der Körper mit der Kraft $rr/xx \cdot P$ gestossen wird, wobei r den Radius von A bezeichnet. Die auf die Oberseite des Körpers wirkende Druckkraft beträgt $aa \cdot (h - A/(x + b))$, während jene auf die Unterseite wirkende Kraft $aa \cdot (h - A/x)$ beträgt und somit kleiner ist. Die resultierende, nach C hin stossende Kraft ist daher gegeben durch $aab \cdot A/(x(x + b))$. Da b im Vergleich zu x vernachlässigbar klein ist, nimmt diese Kraft mit $1/x^2$ gegen C hin zu, wobei EULER voraussetzt, dass das Volumen aab des Körpers seine wahre Grösse bezeichnet, die seinem druckwirksamen Volumen (ohne Poren oder Hohlräume) und somit seiner Masse entspricht. Diese wahre Grösse des Körpers besteht nach seiner Ansicht aus einem Kontinuum von Partikeln, die vom Äther nicht durchdrungen werden können. Er identifiziert A mit der Masse des Zentralkörpers und $c^3 = aab$ mit der Masse des betrachteten Testkörpers, wodurch mit Ac^3/x^2 in der Tat die korrekte Gravitationskraft resultiert. EULER geht aber noch einen Schritt weiter: Wirken mehrere anziehende Körper A, B, C, D etc. auf einen Testkörper im Abstand z von A, y von B, x von C, v von D etc., beträgt der resultierende, auf den Testkörper wirkende Ätherdruck $h - A/z - B/y - C/x - D/v \dots$, womit die entsprechende Anziehungskraft gegeben ist. Bezeichnen nun ☉, ☿, ♀, ♁, ♂, ♃, ♄, ☾ die Massen dieser Himmelskörper und bezeichnen D☉, D☿, D♀, D♁, D♂, D♃, D♄ und D☾ die Distanzen dieser Himmelskörper zum Testkörper, dann ist

21 [Verdun 2000]. Heute würden wir EULERs Druckverteilung als “Potential” bezeichnen. EULER betrachtet in der Folge die differentielle Wirkung auf einen Testkörper und somit die Ableitung bzw. den Gradienten dieses Potentials, woraus die (Anziehungs-)Kraft gemäss einem $1/r^2$-Gesetz resultiert.

der auf diesen wirkende Ätherdruck gegeben durch

$$h - \frac{m\odot}{D\odot} - \frac{m☿}{D☿} - \frac{m♀}{D♀} - \frac{m♁}{D♁} - \text{etc.}\,,$$

wobei m eine Konstante bedeutet.

Euler lässt in seiner Theorie zur Ursache der Gravitation jedoch zwei nicht unwesentliche Punkte vorerst unerklärt. Der eine betrifft den Grund für den scheinbar universal vorhandenen Ätherdruck: Wodurch wird dieser erzeugt und aufrechterhalten? Der andere betrifft den Grund für das Abnehmen des Ätherdruckes in der Nähe eines Himmelskörpers im umgekehrten Verhältnis zur Entfernung von dessen Zentrum. Zudem impliziert seine Erklärung für die Ursache der Gravitation mittels eines Äthermediums, dass die Planetenbewegungen durch den Ätherwiderstand gestört werden und sich dadurch ihre mittleren Abstände von der Sonne verkleinern und somit ihre Umlaufzeiten gemäss dem dritten Keplerschen Gesetz ebenfalls verringern – ein Problem, mit dem sich auch Newton konfrontiert sah und das er als vernachlässigbar darzustellen versuchte.[22] Deshalb brachte auch Euler die damals vermuteten säkularen Änderungen der Revolutions- und Rotationsperioden sowie der Bahnneigungen der Planeten mit der Existenz eines solchen widerstehenden Äthers in Verbindung. In seiner 1746 publizierten Abhandlung *De relaxatione motus planetarum* [E 89] untersuchte er diesen Effekt und kam (unter gewissen Annahmen) zum Ergebnis, dass die heliozentrische Länge der Erde durch diesen vermeintlichen Widerstand in 2720 Jahrhunderten um $1''$ abnimmt und daher nicht beobachtbar ist. Dieses Resultat bestätigte später sein Sohn Johann Albrecht in zwei weiteren Abhandlungen [A 8] und [A 8^2], wobei letztere sogar den Preis der Pariser Akademie für 1762 gewann. Dennoch schien dies dem empirischen Befund zu widersprechen. Euler verglich Beobachtungen der Sonnenpositionen von Ptolemäus und Walther, bestimmte daraus die Jahreslänge und fand zunächst, dass diese in der Tat aufgrund des Ätherwiderstandes abzunehmen scheint, womit die Existenz eines Äthermediums bestätigt würde. Diese Meinung vertrat Euler vor allem in seinen Briefen an Caspar Wettstein[23] und Erik Pontoppidan[24], die zum Teil in der Royal Society gelesen und in einigen populären Zeitschriften und Büchern veröffentlicht wurden.[25] Euler musste jedoch feststellen, dass er sich vermutlich wegen eines kalendarischen Problems geirrt hatte und zog deshalb in einem Brief vom 20. Dezember 1749 an Wettstein die von Halley 1692 entdeckte scheinbare säkulare Beschleunigung des Mondes[26] als Argument in Erwägung, wobei er

22 [Newton 1687], Lib. III, Prop. X, Theor. X.
23 [R 2753], [R 2763], [R 2764], [R 2765], [R 2778], [R 2780], [R 2784], [R 2787] und [R 2801].
24 [R 2020] und [R 2021].
25 [E 183], [E 184] und [E 218]; *The London Magazine, Or Gentleman's Monthly Intelligencer*, For March, 1751, p. 121; *Physikalische Belustigungen*, Viertes Stück, 1751, pp. 313–315; [Pontoppidan 1758], Kap. 8, pp. 143–183.
26 [Halley 1695]; [Kushner 1989]; [Britton 1992], pp. 153–178.

nicht ausschloss, dass dieses Phänomen auch einer variablen Erdrotation zugeschrieben werden könnte.[27] Seine Aussagen zu einer möglichen Variation der Erdrotation sind umso erstaunlicher, da er damit ähnliche, aber jeweils unterschiedlich begründete Äusserungen von Joseph Jérôme Lefrançais de Lalande in [Lalande 1762] und von Charles Walmesley in [Walmesley 1759] antizipierte. Auch im Brief an Pontoppidan vom 11. Mai 1754 bezieht sich Euler auf eine mögliche säkulare Beschleunigung des Mondes aufgrund des Ätherwiderstandes.[28] In seinen beiden Preisschriften [E 485] und [E 486] zur Mondtheorie aus den Jahren 1770 und 1772 weist er darauf hin, dass er alle Ungleichheiten in der Mondbewegung aus dem Gravitationsgesetz habe herleiten können bis auf säkulare Terme, die nicht durch die Gravitation erklärt werden könnten, wobei er vermutlich in erster Linie an einen Ätherwiderstand als deren Ursache dachte.

Obwohl die Diskussion um die Gravitationstheorie ebenso wie die mit dem Ätherwiderstand in Verbindung gebrachten vermeindlichen Änderungen gewisser Bahnparameter sowohl in Eulers Publikationen als auch in seinem Briefwechsel (insbesondere mit Wettstein) immer wieder anzutreffen ist, scheint sie für die theoretische und angewandte Himmelsmechanik Eulers nicht besonders relevant gewesen zu sein. Er verwendete in all seinen Abhandlungen ausnahmslos das $1/r^2$-Gesetz ohne Berücksichtigung eines Ätherwiderstandes.

Im Jahr 1749 ist es Clairaut gelungen, den beobachteten Wert der Apsidendrehung der Mondbahn theoretisch aus dem Gravitationsgesetz herzuleiten und damit einen indirekten Beweis für dessen Gültigkeit zu liefern.[29] Ein direkter Beweis, zumindest für dessen Gültigkeit bei der Mondbewegung, gelang Euler in Kapitel VIII seiner "ersten" Mondtheorie [E 187], die 1753 erschien. Obwohl es im gleichen Jahr 1749 sowohl d'Alembert als auch Euler zusätzlich gelang, die Präzession und Nutation der Erdachse aus dem Gravitationsgesetz herzuleiten[30] und damit dessen Richtigkeit und Allgemeingültigkeit vollends erwiesen zu sein schien, blieb ein Zweifel, ob dieses Gesetz nicht nur für Erde und Mond, sondern auch für weitentfernte Planeten in derselben Form gültig ist, denn das Problem der Grossen Ungleichheit blieb auch nach den von Euler der Pariser Akademie für 1748, 1750 und 1752 eingereichten Preisschriften ungelöst. Erst Laplace gelang 1785 eine befriedigende Lösung.[31] Mit der erfolgreichen Prädiktion der für 1759 erwarteten Periheldurchgangszeit des Kometen Halley durch Clairaut und anderen auf Grundlage des Gravitationsgesetzes und einer umfangreichen numerischen Integration[32] schien sich das $1/r^2$-Gesetz endgültig etabliert zu haben, ohne dass sich auch eine Theorie zur physikalischen Ursache der Gravitation

27 [R 2765] sowie [E 184].
28 [R 2021] sowie [E 218].
29 [Waff 1976a], Chapter V; [Waff 1976b]; [Waff 1995a], p. 44–45.
30 [d'Alembert 1749]; [E 171]; [Wilson 1987a], [Wilson 1995b].
31 [Laplace 1787]; [Wilson 1985], pp. 227–286.
32 [Clairaut 1759b], [Clairaut 1760], [Clairaut 1762], [Clairaut 1765]; [Waff 1986], [Waff 1995b].

durchzusetzen vermochte. EULER hielt an seiner Äthertheorie der Gravitation fest,[33] wodurch auch die Frage nach dem Ätherwiderstand offen blieb.

Es ist bemerkenswert und erstaunlich zugleich, dass sich der Etablierungsprozess des Gravitationsgesetzes, zumindest bei EULER, kaum – wenn überhaupt – auf seine Arbeiten zur Himmelsmechanik niedergeschlagen hat. Die konsequente Anwendung der universellen Gültigkeit des Gravitationsgesetzes, wonach alle Partikel – punktförmige und ausgedehnte Himmelskörper – sich gegenseitig mit diesem Gesetz anziehen, blieb davon scheinbar unbetroffen. Während dieser Phase – zwischen 1742 und 1749 – legte EULER die auf dem Gravitationsgesetz beruhenden Grundlagen zur allgemeinen Störungstheorie, zu seiner "ersten" Mondtheorie, zur Rotation der Himmelskörper und zur Bahnbestimmung von Kometen und Planeten.

Dreikörperproblem

Das Dreikörperproblem, als Folge der Gravitationstheorie und zentrales Thema der Störungstheorie, spielt in den meisten Anwendungen eine primäre Rolle, so z.B. in der Mondtheorie (Bewegung des Mondes im Gravitationsfeld von Erde und Sonne), in der Sonnentheorie (Bewegung der Erde im Gravitationsfeld der Sonne und des Mondes oder eines Planeten wie z.B. der Venus), in der Theorie der Grossen Ungleichheit (Bewegung des Saturn im Gravitationsbereich der Sonne und des Jupiter). Die Lösungsansätze führen zwangsläufig auf elliptische Integrale, die nur näherungsweise integriert werden können. Die in diesem Zusammenhang entstandenen störungstheoretischen Lösungsmethoden führten z.B. auf die Analysis periodischer (trigonometrischer) Funktionen und die Ausarbeitung der Reihentheorie sowie – bei der Integration der Störungsgleichungen – auf die heute sogenannten "Fourier-Integrale". An diesem Punkt und in diesem Zusammenhang wurde die Himmelsmechanik zu einer mathematischen Wissenschaft (im Sinne der Analysis, insbesondere der Reihentheorie).

Im elften Kapitel (Über die Bewegung von Körpern, die infolge von Zentripetalkräften gegenseitig zueinander streben) des ersten Buches der *Principia* formuliert NEWTON das Dreikörperproblem, allerdings nicht in seiner allgemeinsten Form, sondern nur für den Fall, dass sich zwei Körper um einen massiveren Zentralkörper bewegen.[34] In den daran anschliessenden 22 Korollarien kommt er über eine qualitative Beschreibung der Bewegung des Körpers P (Planeta) um den Zentralkörper T (Terra) unter Berücksichtigung des Störkörpers S (Sol) nicht hinaus.[35] Genau an dieser Stelle war NEWTONs Programm zum Scheitern verurteilt, wie TRUESDELL dies treffend formulierte.[36] Der vielgepriesene und als

33 [E 343], 68. Brief.
34 [Newton 1687], Lib. I, Prop. LXVI, Theor. XXVI, p. 173; [Newton 1999], p. 191.
35 [Newton 1687], Lib. I, Prop. LXVII, Theor. XXVII, p. 188; [Newton 1687], Lib. I, Prop. LXVIII, Theor. XXVIII, p. 188; [Newton 1999], p. 204–205.
36 [Truesdell 1968], p. 92.

"revolutionär" bezeichnete "Newtonian style" stiess bei diesem Problem an seine Grenzen.[37] Die Bewegung des Mondes als spezielle Anwendung des Dreikörperproblems lässt sich nicht einfach durch Übertragung mathematischer Konstrukte als Abbild idealisierter Systeme auf die physikalische Wirklichkeit beschreiben. Im Gegenteil: Eine Behandlung des Problems erfordert physikalische Prinzipien (z.B. Bewegungsgleichungen resultierend aus Impuls- oder Drehimpulssatz), die in einer adäquaten mathematischen Notation formuliert (z.B. als Differentialgleichungen) und mit geeigneten mathematischen Methoden (z.B. mit Reihenentwicklungen) gelöst werden müssen. Von einem solchen Zugang, der in der Folgezeit erst noch entwickelt werden musste, war NEWTON meilenweit entfernt. Ausdruck dafür war die oben kurz erwähnte Zuflucht NEWTONs zur Epizykeltheorie von HORROCKS und zur Einführung eines weiteren Epizykels, um die Beobachtungen von FLAMSTEED besser darstellen zu können.[38] ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT brachte diese Situation auf den Punkt:

> Après avoir éxaminé longtemps la théorie de Mr NEWTON, sans en tirer la conviction que j'attendois, je me suis déterminé à ne plus rien emprunter de lui, et à chercher directement la détermination des mouvemens célestes d'après la seule supposition de l'attraction mutuelle: il falloit pour y parvenir commencer par ce Probleme:
> Trois corps étant donnés avec leurs positions, leurs masses et leurs vîtesses, trouver les courbes qu'ils doivent décrire par leur attraction supposée proportionnelle aux masses, et en raison inverse du quarré des distances.
> Bien des Géometres avoient senti qu'on ne pouvoit arriver à rien de satisfaisant et de général dans le systeme du Monde, si on n'avoit préalablement déterminé ces courbes; mais personne que je sache ne les avoit encore trouvées.[39]

Diese Aussage könnte kaum deutlicher zur Einschätzung I. BERNARD COHENs in [Cohen 1980], p. 15, kontrastieren. Genau dieser Anspruch wurde aber erst im Laufe des 18. Jahrhunderts, u.a. durch EULER – zumindest näherungsweise – eingelöst. Insbesondere führte erst der Infinitesimalkalkül in der LEIBNIZschen Notation, wie er in der Basler Schule um den BERNOULLI-Kreis weiterentwickelt und über EULER tradiert und von ihm angewandt wurde, schliesslich zu jenen brauchbaren Resultaten, die leider oftmals auf NEWTON projiziert und ihm zugeschrieben wurden.

EULER hat sich fast sein ganzes Leben lang mit dem Dreikörperproblem befasst. Die frühesten Aufzeichnungen zu diesem Thema finden sich in seinem Notizbuch [Ms 397], das zwischen 1725 und 1727 entstand. Dies belegt auch ein unpubliziertes Manuskript Ms 251 mit dem Titel *De trium corporum mutua at-*

37 [Cohen 1980], pp. xii-xiii, p. 16.
38 [Horrocks 1673], [Kollerstrom 1985], [Wilson 1987b], [Kollerstrom 1995], [Kollerstrom 2000].
39 PV, 15. Nov. 1747, p. 520; [Gautier 1817], p. 15.

tractione, das vermutlich bereits in den frühen 1730er Jahren verfasst wurde.[40] Die vermutlich letzte Arbeit [E 626] zu diesem Thema, die er am 12. Dezember 1776 präsentierte, erschien unter dem Titel *De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta* im Jahr 1788, fünf Jahre nach seinem Tod. Wie dieser Titel jedoch verrät, fand EULER nach unzähligen vergeblichen Versuchen, das allgemeine Dreikörperproblem zu meistern, lediglich Lösungen für sogenannte "eingeschränkte" Probleme. So fand er die sogenannten "kollinearen Lösungen", deren Entdeckung irrtümlich LAGRANGE zugeschrieben werden. Die Unfähigkeit aber, das allgemeine Problem zu lösen, schrieb er oft den noch mangelhaften mathematischen Methoden, insbesondere der Analysis, zu. Ab den späten 1750er Jahren suchte er nach alternativen Lösungsverfahren und entwickelte in diesem Zusammenhang die Methode der numerischen Integration. Dazu verfasste er die bedeutende Abhandlung [E 398] mit dem Titel *Nouvelle méthode de déterminer les dérangemens dans le mouvement des corps célestes, causés par leur action mutuelle*, die er am 8. Juli 1762 der Berliner Akademie vorlegte.

Das Dreikörperproblem zählt zu den bedeutendsten Themenbereichen der Himmelsmechanik, da die wichtigsten Anwendungen innerhalb der klassischen Positionsastronomie mit der Lösung dieses Problems verbunden sind. Im 18. Jahrhundert waren dies die Sonnentheorie, die Mondtheorie sowie die Grosse Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn. Die Bedeutung dieses Problems sowie die mit seiner Lösung verbundenen Schwierigkeiten kommen nicht zuletzt dadurch zum Ausdruck, dass zwischen 1750 und 1900 über 800 Publikationen zu diesem Thema erschienen.[41] Dennoch wurde eine umfassende Geschichte dieses Problems, abgesehen von wenigen unvollständigen Versuchen, noch nicht geschrieben.[42] Für das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, das die jeweiligen Bewegungen der drei aufeinander gravitativ einwirkenden Körper beschreibt, wurde stets eine analytische geschlossene Lösung gesucht, und in diesem Bestreben wurden die verschiedensten mathematischen Methoden entwickelt. EULER und seine Zeitgenossen waren immer der Ansicht, dass dies das eigentliche Problem darstelle: Man müsse lediglich die Analysis auf einen solchen Grad der Vollkommenheit bringen, dass dieser es dann erlaube, eine Lösung durch mathematische Verfahren herbeizuführen. Erst 1889 gelang es HENRI POINCARÉ, das Theorem von BRUNS zu verallgemeinern und damit die Unlösbarkeit des allgemeinen Dreikörperproblems zu beweisen.[43] Das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung des allgemeinen Dreikörperproblems kann in ein System von 18 gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden, dessen analytisch geschlossene Lösung somit 18 Integrale erfordert. POINCARÉ konnte zeigen, dass es nur möglich ist, zwölf solcher Integrale zu finden, nämlich

40 [Knobloch 1992].
41 [Whittaker 1937], p. [339].
42 [Gautier 1817] sowie [Barrow-Green 1997] als prominenteste Beispiele.
43 [Poincaré 1890]; [Whittaker 1937], Chap. XIV, pp. 358–385; [Barrow-Green 1997].

jeweils drei für den Ort, für den Impuls und für den Drehimpuls sowie jeweils eines für die Energie, für die Elimination der Zeit sowie für die Elimination des aufsteigenden Knotens.[44] Das sogenannte "Jacobi-Integral" gilt nur für das eingeschränkte Problem. Die Mathematiker des 18. Jahrhunderts kämpften somit, nachdem sich der Zweifel an der Gültigkeit des Gravitationsgesetzes als Scheinproblem entpuppt hatte, mit einem weiteren Problem, dessen Lösung sie trotz aller Anstrengungen aber vergeblich suchten, und waren daher stets gezwungen, sich unter diesen Umständen mit Näherungslösungen zufriedenzugeben im Glauben, es existiere eine analytisch geschlossene Lösung.

Parameterbestimmung

Die Parameterbestimmung ist die fundamentale Methode, wenn es darum geht, Theorie und Beobachtung in Einklang zu bringen. Sie stellt daher ein wichtiges Instrument dar, welches die Wechselwirkung zwischen Theorie und Beobachtung überhaupt erst ermöglicht. Sie kommt dort zum Einsatz, wo in der Regel redundante Beobachtungsdaten ausgewertet werden müssen, um z.B. die aus der Theorie folgenden Integrationskonstanten zu bestimmen. Der Hauptanwendungsbereich in der Himmelsmechanik liegt in der Bahnbestimmung, also der Bestimmung der Bahnelemente von Planeten und Kometen aufgrund zahlreicher Richtungsbeobachtungen zu verschiedenen Epochen. Ein weiterer Anwendungsbereich war die Bestimmung der Sonnenparallaxe unter Verwendung und Auswertung der Beobachtungen der Venustransits in den Jahren 1761 und 1769. Diese Anwendungen führten zur Entwicklung effizienter Auswertemethoden, insbesondere zur Entstehung der wesentlichen Elemente der Parameterbestimmungsmethoden: der Beobachtungs- und Bedingungsgleichungen, der Minimierung der Residuen und Systematiken sowie schliesslich der Methode der kleinsten Quadrate. An diesem Punkt und in diesem Zusammenhang wurde die Himmelsmechanik zu einer statistischen Wissenschaft (im Sinne der Ausgleichs- und Schätzverfahren).

Dieses dritte, zentrale Problem, mit dem sich die Astronomie und Mathematik im 18. Jahrhundert konfrontiert sahen, betrifft die Verarbeitung und Auswertung redundanter Beobachtungen. Die aus den Bewegungsgleichungen theoretisch hergeleiteten Näherungslösungen (Modelle) mussten anhand von Beobachtungen validiert und verbessert werden. Insbesondere mussten Integrationskonstanten aus empirischen Daten bestimmt werden. Mit diesem Wechselwirkungsprozess verbunden war auch die Herstellung astronomischer Tabellenwerke, vor allem die Konstruktion von Sonnen- und Mondtafeln.[45] WILSON beschreibt diese Situation in [Wilson 1980], p. 54, ganz treffend.

Das eigentliche Problem bestand jedoch darin, dass man während des 18. Jahrhunderts noch gar nicht wissen konnte, dass Beobachtungen statistisch korrekt ausgewertet werden müssen und dass dies somit überhaupt ein Problem

44 [Poincaré 1890], [Barrow-Green 1997], p. 8.
45 [Wilson 1980], [Forbes/Wilson 1995].

darstellen könnte: Es fehlte die Einsicht, dass die Genauigkeit durch die Kombination von Beobachtungen, die unter verschiedenen Bedingungen gemacht wurden, erhöht werden konnte. Man befürchtete, dass sich Beobachtungsfehler in der Auswertung multiplizieren und nicht kompensieren.[46] Noch um die Mitte des 18. Jahrhunderts gehörte das Mitteln von Resultaten zum einzigen Standardverfahren bei der Auswertung von Beobachtungen. EULER hatte in seiner berühmten Preisschrift [E 120] von 1748 die Methode der Bedingungsgleichungen eingeführt. Erst in seiner Abhandlung [E 397] zur Bestimmung der Sonnenparallaxe führte er sogenannte "Beobachtungsgleichungen" und somit ein durch Parameter charakterisiertes physikalisches Modell ein, die er mit redundanten Beobachtungen durch ein Ausgleichungsverfahren schätzte.[47] In diesem Verfahren verwendete er bereits das Prinzip, dass die sog. "Residuen" (definiert als Differenz zwischen den beobachteten und den berechneten Parameterwerten) gleichverteilt und sowohl positive als auch negative Werte annehmen und diese möglichst minimal werden sollen. Jedoch erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts entwickelte sich, nicht zuletzt aufgrund der damals zentralen astronomischen Probleme, die für die gesamten Wissenschaften so bedeutende "Methode der kleinsten Quadrate".[48]

Für NEWTON stellte die Bahnbestimmung von Kometen, neben der Mondtheorie, ein zentrales Thema dar. Es umfasst in [Newton 1687] die Seiten 474–510 (Schluss). Es wird sogar vermutet, dass ihn die Kometen von 1680[49] und 1682[50] zu seinen himmelsmechanischen Arbeiten motiviert haben sollen.[51] Im dritten Buch der *Principia* postuliert er die nötige Voraussetzung zur Bahnbestimmung von Kometen.[52] In den darauf folgenden Lemmata V–XI beschreibt er die zur Lösung des Bahnbestimmungsproblems benötigten Sätze aus der Geometrie der Kegelschnitte. Sodann beschreibt er als ersten Schritt das zentrale Problem, die sogenannte "erste Bahnbestimmung": Aus drei gegebenen Beobachtungen bestimme man die Bahnkurve eines auf einer Parabel bewegten Kometen.[53] NEWTON bezeichnet die Bahnbestimmung eines Kometen als "ausserordentlich schwieriges Problem".[54] Seine Lösungsmethode besteht aus einem graphischen Verfahren, das durch sukzessive Annäherung auf die Bahnelemente führt. Die Konstruktion bezieht sich dabei auf die zu bestimmende Bahnebene. Er wendet diese Konstruktion jedoch in der Projektion auf die Ekliptikebene an, wodurch die Sonne nicht mehr im Brennpunkt der projizierten Parabel bleibt und das Verfahren

46 [Stigler 1986], p. 4.
47 [Verdun 2004a], [Verdun 2004b].
48 [Stigler 1986], pp. 16–17.
49 [Kronk 1999], pp. 369–373, Komet C/1680 V1.
50 [Kronk 1999], pp. 373–376, Komet 1P/1682 Q1 (Halley).
51 [Bork 1987], pp. 1093–1094.
52 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XL, Theor. XXI, p. 480.
53 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XLI, Theor. XX, p. 487; [Newton 1999], Proposition XLI, Problem XXI, p. 477.
54 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XLI, Probl. XX, p. 487; [Newton 1999], p. 477.

somit nicht mehr anwendbar ist.[55] Das eigentliche Problem besteht – aus statistischer Sicht – in der Auswahl der drei Beobachtungen. Es verwundert nicht, dass NEWTON diesem Problem viel Aufmerksamkeit schenkt und dass er in diesem Zusammenhang für die verschiedenen Ausgaben seines Buches jeweils am meisten Korrekturen vorgenommen hat.[56] Der zweite Schritt besteht laut NEWTON aus einer sogenannten "Bahnverbesserung".[57] Das von ihm vorgeschlagene Verfahren zur Bahnverbesserung ist jedoch wiederum abhängig von der Wahl der (drei) benötigten Beobachtungen und somit zweifelhaft. Wichtig dagegen ist aber die Tatsache, dass er bereits die beiden unerlässlichen Schritte formulierte, welche die Bahnbestimmung als Parameterbestimmungsproblem ausmachen und wie dies später CARL FRIEDRICH GAUSS zusammenfasste: "Die von Kreis- und Parabel-Hypothesen unabhängige Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen beruhet auf zwey Forderungen: I. Muss man Mittel haben, die Bahn zu finden, die drey gegebenen vollständigen Beobachtungen Genüge thut. II. Muss man die so gefundene Bahn so verbessern können, dass die Differenzen der Rechnung vom dem ganzen Vorrath der Beobachtungen so gering als möglich werden."[58] Noch heute machen diese beiden Schritte die eigentliche Bahnbestimmung aus, wobei die "erste Bahnbestimmung" zweifellos als eine Kunst, die "Bahnverbesserung" dagegen als reine mathematische Routine bezeichnet werden darf.[59] Der Haken an dieser Sache ist, dass diese Standard-Prozeduren der angewandten Mathematik im 18. Jahrhundert noch nicht vorhanden oder zumindest noch nicht ausgereift waren.

Es gibt zudem einen wesentlichen Unterschied zwischen der Bestimmung der Bahnparameter von Kometen und der Bestimmung der Bahnelemente von Planeten. In der Regel (bei nicht-periodischen Kometen) müssen die Bahnparameter für jeden neu-entdeckten Kometen – dessen Bahn irgendein Kegelschnitt sein und in irgendeiner Ebene bezüglich der Ekliptik liegen kann – durch eine erste Bahnbestimmung gesucht und anschliessend mit Hilfe weiterer Beobachtungen verbessert werden, was diesen Schritt zu einer Kunst macht. Dies ist bei den Planeten nicht erforderlich, da sich diese auf elliptischen Bahnen mit kleiner Exzentrizität in fast ein- und derselben Bahnebene bewegen und die Bahnelemente durch ihre lange Beobachtungszeit schon relativ gut bekannt sind. Die konsequente Anwendung des Prinzips der universellen Gravitation erforderte aber schon ab Mitte des 18. Jahrhunderts, dass die gegenseitigen Störungen der Planeten bei der Auswertung der Beobachtungen bestimmt und mitberücksichtigt wurden, wodurch sich der Begriff der sogenannten "oskulierenden Bahnelemente" herausbildete. Es blieb aber die Schwierigkeit, die theoretischen, aus dem Gravitationsgesetz und den

55 [Kriloff 1925], [Ruffner 1971], [Bork 1987], [Marsden 1995].
56 Vergleiche die Anmerkungen in [Newton 1999], pp. 477–498.
57 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XLII, Prob. XXI, p. 509; [Newton 1999], Proposition XLII, Problem XXII, p. 505.
58 [Gauss 1809], pp. [197]–199.; [Beutler 2005], pp. 366–368.
59 [Beutler 2005], p. 8.

Bewegungsgleichungen hergeleiteten Störungen und Ungleichheiten in Einklang mit den Beobachtungen zu bringen, was insbesondere bei der Bewegung der Erde (Sonnentheorie) durchaus keine einfache Aufgabe war. Von grosser Bedeutung in diesem Zusammenhang ist das Problem der Bestimmung der Sonnenparallaxe. Bei der Bestimmung der Bahnparameter von Kometen galt es hingegen, effiziente, d.h. analytische Methoden der Bahnbestimmung zu entwickeln.[60] Neben Tobias Mayer, der erste Parameterbestimmungsmethoden im Zusammenhang mit der Libration und Bewegung des Mondes entwickelte,[61] leistete vor allem Euler wichtige und zum Teil erstmalige Beiträge zur Lösung dieser Probleme, insbesondere zur Sonnen- und Mondtheorie sowie zum Problem der Grossen Ungleichheit. Als spezielle Anwendung des Zweikörperproblems entwickelte er in [E 58] und [E 66] Bahnbestimmungsmethoden für Planeten und Kometen. Diese analytischen Methoden waren zwar dem graphischen Verfahren von Newton weitaus überlegen, sie sind jedoch nach wie vor unzulänglich, was die Auswahl und Auswertung der Beobachtungen betrifft. Der entscheidende Schritt wurde erst mit der Einführung der Methode der kleinsten Quadrate vollzogen, nota bene in einem Werk [Legendre 1805] über die Bahnbestimmung von Kometen.

2.3. Besondere (theoretische) Probleme

Während die angesprochenen allgemeinen Probleme vorwiegend das 18. Jahrhundert betrafen, reichen besondere Problembereiche bis weit in die Antike zurück. Diese konnten aber erst im 18. Jahrhundert unter dem Einfluss von Newtons *Principia* theoretisch aus dem Gravitationsgesetz und vor dem Hintergrund der fundamentalen Probleme hergeleitet und in Wechselwirkung mit immer genaueren Beobachtungen gelöst werden. Diese besonderen Probleme können daher als "klassische" Themenbereiche bezeichnet werden und umfassen die Sonnenbewegung und die Bestimmung der Sonnenparallaxe, die Mondbewegung, die Grosse Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn (ein Problem, das mindestens bis auf Kepler zurückgeht), sowie die Erdrotation einschliesslich der Präzession und Nutation. Das Problem der Bestimmung von Grösse und Figur der Erde sowie der Meeresgezeiten wird in [Verdun 2015] eingehender betrachtet. Der ausserordentliche Einfluss von Newton auf das 18. Jahrhundert rechtfertigt es, mit der Beschreibung dieser Probleme zu jenem Zeitpunkt zu beginnen, als Newton sie in seinen *Principia* behandelt und teils ungelöst dem folgenden Jahrhundert überlassen hat.

Sonnentheorie

Die Kenntnis der Bewegung der Sonne als Widerspiegelung der Bewegung der Erde um die Sonne – die sog. "Sonnentheorie" – ist eine fundamentale Vorausset-

60 [Leuzinger 1882].
61 [Mayer 1750], [Mayer 1753], [Wepster 2010].

zung für alle anderen Bereiche der Himmelsmechanik. Die Elemente der Sonnenbewegung wie z.B. die Exzentrizität der Erdbahn, die Perihellänge bzw. die Position der Apsidenlinie oder die (siderische und tropische) Jahreslänge als Funktion der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne sowie der mittleren Bewegung sind zentrale Parameter für die Bahnbestimmung anderer Himmelskörper sowie für die Zeitrechnung und Kalenderkunde. EULER wies in der Abhandlung [E 836a] von 1744 mit deutlichen Worten auf die Wichtigkeit der Sonnentheorie hin. Die Sonnentheorien und die daraus konstruierten Sonnentafeln hatten somit seit der Antike grosse Bedeutung, wobei die scheinbare Bewegung der Sonne vor NEWTON durch kinematische Modelle beschrieben wurde. Die Entwicklung der Sonnentheorien nach der Zeit NEWTONs wurde vorwiegend durch WILSON in [Wilson 1980] und FORBES in [Forbes/Wilson 1995] ausführlich nachgezeichnet. Dennoch ist es an dieser Stelle nötig, auf einzelne Punkte hinzuweisen, die im Zusammenhang mit EULERs Arbeiten zur Bestimmung der Sonnenbewegung und ihrer Elemente in diesen Darstellungen nicht oder nur ungenügend aufgezeigt wurden.

Die Bahnelemente der Sonne (bzw. der Erde) müssen aus Beobachtungen bestimmt werden. Die Bewegung der Sonne kann in erster Näherung im Rahmen des Zweikörperproblems mit Hilfe der Keplerschen Gesetze beschrieben werden. Diese Bahnelemente bleiben jedoch nicht konstant, sondern ändern sich im Laufe der Zeit aufgrund der Störungen des Mondes sowie der anderen Planeten. Sollen diese Änderungen studiert werden, muss die Bewegung der Sonne (bzw. der Erde) in zweiter Näherung im Rahmen des Dreikörperproblems beschrieben werden. Erst in den 40er-Jahren des 18. Jahrhunderts wurde die Bewegung der Sonne Gegenstand störungstheoretischer Überlegungen. Insbesondere versuchte man, säkulare Änderungen gewisser Parameter wie z.B. die Neigungen der Planetenbahnen gegenüber der Ekliptik, die Ekliptikschiefe, oder die Jahreslänge auf den Widerstand eines raumfüllenden Mediums zurückzuführen. EULER war der erste, der eine Theorie der Sonne und des Mondes als Dreikörperproblem aufstellte. Die *Principia* NEWTONs konnten ihm dazu kaum dienlich sein. Dieser behandelte die Bewegung der Erde und der Planeten in allen drei Ausgaben im wesentlichen noch als Zweikörperproblem mit dem Resultat der Angabe von numerischen Werten für die Umlaufzeiten und Abstände der Planeten von der Sonne. Genau diese Werte (der dritten Ausgabe von 1726) finden sich in EULERs Notizbuch [Ms 398], fol. 50v–51r, von 1727 mit der Bemerkung "Ex Neutoni Philos." Es ist bemerkenswert, dass NEWTON die heute sogenannten ersten beiden Keplerschen Gesetze ohne Hinweis auf KEPLER postulierte, was darauf hindeutet, dass diese zu NEWTONs Zeiten noch nicht als solche wahrgenommen wurden. NEWTON bemerkt zwar, dass diese nur gelten, falls die Sonne sich in Ruhe befände und die übrigen Planeten nicht gegenseitig aufeinander einwirken würden. Diese gegenseitigen Einwirkungen seien aber sehr gering, so dass sie vernachlässigt werden können. Einzig die Einwirkung Jupiters auf Saturn sei nicht vollkommen zu vernachlässigen. In der dritten Ausgabe der *Principia* fügte er eine Bemerkung an, die nicht nur für die Sonnentheorie, sondern für die Störungstheorie im allgemeinen in der Folge – insbesondere für EULER – vermutlich einen nachhaltigen Einfluss ausübte: "Die Störungen der übrigen Umlaufbahnen sind noch weit kleiner, abgesehen davon, dass die Umlaufbahn der Erde vom Erdmond merklich gestört wird. Der gemeinsame Schweremittelpunkt der Erde und des Erdmondes durchläuft um die Sonne herum eine Ellipse, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht, und überstreicht mit seinem zur Sonne hin gezogenen Radius in dieser Ellipse den Zeiten proportionale Flächen, die Erde aber läuft mit einer einen Monat dauernden Bewegung um diesen gemeinsamen Mittelpunkt herum."[62] DANIEL BERNOULLI schrieb am 25. Dezember 1743 an EULER im Brief [R 152]: "Uebrigens wäre die Frage, ob das centrum gravitatis Lunae et Terrae könne supponiret werden, als wenn es eandem curvam describire, als es describiren würde, si Terra et Luna in hoc puncto essent conjunctae. Vielleicht macht dieses centrum einige undulationes menstruas." Vermutlich waren es diese Äusserungen, die EULER dazu veranlassten, die Bewegungen der Erde und des Mondes um ihren gemeinsamen Schwerpunkt zu untersuchen und daraus seine erste Sonnen- und Mondtheorie zu entwickeln, die er im Rahmen des Dreikörperproblems aufstellte, wie auch sein Brief [R 512] vom 13. März 1745 an DELISLE nahelegt. EULER hat die erste Version seiner Sonnen- und Mondtheorie in einem unveröffentlicht gebliebenen Manuskript dargelegt, das sich leider nur noch fragmentarisch erhalten hat. Es handelt sich um die Handschrift [Ms 281], welche auf fol. 8r–10v nicht nur EULERs erste Sonnentheorie "De motu Solis ejusque perturbatione a Luna", sondern auf fol. 11r–16r auch eine Urversion seiner "ersten" Mondtheorie enthält. Dieses Manuskript wurde zwischen 1744 und 1746 verfasst, wie aus verschiedenen Hinweisen abgeleitet werden kann. Es bildete die Grundlage für EULERs Abhandlungen *De motu nodorum lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione* [E 138] und *Quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquiritur* [E 139], die zwar erst am 2. September 1748 der Petersburger Akademie vorgelegt, aber vermutlich ebenfalls bereits zwischen 1744 und 1746 verfasst wurden. Am Schluss dieser Abhandlung bemerkt EULER, dass er in seinen Sonnentafeln die Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Erde – Mond als scheinbare Bewegung der Sonne in ihrer Länge von 15″ berücksichtigt habe. Diese "lunare Ungleichheit" leitete er ausführlich in seiner Abhandlung *Nouvelles tables astronomiques pour calculer la place du Soleil* her, die er am 9. April 1744 in der Berliner Akademie gelesen hat.[63] Der numerische Wert dieser Ungleichheit findet sich aber bereits in seinem vierten Notizbuch [Ms 400], das zwischen 1740 und 1744 entstanden ist.

Vermutlich in Zusammenhang mit der Sonnentheorie folgte EULER zwei Propositionen aus den *Principia*, deren konsequente Anwendung ihn auf das sogenannte "Prinzip des Kräftetransfers" führten: "Der gemeinsame Schweremittel-

62 [Newton 1726], Lib. III, p. 410; [Newton 1999], pp. 403–404.
63 [E 836a] sowie [E 836].

punkt der Erde, der Sonne und aller Planeten befindet sich in Ruhe"[64] sowie "Die Sonne wird in fortwährender Bewegung umhergetrieben, aber entfernt sich von dem gemeinsamen Schweremittelpunkt aller Planeten niemals weit weg".[65] EULER berücksichtigte diese Sätze, indem er jeweils die auf jenen Körper wirkenden Kräfte, der das Ruhesystem definieren soll, bezüglich dessen die Bewegungsgleichungen formuliert werden, als "Scheinkräfte" den diese Kräfte erzeugenden Körpern in umgekehrter Richtung anbrachte. Die Anwendung dieses Prinzips führte er in seinen frühen störungstheoretischen Arbeiten besonders sorgfältig und explizit durch.[66] Das weitaus schwierigste Problem aber bestand in der Verifizierung folgender Proposition: "Die Aphele und die Knoten der Umlaufbahnen befinden sich in Ruhe."[67] Diesem Satz fügte NEWTON in der zweiten und dritten Ausgabe seiner *Principia* nachträglich ein Scholion hinzu, in dem er ergänzt, dass das Aphel der Erde sich aufgrund der Störungen von Jupiter und Saturn rückläufig mit $17'40''$ pro Jahrhundert bewege. Dies ist aber ein rein empirischer Befund, denn NEWTON war nicht in der Lage, Störungen der Bahnelemente aus dem Gravitationsgesetz herzuleiten. Die erste umfassende und systematische Untersuchung der Bewegung der Erde, bei der die Störungen der Planeten berücksichtigt werden, gelang erst EULER in seiner Preisschrift [Ms 266] bzw. [E 414] für das Jahr 1754 bzw. 1756 der Pariser Akademie.

EULER hat sich seit seiner Basler Zeit intensiv mit der Sonnenbewegung auseinandergesetzt, zuerst (bis etwa 1742) im Rahmen des Zweikörperproblems, dann (ab etwa 1743) in seinen frühen Arbeiten zur Anwendung des Dreikörperproblems auf die Sonnen- und Mondtheorie. Dabei hatte die Konstruktion verbesserter Sonnen- und Mondtafeln für ihn eine sehr hohe Priorität. Dies hatte nicht nur wissenschaftliche Gründe, sondern hatte auch einen praktischen Hintergrund. Als Direktor der mathematischen Klasse und Mitglied der Kalenderkommission der Berliner Akademie der Wissenschaften wurde er 1744 damit beauftragt, die damals vorhandenen Mängel bei den Kalenderberechnungen abzustellen und dafür zu sorgen, dass künftig im astronomischen Teil der von dieser Akademie herausgegebenen Kalender, die eine wichtige Einnahmequelle bildeten und die Angaben über die Sonnen- und Mondpositionen enthielten, keine Fehler mehr auftreten.[68] Zu diesem Zweck stand die empirische Bestimmung gewisser Erdbahnparameter bzw. Elemente der scheinbaren Sonnenbahn im Vordergrund, wie aus der Arbeit [E 836a] hervorgeht. Die Sonnenbeobachtung an sich war mit grossen Pro-

---

64 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XI, Theor. XI, p. 417; [Newton 1999], p. 402.

65 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XII, Theor. XII, p. 418; [Newton 1999], p. 402.

66 [Ms 281], [E 120], [E 138], [E 139].

67 [Newton 1726], Lib. III, Prop. XIV, Theor. XIV, p. 420; [Newton 1999], p. 404.

68 [Knobloch 1984], p. 35, Nr. 32; p. 36, Nrm. 36 u. 37; pp. 348–349, Nr. 21; p. 350, Nr. 29. EULER hatte klare Vorstellungen von den Aufgaben der Astronomen der Berliner Akademie. Die Berechnung astronomischer Kalender stand nach seinen Plänen nicht im Vordergrund, cf. [Kirsten 1977]. Die Geschichte der von der Berliner Akademie herausgegebenen astronomischen Kalender wird dargestellt in [Clemens 1902].

blemen verbunden, nicht nur hinsichtlich der Messmethoden, sondern vor allem bezüglich der Auswerte- bzw. Reduktionsmethoden. Diese konnten erst auf eine solide Grundlage gestellt werden, nachdem um die Jahrhundertmitte sämtliche Reduktionsgrössen bekannt waren, insbesondere die Aberration und die Nutation. Es bestand in der Folge die Aufgabe, genaue numerische Werte dieser Reduktionsgrössen zu bestimmen. Wesentliche Beiträge in dieser Richtung leistete – neben Bradley und Mayer – der französische Astronom Nicolas-Louis de Lacaille. Die Vervollkommnung der Sonnentheorie, was die empirische Seite anbelangt, ist im wesentlichen ihm zu verdanken.[69] Auch Euler scheint eigene Beobachtungen der Sonne angestellt zu haben, wie die Manuskripte [Ms 293] und [Ms 295] belegen. Neben der Bestimmung des Wertes der maximalen Mittelpunktsgleichung in [Ms 399], fol. 233r, und der Lage der Apsidenlinie der Erdbahn galt es in erster Linie, zwei bis in die Antike zurückreichende und mit der Sonnentheorie verbundene Fragen zu beantworten: Sie betreffen die Konstanz der Ekliptikschiefe und der Jahreslänge.

Die Ekliptikschiefe ist definiert als Winkel zwischen der Äquator- und der Ekliptikebene. Erstere bewegt sich aufgrund der Lunisolarpräzession und der Nutation, die zweite aufgrund der planetaren Präzession.[70] Da man bis in die 1740er Jahre nur die Lunisolarpräzession kannte, aus Beobachtungen jedoch eine stetige, vermeintlich säkulare Abnahme der Ekliptikschiefe feststellte, war lange Zeit unklar, ob dieser Befund reell ist und was allenfalls eine solche Änderung der Ekliptikschiefe verursacht. Während Gassendi und Flamsteed im 17. Jahrhundert den Wert der Ekliptikschiefe als konstant betrachteten, griff Louville das Problem ihrer Veränderlichkeit und ihrer möglichen Ursache in der Abhandlung [Louville 1719] von 1719 wieder auf. Er bestimmte eine Abnahme von einer Bogenminute pro Jahrhundert, die er mit einer Bewegung der Erdachse zu erklären versuchte, und löste damit eine lang andauernde Diskussion um dieses Thema aus.[71] Auch Euler hat sich noch vor seinen Arbeiten zur Störungstheorie mit diesem Problem beschäftigt, wie aus seinen Notizbucheintragungen hervorgeht, z.B. aus [Ms 399], fol. 24r. Dem von Flamsteed bestimmten Wert der Ekliptikschiefe von $23° \, 29'$ fügte er eine Korrektur x an, wobei $x = -p\cos\alpha + q\sin\alpha + 6' \, 14''$ mit $\alpha = n \cdot 1° \, 10' \, 36''$, $\log p = 7.4591813$, $\log q = 8.3575000$ und n die Anzahl der Jahrhunderte bezeichnet. Er vermutete zunächst (durch rein kinematische Überlegungen), dass Kometen bei nahen Begegnungen mit der Erde die inertiale Lage der Erdachse und somit die Ekliptikschiefe ändern könnten, wie aus den Aufzeichnungen aus seinem Notizbuch [Ms 400], fol. 182v–183r, ersichtlich wird, wo er sich auf den "Cometa huius anni 1742" bezieht. Lemonnier vermutete aber in seinen *Institutions astronomiques* von 1746, in dessen historischen Einleitungs-Essai er auch die aktuellen Probleme der Astronomie beschreibt und dem Problem der

69 [Wilson 1980], pp. 75–86, 111–120.
70 [Seidelmann 1992], pp. 99, 171.
71 [Legentil 1762]; [Lalande 1784]; [E 223].

Ekliptikschiefe viel Aufmerksamkeit widmet,[72] dass die Variation der Ekliptikschiefe auf die Störungen der Planeten zurückzuführen sein könnte. In der Folge ist es EULER anlässlich der Preisfragen für 1754 und 1756 der Pariser Akademie mit seiner Preisschrift [E 414] gelungen, diesen Effekt störungstheoretisch herzuleiten und durch die sog. "planetare Präzession" zu erklären. Den auf empirischen Daten gestützte Nachweis erbrachte er in einer Abhandlung [E 223], die am 24. April 1755 der Berliner Akademie vorgelegt wurde. Am 1. März 1755 teilte er im Brief [R 2787] an WETTSTEIN nicht ohne Stolz den Erfolg seines Nachweises mit.

EULERs ursprüngliche Gravitationstheorie, die er etwa gleichzeitig mit seiner Sonnentheorie entwickelte, setzt ein Äthermedium voraus, das inertial ruht. Als Folge davon müssten die Planeten während ihres Umlaufes um die Sonne einen Widerstand verspüren, der ihre Halbachsen verkleinert und somit ihre Umlaufzeit verkürzt. Die Jahreslänge würde daher nicht konstant bleiben, sondern sukzessive ein wenig abnehmen. Die Länge des tropischen Jahres ist definiert als mittleres Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch das Frühlingsäquinoktium. Weil dieses als Schnittpunkt des Äquators und der Ekliptik definiert ist, verändert sich die Länge des tropischen Jahres aufgrund der Variationen der Äquatorebene – hervorgerufen durch die Präzession und die Nutation – und der Ekliptikebene – hervorgerufen durch die planetare Präzession,[73] die EULER erst Mitte der 1750er Jahre nachweisen konnte. Die Länge des siderischen Jahres bleibt im Mittel konstant. Es erstaunt deshalb nicht, dass er die Konstanz der Länge des tropischen Jahres vorerst aufgrund des Ätherwiderstandes in den Briefen [R 514] und [R 517] an DELISLE in Frage stellte. Es folgt die Erklärung sowie die Folgerung, dass es sich bei der vermeintlichen säkularen Verkürzung der Jahreslänge um einen Effekt des Ätherwiderstandes handeln müsse. Obwohl sich EULER hier auf die Abhandlung [E 89] bezieht,[74] die in seinen *Opuscula varii argumenti* 1746 erschien, befindet sich die ausführliche Erklärung für die vermeintliche Richtigkeit der Beobachtungen von PTOLEMÄUS nicht darin, sondern in einem unpublizierten Manuskript, das EULER vermutlich zwischen 1744 und 1746 verfasst haben musste.[75] In der gedruckten Abhandlung *De relaxatione motus planetarum*[76] bestimmt er aus einem Resultat in seiner "ersten" Mechanik[77] sowie aus dem dritten Keplerschen Gesetz die nach i Umläufen

72 [Lemonnier 1746], p. l–lj.
73 [Seidelmann 1992], p. 576.
74 Das in französischer Sprache verfasste Manuskript-Fragment [Ms 261] ist inhaltlich fast identisch mit der gedruckten lateinischen Abhandlung [E 89] und dürfte somit zur selben Zeit entstanden sein.
75 Es handelt sich um das Manuskript-Fragment [Ms 270], das u.a. aus dessen §24 datiert werden kann, worin EULER die lunare Ungleichheit in der Länge der Sonne von 15″ erwähnt und sich auf LEMONNIERs Sonnentafeln [Lemonnier 1743] von 1743 und noch nicht auf [Lemonnier 1746] von 1746 bezieht.
76 [E 89] sowie [Wilson 1980], pp. 94–101.
77 [E 15], Cap. IV, Prop. 121, §1016.

resultierende Umlaufzeit Θ als Funktion der Anfangsperiode T mit

$$\Theta = T\left(1 - \frac{3i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}\right) ,$$

wobei ζ die Exzentrizität der Sonnenbahn und g/c eine von der grossen Halbachse und dem Ätherwiderstand abhängige Konstante bezeichnen. Unter der Annahme einer säkularen Verkürzung der Länge des tropischen Jahres von fünf Sekunden, einer Länge des siderischen Jahres von $T = 31\,558\,176$ Sekunden und einer Exzentrizität der Sonnenbahn von $\zeta = 1/60$ folgt für den Wert $c/g = 5950231000$ und somit eine Abnahme der maximalen Mittelpunktsgleichung von $1''$ in 2720 Jahrhunderten sowie eine Verminderung der Aphelbewegung von 15^{iv} pro Jahrhundert. Daraus folgert er in [E 89], dass der durch den Äther hervorgerufene Widerstand nicht grösser ist, als dass er nicht mit den Beobachtungen zu vereinbaren wäre. Aus der Tatsache, dass die Verminderung der Planetenbewegung nicht messbar ist, könne daher nicht geschlossen werden, dass der Raum völlig leer sei, wodurch das schwerwiegendste Argument, womit die Engländer ihre "Attraktion" zu schützen versuchten, unhaltbar werde; denn falls der Raum aus einem subtilen Äther besteht, gäbe es keinen Grund mehr, eine mechanische Ursache für die universelle Gravitation abzulehnen.

Wie aus den Briefen [R 2763], [R 2764], [R 2765] an WETTSTEIN von 1749 hervorgeht, erhoffte sich EULER weitere Evidenz für seine Vermutung der Verkürzung der Jahreslänge aus einem arabischen Manuskript, auf das ihn LEMONNIER aufmerksam machte und das Beobachtungen der Sonne enthalten soll, die zwar nicht so alt wie die Aufzeichnungen von PTOLEMÄUS, aber immer noch deutlich älter seien als jene von WALTHER. In den beiden Briefen [R 1645] vom 22. August und [R 1646] vom 25. November 1753 an EULER widerlegte TOBIAS MAYER mit gewichtigen Argumenten EULERs Vermutung, gestand jedoch ein, dass er eine säkulare Änderung in der Exzentrizität der Sonnenbahn nicht ausschliesse. EULER schien seinen Irrtum einzugestehen, wie der Brief [R 1647] offenlegt. Dennoch hielt er im Brief [R 2783] hartnäckig an seiner Ansicht eines widerstehenden Äthermediums nicht zuletzt wegen der vermeintlichen säkularen Beschleunigung des Mondes fest. Und im Brief vom 11. Mai 1754 an PONTOPPIDAN[78] doppelte er nach. Dass diese Sache für EULER überhaupt noch nicht erledigt war, kommt einerseits dadurch zum Ausdruck, dass sein Sohn JOHANN ALBRECHT den Preis der Berliner Akademie für das Jahr 1762 mit der Schrift *Mémoire dans lequel on examine Si les Planetes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leur mouvement?* [A 8^2] gewann, und andererseits dadurch, dass er seine Ansichten vom raumfüllenden und widerstehenden Äthermedium sogar in seinem populärsten Werk, den "Briefen an eine deutsche Prinzessin", weiterhin propagierte.[79]

78 [Pontoppidan 1755], [E 218].
79 [E 343], Lettres 17–19.

Offenbar war Euler noch vor 1750 mit den bestehenden Sonnentheorien nicht zufrieden, dennoch schien ihm die Entwicklung einer adäquaten Theorie und die Konstruktion präziser Sonnentafeln äusserst wichtig zu sein. Nachdem es ihm mit seiner berühmten Preisschrift [E 120] von 1748 zur grossen Ungleichheit gelungen war, die Bewegung des Saturn aufgrund der Störungen von Jupiter zu bestimmen, erhoffte er sich, auf analoge Weise auch die Störungen der Erdbewegung genauer herleiten zu können. Am 15. Juli 1749 unterbreitete er im Brief [R 2191] der Petersburger Akademie vier Preisfragen, worunter die letzte die Sonnentheorie betraf. Da sich die Akademie aber für die Mondtheorie als Preisfrage entschied, wandte er sich an Bouguer als Preisrichter der Pariser Akademie, der mit der Aufgabenstellung des Preises für 1754 beauftragt war. Dieser schrieb ihm am 9. Oktober 1751 in [R 316], dass er einen entsprechenden Vorschlag eingereicht habe und bestätigte Euler in [R 317] vom 2. April 1752, dass sich die Kommission für die Frage "la théorie des irregularitez que les planetes peuvent causer au mouvement de la Terre" entschieden habe. Euler gewann diesen Preis mit seiner Abhandlung [Ms 266] bzw. [E 414] *Investigatio perturbationum quibus Planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur*, welche die erste sorgfältige und systematische Herleitung der planetaren Störungen der Erdbewegung bzw. der scheinbaren Sonnenbewegung darstellt.[80]

Mondtheorie

Neben der Bahnbestimmung von Kometen nimmt die "Bahnbestimmung des Mondes", die sogenannte "Mondtheorie", in den *Principia* Newtons einen grossen Raum ein.[81] Beinahe ein Drittel des dritten Buches und eigentlich das ganze neunte Kapitel des ersten Buches sind diesem Thema gewidmet, das als einer der "revolutionärsten Teile" des epochalen Werkes bezeichnet wird.[82] Gründeten die früheren Mond- und Planetentheorien noch auf geometrischen Konstruktionen und kinematischen Modellen (Deferenten und Epizykel), versuchte Newton, die Bewegung des Mondes als Dreikörperproblem aus dem Prinzip der universellen Gravitation zu formulieren und zu lösen.[83] Es wurde sogar die Meinung vertreten, dass Newton bei seiner Anwendung des Dreikörperproblems auf die Mondtheorie bereits die Methode der Variation der Bahnelemente entwickelt habe.[84] Doch er scheiterte an seinem Vorhaben,[85] und zwar sowohl mit der Mondtheorie, wie sie in den *Principia* dargestellt wird, als auch mit seiner "vergessenen Mondtheorie", die ab 1702 in verschiedenen Publikationen erschienen ist und aus der in der Folge Mondtafeln konstruiert wurden, die bis in die 1740er Jahre zu den

80 [Wilson 1980], p. 74.
81 [Smith 1999b], [Smith 1999c].
82 [Cohen et al. 1999], p. 240.
83 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XXII, Theor. XIX, p. 427; [Newton 1726], Lib. III, Prop. XXXV, Scholium p. 459.
84 [Nauenberg 2000]; [Nauenberg 2001], p. 189.
85 [Cohen 1980], pp. 277–278.

Besten gehörten.[86] Im Gegensatz zur Theorie von 1702 war die Anwendung der aus den *Principia* abgeleiteten Regeln zur Bestimmung der Mondbewegung für den praktischen Gebrauch nicht möglich.[87]

Obwohl es Newton zwar gelang, einzelne Ungleichheiten der Mondbewegung wie z.B. die bereits Ptolemäus bekannte und von Boulliau bezeichnete "Evektion" oder die von Tycho Brahe entdeckte "Variation" zu erklären und deren Werte zu bestimmen,[88] muss auch seine Mondtheorie als ebenso ausgeklügeltes Konstrukt ("ingenious scheme") wie die Modelle seiner Vorgänger beurteilt werden.[89] Es beruht auf der um einen Epizykel erweiterten Version des kinematischen Modells von Horrocks, das man als "Newtons Interpretation der Halleyschen Variation der Flamsteedschen Version von Crabtrees Beitrag zur Horrocksschen Mondtheorie" bezeichnen kann.[90] In dieser "Mondtheorie" von 1702 ist es Newton zwar gelungen, die Genauigkeit der Ungleichheiten in der Mondbewegung auf $10'$ zu reduzieren,[91] und eine gründliche Analyse zeigte sogar ein noch besseres Fehlermuster.[92] Dennoch bleibt die Tatsache, dass diese "Theorie" aus geometrischen, kinematischen und dynamischen Komponenten zusammengesetzt ist.[93] Aus einer derartigen Konstruktion gepaart mit empirischen Daten konnte man zwar Mondtafeln von guter Qualität herstellen, diese "Mondtheorie" hatte aber zwei schwerwiegende Nachteile, die das Scheitern Newtons kennzeichnen. Zum einen verhinderte sie das Verständnis und eine tiefere Einsicht in die Dynamik der Mondbewegung (durch die Formulierung adäquater Bewegungsgleicffvhungen), zum anderen machte sie es unmöglich, den sukzessiven Approximationsprozess sorgfältig zu kontrollieren (durch adäquate Integrationsmethoden, mit denen die Differentialgleichungen gelöst werden können).[94] Damit waren die weiteren Probleme im wahrsten Sinn des Wortes vorprogrammiert: Newtons "Mondtheorie" stellte die Gültigkeit des Prinzips der universellen Gravitation und die Richtigkeit des Gravitationsgesetztes eher in Frage, als diese als Fundament seines Programms zu festigen. Das von ihm ungelöst hinterlassene Problem der Apsidendrehung der Mondbahn, um nur das prominenteste Beispiel im Zusammenhang mit der Mondtheorie zu erwähnen, offenbarte in den 1740er Jahren die Defizite dieser kinematischen Theorie und stürzten das Newtonsche System der universellen Gravitation (vorübergehend) in eine tiefe Krise.

Der Einfluss von Newtons Mondtheorie, insbesondere sein Anspruch, diese aus dem Gravitationsgesetz zu entwickeln, war dennoch gewaltig und nachhal-

86 [Newton 1702]; [Cohen 1975], [Kollerstrom 1995], [Kollerstrom 2000].
87 [Cohen et al. 1999], p. 247.
88 [Smith 1999b], p. 253–254; [Wilson 2001], pp. 141–154.
89 [Cohen et al. 1999], p. 247; cf. [Whiteside 1976].
90 [Kollerstrom 2000], p. 81.
91 [Smith 1999b], p. 256.
92 [Kollerstrom 2000], Chap. 11, pp. 153–164.
93 [Kollerstrom 2000], p. 33.
94 [Wilson 2001], p. 182.

tig.[95] Diese Wirkung spiegelt sich in der Tatsache wider, dass seine kinematische Theorie von 1702 bis 1728 in mindestens 17 englischen und lateinischen Ausgaben erschien und dass aus ihr bis Mitte des 18. Jahrhunderts mindestens 10 Mondtafeln konstruiert und publiziert wurden. Dies hatte einen triftigen Grund: Die Nachfrage nach noch besseren Mondtafeln zur genauen Bestimmung der geographischen Länge auf See und somit für die Navigation war enorm. Es drängt sich deshalb die Frage auf, weshalb seit Erscheinen von NEWTONs *Principia* im Jahr 1687 gleichwohl eine Verzögerung von fast 60 Jahren eintrat, bis genauere Mondtheorien und daraus bessere Mondtafeln entstehen konnten, die einzig auf dem Gravitationsgesetz beruhten. Dazu gibt es zwei wichtige Gründe: die Weiterentwicklung und Anwendung des LEIBNIZschen Kalküls – insbesondere die Formulierung von Bewegungsgleichungen (gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung) – sowie die Einführung trigonometrischer Funktionen zur Lösung dieser Gleichungen.[96] Das Aufstellen von Bewegungsgleichungen im Rahmen des Dreikörperproblems impliziert drei wichtige Schritte: 1. die Parametrisierung des Problems in einem geeignet gewählten Bezugssystem, 2. die Formulierung und Anwendung des allgemeinen Impulssatzes (Bewegungsgesetze) in der LEIBNIZschen Notation und in drei Dimensionen sowie 3. die Bestimmung der Kräfte und Scheinkräfte, die auf den Körper wirken, dessen Bewegung (bezüglich des gewählten Koordinatensystems) beschrieben werden soll. Dieser Punkt setzt die Kenntnis des Prinzips des Kräftetransfers voraus. Das näherungsweise Lösen des resultierenden Differentialgleichungssystems benötigt die Kenntnis gewisser Approximations- und Integrationsmethoden. Dabei spielt die Entwicklung der Lösungsansätze in trigonometrische Reihen eine zentrale Rolle.[97] All diese Anforderungen entwickelte EULER – hinsichtlich ihrer Anwendung in der Störungstheorie – in einer relativ kurzen Zeit, nämlich zwischen 1739 und 1743. Bis etwa 1742/43 behandelte er die himmelsmechanischen Probleme stets im Rahmen des Zweikörperproblems. Dann erfolgte ein grundlegender Wandel in seinen Methoden. Ab 1743/44 versuchte er, die Sonnen- und Mondbewegungen im Rahmen des Dreikörperproblems zu formulieren und zu lösen, was die Kenntnis der oben erwähnten Punkte voraussetzt. Die Meilensteine dieser Entwicklung sind in folgenden seiner Arbeiten dokumentiert: [E 126] (vom 4. Dezember 1738 und 30. März 1739), [E 62] (vom 6. September 1742), [E 138] (vom 5. Oktober 1744), [E 174] (vom 5. November 1744), [E 139] (vermutlich von 1744), [Ms 276] (vermutlich von 1742 bis 1744) und [Ms 281] (vermutlich von 1744 bis 1746) sowie [E 112] (vom 8. Juni 1747). Wie bei NEWTON stellte auch bei EULER die Mondtheorie das zentrale Thema seiner Forschungsarbeiten dar. Es erstaunt deshalb nicht, dass er sich schon seit seiner Basler Zeit damit beschäftigte, wie Eintragungen in seinem ersten Notizbuch [Ms 397], fol. 124r, belegen.

95 [Smith 1999b], p. 256.
96 [Wilson 2001], pp. 139–140.
97 [Katz 1987]; [Wilson 2001], p. 172.

Was konnte Euler Nützliches zur Mondtheorie aus Newtons *Principia* übernehmen? Höchstwahrscheinlich gar nichts, denn er hatte bereits bei seiner Neuformulierung und Umsetzung der geometrisch-synthetisch dargestellten Inhalte der *Principia* in die analytische Sprache seiner "ersten" Mechanik [E 15] in §706 bemerkt, dass Newton die Bewegung des Mondes nur mit allzu grossen Näherungen zu beschreiben vermochte, indem er nicht alle auf diesen wirkenden Kräfte berücksichtigten konnte. In der zusammenfassenden Beschreibung [E 138a] seiner Abhandlung [E 138], die Euler am 5. Oktober 1744 in der Berliner Akademie gelesen und vermutlich selbst verfasst hat, legte er die Unzulänglichkeit von Newton's Theorie schonungslos offen. Newton berücksichtigte nur die von der Erde und der Sonne auf den Mond wirkenden Kräfte und vernachlässigte jene, mit denen der Mond die Erde und die Sonne an sich zieht.[98] Das ist in diesem Fall in erster Näherung zwar legitim, wird aber einer Beschreibung der Mondbewegung bezüglich des Ruhesystems der Erde nicht gerecht. Erst Euler ist es in der ersten Hälfte der 1740er Jahre gelungen, die durch das gewählte Bezugssystem entstehenden Scheinkräfte mit Hilfe des Prinzips des Kräftetransfers ("transporter des forces") zu berücksichtigen.[99] Für die sukzessive Umsetzung der Newtonschen Ausführungen – von seinen ersten Versuchen vor 1730 in [Ms 271], [Ms 272], [Ms 397], [Ms 167] bzw. [E 15] bis zur erfolgreichen Anwendung der nach der Zeit parametrisierten Bewegungsgleichungen in [Ms 281] und [E 138] bzw. [E 138a] – benötigte Euler etwa 15 Jahre.

In den Korollarien zur Proposition LXVI des ersten Buches der *Principia* bestimmte Newton Ungleichheiten in der Länge (jährliche Ungleichheit, Evektion), in den Propositionen XXVI bis XXXI des dritten Buches die Variation, die Bewegung der Knotenlinie sowie die Änderung der Neigung der Mondbahn, wobei er hier mit der Bestimmung der auf den Mond wirkenden Kräfte (im Ruhesystem der Erde) begann.[100] In den nachfolgenden Propositionen bestimmte er die Bewegung des Mondes als eine kreis- und als eine nicht-kreisförmige Bahn. Die Einzelheiten dieser Bestimmungen, deren Resultate in die *Principia* einflossen, können nicht alle aus diesen, sondern nur aus den Portsmouth-Manuskripten rekonstruiert werden. Die Bahnkurve wird hier zwar nicht exzentrisch, aber dennoch elliptisch mit der Erde im Zentrum angenommen. Diese Ellipse dreht sich mit der Bewegung der Sonne, wie aus Newtons Ausführungen hervorgeht. Mit diesen Resultaten bestimmte er sodann die halbmonatliche Ungleichheit in der Länge der Mondbewegung, die sogenannte "Variation". Mit dieser Annahme einer mit der Sonnenbewegung mitrotierenden Horrocksschen Ellipse ("Horrocks' wheel") gelang es ihm zwar, den numerischen Wert der Variation sehr genau zu bestimmen, das gelöste Problem entspricht aber keineswegs den wirklichen Verhältnis-

98 [Wilson 2001], pp. 141–144.
99 [E 138a], pp. 43–44.
100 Cf. [Wilson 1989], pp. 263–266.

sen.[101] Er musste eingestehen, dass seine Behandlung des Problems nicht der Wirklichkeit entspricht.[102] Anschliessend bestimmte NEWTON die Bewegung der Knotenlinie der Mondbahn in vier Problemen.[103] In der dritten Ausgabe der *Principia* liess er seinen eigenen Ausführungen JOHN MACHINs Traktat [Machin 1729] "Über die Bewegung der Knoten des Erdmondes" folgen. NEWTON schliesst seine Ausführungen zur Mondtheorie in den *Principia* mit der Lösung zweier Probleme, in denen er die Änderung der Neigung der Mondbahn bestimmt.[104] Die erzielten numerischen Werte für die Bewegung der Knoten und für die Änderung der Bahnneigung folgen aus einem ähnlichen Verfahren wie bei der Bestimmung der Evektion aus der von JEREMIAH HORROCKS verwendeten Konstruktion.[105] Diese Resultate konnte EULER 1744 in seinen frühesten eigenständigen Abhandlungen [E 138a] und [E 138], §§19–20 und §26, zur Mondtheorie mit Hilfe einer analytischen Herleitung aus den "mechanischen Prinzipien" bestätigen und fand sie mit den aus den Tafeln [Leadbetter 1742] von LEADBETTER folgenden Werten in guter Übereinstimmung. Er weist in den einleitenden Paragraphen zu dieser Abhandlung [E 138], §§3–5, nochmals auf die grossen Schwierigkeiten hin, die mit der exakten Beschreibung der Mondbewegung einhergehen, erwähnt die Unzulänglichkeit der NEWTONschen Mondtheorie und betont die Notwendigkeit, alle im Ruhesystem der Erde auf den Mond wirkenden Kräfte zu bestimmen und durch das Prinzip des Kräftetransfers zu berücksichtigen.

Das sowohl für die Gravitationstheorie NEWTONscher Prägung als auch für die weitere Entwicklung der Himmelsmechanik in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts folgenschwerste Problem betraf die Herleitung der Bewegung der Apsidenlinie der Mondbahn aus dem $1/r^2$-Gesetz. Dies ist NEWTON weder in seinen Portsmouth-Manuskripten[106] noch in den drei Ausgaben der *Principia*[107] gelungen. Sein Programm ist in erster Linie an diesem Prüfstein gescheitert.[108] Es führte ihn soweit, andere als gravitative Kräfte als mögliche Erklärung heranzuziehen.[109] Es ist in der Tat bemerkenswert, dass NEWTON im dritten Buch seiner *Principia* mit keinem Wort auf das Problem der Apsidendrehung der Mondbahn eingeht. Die einzigen Stellen, in denen dieses angesprochen wird, sind das Kapitel IX sowie die Korollarien 7 bis 9 zu Proposition 66 von Kapitel XI des ersten Buches. Einen Grund dafür liefert das noch in der ersten Ausgabe vorhandene Scholion zur Proposition XXXV des dritten Buches, das in den folgenden Ausga-

101 [Wilson 2001], p. 154.
102 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XXVI, p. 438.
103 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XXX, Prob. X, p. 443; Prop. XXXI, Prob. XI, p. 448; Prop. XXXII, Prob. XII, p. 452; Prop. XXXIII, Prob. XIII, p. 455.
104 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XXXIV, Prob. XIV, p. 457; Prop. XXXV, Prob. XV, p. 460.
105 [Wilson 1989], p. 266.
106 [Wilson 2001], pp. 155–172.
107 [Chandler 1977].
108 [Wilson 1989], p. 267.
109 [Smith 1999c], p. 262.

ben gestrichen und neu formuliert wurde.[110] Für NEWTON hatte die Bewegung der Apsidenlinie der Mondbahn eine besondere Bedeutung. In seinen *Principia* stellte er zwei Argumente auf, die als "Beweis" für die Richtigkeit des Gravitationsgesetzes dienen sollten. Das erste gründet auf dem dritten Keplerschen Gesetz, dessen Evidenz er durch Beobachtungen, z.B. der Bewegung der Jupitermonde, als gesichert erachtete. Der "Beweis" des sechsten Korollars zu Proposition IV des ersten Buches gelang ihm aber nur unter der Annahme von konzentrischen Kreisbahnen.[111] Aus diesem Grund entwickelte er ein zweites Argument: Die ganze Proposition XLV mit allen Korollarien des ersten Buches dient einzig dem Zweck zu zeigen, dass schon eine geringe Abweichung der Zentripetalkraft vom $1/r^2$-Gesetz eine Drehung der Apsidenlinie verursacht. Gemäss seiner Annahme in Proposition XIV des dritten Buches befinden sich die Aphele der Umlaufbahnen in Ruhe, und schon die geringste Abweichung vom zweifachen Verhältnis müsse nach Korol. 1 Prop. XLV Buch I bei jedem einzelnen Umlauf eine merkliche Bewegung der Apsiden bewirken, bei mehreren eine ganz beträchtliche.[112] Dieses Argument verwendete NEWTON aber auch im Falle der Mondbewegung: Die Richtigkeit des $1/r^2$-Gesetzes gehe daraus hervor, dass sich die Apsidenlinie der Mondbahn nur sehr langsam vorwärts bewege. Solch eine geringe Bewegung impliziere eine kleine Abweichung von diesem Gesetz, die völlig der Wirkung der Sonne zuzuschreiben sei.[113] Genau an diesem Punkt kamen aber die Schwierigkeiten. In der dritten Ausgabe musste er zugestehen, dass die Apside des Erdmondes ungefähr doppelt so schnell sei.[114] Diese Beobachtung folgte vermeintlich aber nicht aus der alleinigen Wirkung der Sonne, wie er aus Proposition XXV des dritten Buches herzuleiten erhoffte.[115] Genau dies ist der Grund, weshalb im dritten Buch nichts über die Apsidendrehung der Mondbahn steht.[116]

Dennoch scheint vor allem das Kapitel IX (Über die Bewegung von Körpern auf sich bewegenden Umlaufbahnen und über die Bewegung der Apsiden) des ersten Buches der *Principia* einen gewissen Einfluss auf EULER ausgeübt zu haben, namentlich die Propositionen XLIII und XLIV.[117] Im Korollar 2 zu Proposition XLIV zeigt NEWTON, dass eine Zusatzkraft, welche die für die stationäre Bahn bestimmende Zentripetalkraft um den Faktor $\frac{1}{357.45}$ reduziert, eine Vorwärtsbewegung der Apsidenlinie der Mondbahn um $1°31'28''$ pro Umlauf bewirkt, was

110 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XXXV, Schol. p. 462–463; [Newton 1999], p. 448, Anm. 550.
111 [Waff 1976a], pp. 3–4.
112 [Newton 1687], Lib. III, p. 405; [Newton 1999], p. 387.
113 [Waff 1976a], pp. 4–5.
114 [Newton 1726], Lib. I, Prop. XLV, p. 141; [Newton 1999], p. 167.
115 [Waff 1976a], pp. [iii]–[iv].
116 [Smith 1999c], p. 257.
117 [Newton 1687], Lib. I, Sect. IX, Prop. XLIII, Prob. XXX, p. 132; Prop. XLIV, Prob. XIV, p. 133; Prop. XLIV, Corol. 2, p. 135; [Newton 1999], pp. 156–159; [Waff 1976a], Chap. I, pp. 11–49; [Smith 1999c]; [Wilson 2001], pp. 161–163.

etwa der Hälfte der beobachteten Apsidendrehung entspricht.[118] Obwohl sich dieser Faktor rekonstruieren lässt, bleiben seine Ausführungen aber undurchsichtig und werden durch seine in der zweiten Ausgabe vorgenommenen Zusätze nicht klarer – im Gegenteil:[119] Damit er die Folgerungen des Zusatzterms bewältigen konnte, musste er die Annahme treffen, dass die gesuchten Apsidenbewegungen für Bahnen gelten, die Kreisen äusserst nahe kommen.[120]

Fazit: Das ungelöste Apsidenproblem sowie die unklaren Äusserungen NEWTONs mögen einen erheblichen Anteil zu der in den 1740er Jahren aufkommenden Skepsis der Gravitationstheorie gegenüber – vor allem bei CLAIRAUT – beigetragen haben.[121] EULER versuchte zuerst, ähnlich wie NEWTON, eine Lösung des Apsidenproblems im Rahmen des Zweikörperproblems mit Hilfe eines Zusatzterms im Gravitationsgesetz herbeizuführen.[122] Als es ihm Mitte der 1740er Jahre in [Ms 281] sowie [E 138] zwar gelang, die Bewegungsgleichungen aus den mechanischen Prinzipien im Rahmen des Dreikörperproblems zu formulieren, aber als Lösung er in [E 112], §11, um 1747 (etwa gleichzeitig mit CLAIRAUT) ebenfalls nur den halben Wert der beobachteten Apsidendrehung erhielt, stellte man die Gültigkeit des Gravitationsgesetzes wiederum in Frage, trotz der empirischen Bestätigung der an den Polen abgeplatteten Erdfigur. Die Lösung des Apsidenproblems fand schliesslich CLAIRAUT in [Clairaut 1752a] von 1749: Es stellte sich nämlich heraus, dass bei der Integration der Bewegungsgleichungen gewisse Terme nicht vernachlässigt werden dürfen.[123] Der "Beweis" für die Richtigkeit des $1/r^2$-Gesetzes war damit aber noch längst nicht erbracht, denn auch das Problem der Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn war zu dieser Zeit noch ungelöst. Dennoch konnten EULER, CLAIRAUT und D'ALEMBERT ihre gleichzeitig entwickelten Mondtheorien[124] nun auf einer gesicherteren Grundlage aufbauen. Insbesondere versuchte EULER in seiner "ersten" Mondtheorie [E 187] diesen Beweis zu liefern.[125] Ein wichtiger Aspekt bei seiner Entwicklung einer Mondtheorie bildete – wie bereits bei der NEWTONschen Mondtheorie von 1702 – die Konstruktion von Mondtafeln, die parallel dazu erfolgte. Bislang kannte man nur drei Mondtafeln, die EULER 1745, 1746 und 1772 publiziert hatte, nämlich [E 76], [E 87] und [E 418A], wobei lange Zeit irrtümlich angenommen wurde, dass die ersten beiden identisch seien. Dies ist aber nicht der Fall, wie ein direkter Vergleich dieser Tafeln ergibt. Im umfangreichen wissenschaftlichen Brief-

118 [Westfall 1973].
119 [Smith 1999c], pp. 258–261; [Aoki 1992].
120 [Newton 1687], Lib. I, Sect. IX, Prop. XLV, Prob. XXXI, p. 137; [Newton 1999], p. 162; [Waff 1976a], p. 14–15.
121 [Chandler 1975].
122 [Ms 273], fol. 3v, sowie [E 15], Cap. V.
123 [Waff 1976a], [Waff 1976b], [Waff 1995a], [Wilson 2001], pp. 173–175; [Linton 2004], pp. 298–304.
124 [Clairaut 1752b]; [E 187]; [d'Alembert 2002].
125 [Wilson 2001], p. 176.

wechsel EULERs sowie in zeitgenössischen Publikationen des 18. Jahrhunderts gibt es zudem Hinweise, dass EULER zwischen 1742 und 1750 anonym weitere Mondtafeln publizierte. Es ist in [Verdun 2011] gelungen, die Autorschaft EULERs von mindestens fünf Mondtafeln im Umfang von insgesamt etwa 100 Druckseiten nachzuweisen, die weder im Verzeichnis seiner Werke [Eneström 1910/13] erfasst noch in den *Opera omnia* erschienen sind. Da EULERs "erste" Mondtheorie [E 187] erst 1753 erschien, stellt sich sofort die Frage, auf welcher theoretischen Grundlage die vor diesem Jahr erschienenen Mondtafeln beruhen? Ein unpubliziertes Manuskriptfragment EULERs, nämlich [Ms 281], das höchstwahrscheinlich zwischen 1743 und 1745 verfasst wurde, konnte als seine "embryonale" Sonnen- und Mondtheorie identifiziert werden.[126] Vermutlich war EULER damals aber noch nicht in der Lage, die Bewegungsgleichungen auf befriedigende Weise oder nur sehr näherungsweise zu lösen. Als er 1744 im Brief [R 514] an DELISLE von einem Durchbruch in der Mondtheorie sprach, bezog sich dies vermutlich auf das Aufstellen der Bewegungsgleichungen und nicht auf deren Integration. Eine effizientere Lösungsmethode entwickelte EULER erst ab 1747 im Zusammenhang mit seinen Arbeiten [E 120] und [E 384] sowie [Ms 256] zum Problem der Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn. Die zahlreichen noch erhaltenen unveröffentlichten Manuskripte und Manuskriptfragmente sowie die zahlreichen Publikationen EULERs aus den 1740er Jahren behandeln vorwiegend Methoden, mit denen aus Beobachtungen von Mondpositionen und Finsternissen die Mondtafeln verbessert werden können. Diese Tatsache spricht dafür, dass die aus der Mondtheorie resultierenden Störterme durch die notwendig erfolgten groben Näherungen bei der Integration der Bewegungsgleichungen noch zu ungenau waren. Erst TOBIAS MAYER hat in der Folge von EULERs Preisschrift [E 120] für 1748 ein Verfahren entwickelt (die sogenannte "Spreadsheet method"), mit dem die Koeffizienten der einzelnen Störterme aus Finsternis-Beobachtungen korrigiert werden konnten.[127] Ein anderer wichtiger Grund, der für die Verzögerung der Publikation von EULERs "erster" Mondtheorie verantwortlich war, betrifft die durch das Apsidenproblem verursachte Unsicherheit ob der Gültigkeit des Gravitationsgesetzes.

Grosse Ungleichheit

Das Problem der Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn hat eine lange Geschichte, die bereits eingehend untersucht wurde.[128] KEPLER erkannte, dass sich die Konstellationen von Jupiter und Saturn bezüglich des Tierkreises nach ungefähr 900 Jahren wiederholen.[129] Aus Beobachtungen von TYCHO BRAHE wusste er, dass es von einer zur nächsten Konjunktion von

126 [Verdun 2013a], [Verdun 2013b], [Verdun 2020].
127 [Wepster 2010].
128 [Wilson 1980], [Wilson 1985], [Wilson 1995a], siehe auch [Gautier 1817], pp. 129–138; [Lovett 1895]; [Smith 1999a].
129 [Kepler 1596], pp. 8–9.

Jupiter und Saturn 19,86 Jahre dauert. Jeweils in 59,58 Jahren bilden drei aufeinanderfolgende Konjunktionen ein fast geschlossenes gleichseitiges Dreieck, wobei sich die Position der vierten Konjunktion gegenüber der ersten jeweils um 8,1° verschiebt.[130] Nach ungefähr 120° findet somit an ein- und derselben Stelle im Tierkreis wieder eine Konjunktion statt, so dass sich nach 43 Konjunktionen oder etwa 900 Jahren wieder die gleiche Ausgangslage ergibt. Diese Periode war im 17. Jahrhundert somit weitgehend, wenn auch nur ungefähr, bekannt.[131] Ihr sind aber kurzperiodische Variationen überlagert mit Perioden von 60 und 30 Jahren.[132] Deshalb ergab sich das Problem, dass die beobachteten Positionen bzw. ekliptikalen Längen von Jupiter und Saturn nicht mit ihren Keplerschen Bewegungen übereinstimmten.[133] Insbesondere war die Amplitude der langperiodischen Störung – die Grosse Ungleichheit – unbekannt.

Das Problem der Bewegungen von Jupiter und Saturn diskutierte Newton im dritten Buch seiner *Principia* im Anschluss an Proposition XIII, Theorem XIII, allerdings ohne Verweis auf Kepler.[134] In der dritten Ausgabe versucht er, die gegenseitigen gravitativen Einwirkungen von Jupiter und Saturn qualitativ abzuschätzen und findet, dass die Störung der Umlaufbahn des Jupiter bei weitem kleiner sei als die Störung der Umlaufbahn des Saturn.[135] Er erhoffte sich überdies natürlich, aus den Bewegungen dieser beiden Planeten einen gewichtigen Beweis für ihre gegenseitige Anziehung und somit Evidenz für die "universelle" Gültigkeit seiner Gravitationstheorie zu finden. Im dritten Buch, Proposition V, Korollarium 3, der zweiten Ausgabe seiner *Principia* hält er fest, dass alle Planeten nach Korol. 1 und 2 gegenseitig zueinander hin schwer seien, weshalb der Jupiter und der Saturn ihre jeweiligen Bewegungen dadurch merklich stören, indem sie sich in der Nähe ihrer Konjunktion gegenseitig anziehen. Am 30. Dezember 1684 fragte Newton bei Flamsteed nach, ob es Beobachtungen gäbe, welche auf eine irreguläre Bewegung des Saturn hinweisen. Dieser bestätigte am 5. Januar 1685, dass die Beobachtungen tatsächlich eine Abweichung von den Keplerbewegungen zeigen, zweifelte aber, ob diese Irregularitäten in der Bewegung von Saturn durch die gravitative Wirkung von Jupiter verursacht würden. Newton konnte somit beim Verfassen der ersten Ausgabe seiner *Principia* noch keine empirische Evidenz für seine Gravitationstheorie vorbringen. In der zweiten Ausgabe von 1713 jedoch schien er von einer gravitativen Ursache der Störungen in der Bewegung des Saturn überzeugt gewesen zu sein, wie ein Vergleich der entsprechenden Textstellen der beiden Ausgaben zeigt. Doch womit begründete er seine Vermutung? Im Mai 1694 berichtete Gregory, dass Newton aus der letzten Konjunktion zwischen Jupiter und Saturn auf ihre gegenseitige Wechselwirkung geschlossen habe. New-

130 [Kepler 1596]; [Kepler 1923], p. 23.
131 [Flamsteed 1683], p. 254.
132 [Smith 1999a], p. 212.
133 [Horrocks 1673], pp. 289–290.
134 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XIII, Theor. XIII, p. 419.
135 [Newton 1726], Lib. III, pp. 409–410; [Newton 1999], p. 403.

TON beabsichtigte darauf hin, die Bahn von Saturn aufgrund der Störungen von Jupiter zu berechnen, wie er FLAMSTEED in einem Brief vom 20. Dezember 1694 versprach. Doch dieser wartete vergebens; er notierte am Rand dieses Briefes "was never sent". NEWTON versuchte offenbar vergeblich, die Bewegungen (Positionen zu jedem beliebigen Zeitpunkt) von Jupiter und Saturn, die sich aufgrund ihrer Anziehung gegenseitig stören, aus dem Gravitationsgesetz herzuleiten. Was ihn jedoch zu seiner Überzeugung für die gravitative Wechselwirkung zwischen Jupiter und Saturn führte, bleibt bisher unbekannt.[136]

NEWTONs Scheitern auch in dieser Frage verwundert nicht, denn dieses Problem ist noch weit schwieriger als jenes beim Mond. Die Mondtheorie kann als sogenanntes "eingeschränktes Dreikörperproblem" behandelt werden, da sich die Abstände zwischen störendem (Sonne) und gestörtem (Mond) Himmelskörper nur um 0,002570 Astronomische Einheiten und die maximale heliozentrische Elongation (maximaler Zentriwinkel bezüglich der Sonne) des Mondes nur um 0,14725° ändern. Zudem ist die Masse des Mondes gegenüber der Erde und der Sonne vernachlässigbar. Bei den Bewegungen von Jupiter und Saturn liegt eine völlig andere Situation vor. Einerseits sind die Massen dieser beiden Planeten fast gleich gross. Andererseits beträgt die minimale Entfernung zwischen diesen beiden Körpern 3,811350, die maximale 15,298469 Astronomische Einheiten, und ihre heliozentrische Elongation 180°. Beim Problem der Grossen Ungleichheit handelt es sich also um ein klassisches ("uneingeschränktes") Dreikörperproblem. Entscheidend zudem ist die Geometrie und gegenseitige Lage ihrer Bahnen.[137] Schon allein die Bestimmung der Abweichungen von ihren Keplerbahnen bereitete erhebliche Schwierigkeiten. Das Problem blieb daher unbearbeitet und ungelöst liegen, bis die Pariser Akademie das Thema in drei Preisfragen für 1748, 1750 und 1752 aufgriff, was zeigt, welch grosse Bedeutung – nicht zuletzt auch im Zusammenhang mit der Verifizierung des Gravitationsgesetzes – der Lösung dieses Problems beigemessen wurde.[138] EULER kannte das Problem der Grossen Ungleichheit durch sein Studium von NEWTONs *Principia*. Eintragungen in seinem zweiten Notizbuch [Ms 398], das er um 1727 verfasste, belegen dies eindeutig. Später widmete er diesem Problem die Preisschriften [E 120] und [E 384] sowie die Abhandlung [E 538].[139] Obwohl auch er dieses Problem nicht lösen konnte, entstanden durch seine Behandlung wichtige Methoden, die sich auf die weitere Entwicklung der Störungstheorie nachhaltig auswirkten.[140] Das Problem der Grossen Ungleichheit wurde erst durch die Arbeiten von LAPLACE gelöst, insbesondere in [Laplace 1787].

136 [Cohen et al. 1999], pp. 206–210.
137 [Smith 1999a], p. 211. Siehe auch Fig. 1 in [Wilson 1985], p. 29.
138 [Smith 1999a], p. 212–214.
139 Diese Abhandlung wurde in [Wilson 1985] nicht berücksichtigt.
140 [Ms 256] als Vorarbeit zu [E 384].

Rotation der Erde

Die historische Entwicklung der Erforschung der Erdrotation beinhaltete seit der Antike zwei voneinander getrennte Aspekte: 1. die Rotationsbewegung der Erde um ihre Achse sowie 2. die Bewegung der Erdachse bezüglich eines erd- und/oder raumfesten Bezugssystems. Zum ersten Punkt gehörte zuerst die Feststellung, dass sich die Erde selbst als Himmelskörper um ihre Achse dreht, später dann die Vermutung, dass die Drehgeschwindigkeit nicht unbedingt konstant sein muss. Der zweite Punkt umfasst die quasi-säkularen und kurzperiodischen Änderungen der Lage der Rotationsachse, und zwar einerseits bezüglich eines raumfesten (inertialen) und andererseits bezüglich eines erdfesten Koordinatensystems. Zur Bewegung im inertialen Raum zählen die Phänomene der sogenannten "Präzession" als quasi-säkulare Bewegung, deren Effekt seit der Antike bekannt ist, sowie der sogenannten "Nutation" als kurzperiodische Bewegung, die erst im 18. Jahrhundert entdeckt wurde. Erste geometrisch-kinematische Theorien der Präzession wurden durch Kopernikus, Tycho de Brahe und Christian Severin (Longomontanus) im 16. Jahrhundert und zu Beginn des 17. Jahrhunderts entworfen. Die Änderung der Lage der Rotationsachse bezüglich des Erdkörpers äussert sich in zwei unterschiedlichen Bewegungen: der kurzperiodischen "Polschwankung" einerseits und der säkularen "Polwanderung" andererseits.[141] Diese beiden Bewegungen sowie die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit wurden bereits im 17. Jahrhundert vermutet. In einer Reihe von Lesungen, die Robert Hooke in der Royal Society hielt und die am 15. September 1668 endeten, äusserte dieser seine Vermutungen über die Änderung der Rotationsachse der Erde bezüglich des Erdkörpers, über die Präzession der Äquinoktien sowie über eine mögliche säkulare Änderung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde.[142] In seiner Lesung vom 19. Januar 1687 stellte er Fragen zu einer möglichen Polwanderung sowie zu deren möglichen Ursache. Die Phänomene der täglichen Rotation, der Präzession sowie der vermuteten Polwanderung erklärte er in der nächsten Lesung vom 26. Januar 1687 eingehender. Insbesondere beschrieb er seine aus den Fossilfunden in England abgeleitete Hypothese der Polwanderung und der Polschwankung. In der Folge begründete er die "Variation of the Axis of Rotation" einerseits durch Analogie mit der vermuteten Änderung des Magnetpoles der Erde, andererseits durch geophysikalische Änderungen auf und innerhalb des Erdkörpers. Evidenz für seine vermutete Polwanderung suchte Hooke in antiken Beobachtungen, insbesondere in antiken Bestimmungen der Breiten und deren seither durch die Polbewegung verursachten Änderungen, sowie im Vergleich der überlieferten und heutigen Breite und Länge der grossen Pyramide.

141 Es ist hier zwischen der hypothetischen sogenannten "Polwanderung" (polar wandering) und der damals ebenfalls noch unbekannten "Polschwankung" (polar wobble, polar motion) zu unterscheiden. Letztere wurde theoretisch durch Euler vorhergesagt und erst im 19. Jahrhundert empirisch nachgewiesen, cf. [Verdun/Beutler 2000].

142 [Waller 1705], p. 322; [Drake 1996], p. 210.

Schliesslich wies er in diesem Zusammenhang auf die Notwendigkeit und Bedeutung genauer und langjähriger Breitenbestimmungen hin, aus denen eine mögliche Polbewegung abgeleitet werden könnte. In der Lesung vom 9. Februar 1687 kam Hooke erneut auf seine Hypothese der Polwanderung zurück und versuchte, Beweise dafür zu erbringen.[143] Es ist bemerkenswert, dass Hooke hier klar erkannte, dass die vermeintliche Polwanderung in einer Zeitskala abläuft, die im Vergleich zur Menschheitsgeschichte viel grösser und eine Polbewegung daher sehr schwierig nachzuweisen ist.[144] Er hoffte jedoch, dass dies durch sehr genaue Messungen, z.B. von Breitenvariationen, in Zukunft dennoch möglich sein werde. In der Tat hat sich die Theorie der Polwanderung durch paläontologische Methoden bis heute gehalten.[145] Die Polschwankung konnte erst im Laufe des 19. Jahrhunderts sukzessive empirisch nachgewiesen werden.[146] Robert Hookes Hypothesen über die Verlangsamung der Erdrotation und die Verschiebung der Rotationsachse gegenüber dem Erdkörper sind heute bestätigt.[147] Insbesondere antizipierte er die Vermutung der Plattentektonik, deren Entdeckung gewöhnlich Alfred Wegener zugeschrieben wird.[148]

Am 19. Oktober 1692 präsentierte Halley der Royal Society einen Aufsatz, in dem er gerechnete Orte und Zeitpunkte antiker Sonnenfinsternisse mit Aufzeichnungen tatsächlich beobachteter Finsternisse, vor allem von Ptolemäus, verglich und durch die festgestellte Diskrepanz eine Änderung der mittleren Bewegung des Mondes aufgrund des Ätherwiderstandes vermutete.[149] Diese Vermutung äusserte er zwei Jahre später in einem Artikel, in dem er auf eine mögliche Breitenvariation durch Vergleich antiker und neuer Ortsbestimmungen zu schliessen versuchte.[150] Die Erklärung der vermeintlichen, sogenannten "säkularen Beschleunigung des Mondes" – noch im 19. Jahrhundert heftig diskutiert[151] – konnte erst im 20. Jahrhundert durch die Variation der Rotationsgeschwindigkeit der Erde erklärt und ebenfalls mit Hilfe antiker Sonnenfinsternisse nachgewiesen werden.[152] Eine solche Erklärung wurde im 18. Jahrhundert in diesem Zusammenhang nie ernsthaft in Betracht gezogen, trotz den Spekulationen von Hooke, dessen Ideen von Richard Dunthorne um die Mitte des 18. Jahrhunderts in [Dunthorne 1749] wieder aufgenommen wurden, und – etwa um die gleiche Zeit – trotz den Vermutungen von Paolo Frisi, Walmesley und Lalande sowie

143 [Waller 1705], pp. 346–357; [Drake 1996], p. 246–260.
144 Es sei daran erinnert, dass zu Hookes Zeiten das "biblische" Weltalter von ca. 6000 Jahren noch allgemein anerkannt war.
145 [Goldreich et al. 1969]; [Munk et al. 1975], Chap. 12; [Lambeck 1980], Chap. 11.
146 [Munk et al. 1975], Chap. 7, 10; [Lambeck 1980], Chap. 5, 8; [Verdun/Beutler 2000].
147 [Waller 1705], [Drake 1996], Chap. 5, pp. 87–95; [Lambeck 1980]; [Munk et al. 1975]; [Stephenson et al. 1984], [Stephenson et al. 1995], [Stephenson 1997]; [Brosche et al. 1990].
148 [Drake 1996], p. 95.
149 [Halley 1693], [Steele 2010].
150 [Halley 1695], pp. 174–175.
151 [Weiler 1877].
152 [Newton 1970], [Newton 1972], [Newton 1979], [Newton 1984]; [Stephenson 1997], pp. 8–10.

der Entdeckung von Halley. Noch bis ins 20. Jahrhundert wurde die Rotationsgeschwindigkeit der Erde als konstant angenommen, bis diese Annahme durch Atomuhren definitiv widerlegt werden konnte.[153]

Auch Euler ging in seinen Arbeiten zur Rotation der Erde stets von der Konstanz ihrer Rotationsgeschwindigkeit aus. An einem Einfluss des Äthers auf die mittlere Bewegung der Planeten und des Mondes durch den Ätherwiderstand hingegen hielt er lange Zeit fest. Newton formulierte seine Ansichten zur Starrkörperrotation und zur Präzession erstmals im Manuskript *De Motu*, in dem er dem Prinzip der translatorischen Trägheitsbewegung ein analoges Prinzip der “rotatorischen” Trägheitsbewegung hinzufügen wollte.[154] Diese Idee liess er aber in seinem Hauptwerk wieder fallen. Im dritten Buch seiner *Principia* betrachtet Newton die Rotation der Erde als gleichförmig und versucht, die Präzession der Äquinoktien aus dem Gravitationsgesetz herzuleiten.[155] Obwohl es ihm scheinbar gelang, anknüpfend an die Resultate aus Proposition 66 des ersten Buches, die Präzession qualitativ und quantitativ aus dem Gravitationsgesetz herzuleiten, überwiegen zu viele Mängel in den Details.[156] Diese sind den Spezialisten ihres Faches wie d'Alembert, Clairaut und Euler natürlich nicht entgangen. James Bradleys offizielle Bekanntgabe seiner Entdeckung der Nutation im Jahre 1748 initialisierte eifrige Bemühungen um eine korrekte theoretische Herleitung der Präzession und Nutation aus dem Gravitationsgesetz. Federführend bei dieser Prüfung des Gravitationsgesetzes waren insbesondere d'Alembert und Euler.[157] D'Alembert kritisierte (zu Recht!) Newtons fehlerhafte Herleitung der Präzession aus dem Gravitationsgesetz.[158] Euler beschäftigte sich seit 1748 intensiv mit diesem Problem und versuchte von Anbeginn, in diesem Zusammenhang eine allgemeine Theorie der Starrkörperrotation auszuarbeiten. Der Weg zum Erfolg gelang ihm schrittweise bis zum Durchbruch im Jahre 1758. Fast gleichzeitig, nämlich in der zweiten Hälfte der 1750er Jahre, wurden erste Zweifel an der Konstanz der Tageslänge durch Frisi, Walmesley und Lalande unter Bezug auf geophysikalische Gründe erhoben. Eulers Entwicklung der Theorie der Starrkörperrotation und die Entstehung seiner Beiträge zur Erdrotation aufgrund seiner handschriftlichen Dokumente (unveröffentlichte Manuskripte, Manuskript-Fragmente und Notizbücher) sowie seiner publizierten Werke wurden im Detail rekonstruiert und umfassend nachgezeichnet.[159]

153 [McCarthy/Seidelmann 2009], insbesondere Kap. 4 und 5.
154 [Herivel 1965], p. 86.
155 [Newton 1687], Lib. III, Prop. XVII, Theor. XVI, p. 421; Prop. XXI, Theor. XVIII, p. 426; Prop. XXXIX, Probl. XIX, p. 470; [Wilson 1989], pp. 269–270; [Cohen et al. 1999], pp. 265–268.
156 [Cohen et al. 1999], p. 265.
157 [Wilson 1987a], [Ekman 1993].
158 [Wilson 1987a], Chap. 3, pp. 238–242.; [Wilson 1995b], pp. 48–50.
159 [Verdun 2021].

3. Eulers Leistungen in der Himmelsmechanik: eine Würdigung

Wie eingangs erwähnt, sind Eulers Verdienste auf dem Gebiet der Himmelsmechanik im Wesentlichen als seine Antwort auf die damals aktuellen, in diesem Fachgebiet anstehenden Probleme zu verstehen. Es waren mehrere Faktoren, die ihn zu diesen Höchstleistungen trieben und zu seiner beharrlichen Arbeit an den Grundlagen der Himmelsmechanik motivierten. Als Erstes ist sicher sein Ehrgeiz zu nennen, den Dingen mit analytischen Methoden auf den Grund zu gehen und das "Allgemeine" aus der Vielfalt der Probleme herauszuarbeiten. Das Paradebeispiel dafür sind die "mechanischen Prinzipien" Eulerscher Prägung, die heute als Impuls- und Drehimpulssatz bekannt sind und in den exakten Wissenschaften nicht mehr wegzudenken sind. Während viele seiner Zeitgenossen sich darauf beschränkten, irgendwelche numerischen Resultate aus irgendwelchen theoretischen Überlegungen zu erzeugen, die mit den entsprechenden Beobachtungen möglichst gut übereinstimmten, war Euler stets bestrebt, das allgemeingültige Gesetz hinter den Problemen herauszukristallisieren. Die Elemente seiner Methoden, die aus diesem Problemlösungsprozess resultierten, sollen im Folgenden diskutiert werden. Ein weiterer, die wissenschaftliche Arbeit Eulers fördernder Aspekt war die von der Pariser Akademie der Wissenschaften durch ihre hochdotierten Preise geschaffene Konkurrenzsituation innerhalb der wissenschaftlichen "Elite" dieser Zeit. In Eulers umfangreichen Briefwechseln mit Vertretern eben dieser Elite nehmen Themen zu diesen Preisausschreibungen einen grossen Raum ein. Zwar versuchten die Briefpartner jeweils ihre Fort- und Rückschritte bei der Beantwortung und Bearbeitung der Preisfragen gegenseitig auszutauschen, waren dabei aber sehr darauf bedacht, die Karten nicht völlig offen auf den Tisch zu legen. Prägnante Beispiele, welche diese Situation eindrücklich dokumentieren, findet man z.B. im Briefwechsel Eulers mit Daniel Bernoulli, Clairaut und d'Alembert. Die Bedeutung dieser Preisaufgaben und der Impulse, die sie der wissenschaftlichen Forschung im 18. Jahrhundert verliehen, darf keinesfalls unterschätzt werden. Immerhin erhielten die Gewinner einer Preisaufgabe beachtliche Beträge, die ein Mehrfaches eines Jahreseinkommen ausmachen konnten. Wichtiger noch war aber das mit einem Preis gewonnene Ansehen nicht nur in der wissenschaftlichen Gemeinschaft, sondern auch bei politischen Instanzen, die damals als Mäzene den Lebensunterhalt renommierter Wissenschaftler finanzierten. Zudem boten die Preisaufgaben Euler die Möglichkeit, Lösungen unter dem Namen seiner Söhne Johann Albrecht und Karl Johann zu präsentieren und damit deren wissenschaftliches Ansehen zu erhöhen. Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass Euler als Leiter der Kalenderabteilung der Berliner Akademie unter einem gewissen Druck stand, die Qualität der in den Kalendern angegebenen astronomischen Daten deutlich zu verbessern, denn diese Kalender bildeten eine wichtige Einnahmequelle und förderten das Ansehen der Akademie.

3.1. Elemente der Lösungsmethoden

Im Laufe der wissenschaftlichen Arbeiten entwickelte und verwendete EULER astronomische, physikalische und mathematische Elemente, die zum Teil zeitlich und thematisch unabhängig voneinander entstanden oder durch ihn eingeführt wurden, die sich aber sukzessive zu tragenden Bausteinen herausbildeten, aus denen er Lösungsmethoden zusammensetzte, die sich in der Folge bei ihm zu Standardverfahren etablierten. Im Bereich der Astronomie waren es die "Keplerschen Bahnelemente" und deren Beziehung zueinander, die zuerst bei der Lösung von Aufgaben im Rahmen des Zweikörperproblems, später dann beim Dreikörperproblem eine dominante Rolle erhielten, als EULER ihre zeitlichen Änderungen aufgrund der Störwirkungen untersuchte. Auf dem Gebiet der Physik, insbesondere der Mechanik, entwickelten sich bei ihm die "mechanischen Prinzipien" – der Impuls- und Drehimpulssatz – zu zentralen Ansätzen, aus denen er die Bewegungsgleichungen herleiten konnte und die es überhaupt erst ermöglichten, eine Störungstheorie im eigentlichen Sinne zu entwickeln. Um diese gekoppelten Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung integrieren zu können, entwickelte EULER verschiedene mathematische Methoden, mit denen zumindest näherungsweise Lösungen herbeigeführt werden konnten.

Astronomische Entitäten

Seit KEPLERs Zeiten haben sich zur Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper im Rahmen des Zweikörperproblems sukzessive gewisse Parameter etabliert, welche die Form der Bahnellipse und ihre Lage im inertialen Raum charakterisieren und die heute als "Bahnelemente" bezeichnet werden. Die Form der Ellipse wird durch die grosse Halbachse und die (numerische) Exzentrizität, ihre Lage im Raum durch die Bahnneigung, die Knotenlänge und die Perihellänge parametrisiert. Die Periheldurchgangszeit legt fest, zu welchem Zeitpunkt sich der Himmelskörper im Perihel befindet. Es würde eine eigene, umfangreiche Studie erfordern, um deren Entwicklungsprozess genau nachzeichnen zu können. Sicher hat EULER massgebend zur Etablierung dieser Elemente beigetragen. Er publizierte diese erstmals vollständig als Parametersatz in der Abhandlung [E 131], die er 1740 der Petersburger Akademie präsentierte. Insbesondere hat er nicht nur deren mathematische Beziehungen zueinander formalisiert, sondern vermutlich als einer der Ersten erkannt, dass sich alle diese Bahnelemente aufgrund der gegenseitigen Störungen der Himmelskörper stetig verändern. Diese Einsicht kommt bereits in seiner "ersten" Mechanik, die er um 1734 fertiggestellt hatte, mit der Definition der "oskulierenden" Bahnellipse deutlich zum Ausdruck: "Die auf diese Weise bestimmte Ellipse kann mit Recht eine, die Curve osculirende genannt werden, ähnlich wie die osculirenden Kreise, durch welche man die Krümmungen der Linien misst. Die vorliegende Betrachtung ist aber keine rein geometrische, sondern man muss, um diese osculirende Ellipse zu finden, ausser der Natur der Curve, auch die Geschwindigkeit des Körpers und die Centripetalkraft kennen."[160] Damit wollte er klar von einer sich nur drehenden, aber form-invarianten Ellipse (er nennt sie die "bewegliche" oder "mobile" Bahn) unterscheiden, wie sie von Newton und anderen vor Euler schon verwendet wurde: "Diese Lehre von den osculirenden Ellipsen ist nicht mit der Bewegung der Körper in beweglichen Bahnen zu verwechseln, welche Newton und andere nach ihm behandelt haben. Hier bestimmen wir nämlich, zu welcher Ellipse jedes vom Körper beschriebene Element der Curve gehört. Wenn aber von den beweglichen Bahnen die Rede sein wird, werden wir die Centripetalkraft erforschen, welche bewirkt, dass der Körper sich in einer, um den Mittelpunkt der Kräfte sich drehenden, gegebenen Curve bewege."[161] Dies war eine Einsicht von grosser Tragweite, denn sie stand am Anfang einer Entwicklung, die in der Folge zur bedeutenden, von Euler begründeten und von Lagrange ausgebauten Methode der sogenannten "Variation der Bahnelemente" führte.

In den frühen Arbeiten (bis etwa 1742/43) befasste sich Euler ausschliesslich mit dem Zweikörperproblem und der sogenannten "Keplerbewegung". Dabei erwies er sich als Meister der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. So fand er wichtige Beziehungen zwischen der "wahren", der "mittleren" und der "exzentrischen" Anomalie. Die wahre Anomalie ist der heliozentrische Winkel zwischen dem Perihel und dem momentanen Ort des Himmelskörpers in seiner Bahn. Die mittlere Anomalie ist der heliozentrische Winkel zwischen dem Perihel und der momentanen Position eines fiktiven Himmelskörpers, der sich mit der mittleren Geschwindigkeit in der mittleren Entfernung des betrachteten Planeten von der Sonne um diese bewegt. Die exzentrische Anomalie ist der Winkel zwischen diesen beiden Positionen bezüglich des Zentrums der Bahnellipse. Im 18. Jahrhundert war es üblich, diese Anomalien nicht vom Perihel, sondern vom Aphel an zu zählen. Mit Hilfe der mathematischen Eigenschaften der Ellipse fand Euler in [E 37] die "Polargleichung der Ellipse", in [E 105] die "Mittelpunktsgleichung" und die damit verbundene "grösste Gleichung" sowie die nach Kepler benannte "Keplergleichung", die vermutlich erstmals in seinem dritten Notizbuch [Ms 399], fol. 233r, sowie in seiner Publikation [E 37], §§8–9, von 1740, die er am 21. November 1735 der Petersburger Akademie vorlegte, aufgestellt wurde.

Neben den oben erwähnten Arten von Anomalien führte Euler im Zusammenhang mit seiner Preisschrift [E 384] zur Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn in §3 eine weitere, neue Art von Anomalie ein. Bezeichnen x und y die momentanen Entfernungen der beiden Planeten von der Sonne, ω ihren heliozentrischen Zwischenwinkel und p, q ihre mittleren heliozentrischen Längen, definiert er damit die neue Anomalie und beschreibt deren Vorteil: Der ganze Erfolg, den man sich von den folgenden Operationen versprechen könne, hänge fast einzig von der Natur der Variablen ab, die man an Stelle von x und y eingeführt habe. Denn weil man sich bemühen müsse, all die Aus-

160 [E 15], §696, hier zitiert nach [Wolfers 1848], §690, p. 240.
161 [E 15], §701, hier zitiert nach [Wolfers 1848], §695, p. 241.

drücke auf Winkel zurückzuführen, die dafür die Veränderlichkeit am bequemsten ausdrückten, sehe man zunächst, dass die Veränderlichkeit der Distanzen x und y nicht allein vom Winkel ω abhängen würde, sondern auch von den Anomalien des einen und anderen Planeten, wenn ihre Bahnen exzentrisch (d.h. elliptisch) seien. Da aber die Anomalie eines Planeten ein Winkel sei, der von seiner Entfernung zu seinem Aphelium abhänge, habe man drei Sorten von Anomalien, die man in die Rechnung einführen könne: die mittlere Anomalie, die exzentrische und die wahre. Indem man die mittlere Anomalie einführe, hätte man die Annehmlichkeit, dass ihr Differential ein konstantes Verhältnis zu dp hätte, aber das Verhältnis ihres Differentials zu $d\omega$, das man überall im Fortgang der Rechnung haben würde, würde zu kompliziert, was die Rechnung beinahe undurchführbar machen würde. Und wenn man entweder die exzentrische Anomalie oder die wahre einführen wollte, obschon die Ausdrücke für die Distanzen im KEPLERschen Fall einfacher werden, würde der Fehler eines ungeordneten Verhältnisses zwischen ihren Differentialen und $d\omega$ indes die Rechnung noch undurchführbarer machen, und jede Differentiation oder Integration würde äusserst schwierige Operationen erfordern. Nachdem er diese Schwierigkeiten wohl erwogen habe, sei ihm die Idee gekommen, ob man sich nicht eine neue Art von Anomalie vorstellen könne, deren Differential ein konstantes Verhältnis zum Differential $d\omega$ hätte, weil es einleuchtend sei, dass dann alle die Differentiationen und Integrationen ohne irgendwelche Schwierigkeiten ausgeführt werden könnten. Diese Idee schien ihm zunächst von höchster Wichtigkeit zu sein, und er fände nichts, was sich der Einführung einer solchen Anomalie entgegenstellen könne; denn obgleich eine solche Anomalie nicht so leicht zu finden wäre (EULER meint damit die funktionale Abhängigkeit einer solchen Anomalie von der Zeit), weil sie vom Winkel ω abhänge (und dessen Abhängigkeit von der Zeit kann in der Tat sehr kompliziert sein), der noch nicht bekannt sei, sei diese Schwierigkeit dennoch von keiner Wirkung in der analytischen Rechnung, um die es sich hier handle, wenn man für irgendeinen vorgegebenen Zeitpunkt die Positionen von Jupiter und von Saturn bestimmen wolle; und für die astronomische Rechnung werde man nicht fehlen, Mittel zu finden, um sie auf diese neue Art von Anomalie zurecht zu machen. Er werde daher die Buchstaben r und s einführen, um diese Anomalie von Jupiter und von Saturn zu bezeichnen, die er im Folgenden derart bestimmen werde, dass – ihre Differentiale $dr = \kappa\, d\omega$ und $ds = \lambda\, d\omega$ setzend – die Grössen κ und λ Konstanten würden. (Es gilt also: $r = \kappa\omega + \text{const.}$ bzw. $s = \lambda\omega + \text{const.}$, so dass r und s näherungsweise die Winkeldistanzen von Jupiter bzw. Saturn von ihren Aphelien darstellen, cf. [Wilson 1985], p. 132.) Zu diesem Zweck müsse man das Element dp, das kein konstantes Verhältnis zu $d\omega$ habe, aus der Rechnung eliminieren. Diese neuen, von EULER eingeführten Anomalien haben sich in der Folge vermutlich deshalb in der Himmelsmechanik nicht durchgesetzt, weil er sie selbst nur in [E 384] verwendet und daher nicht weiter etabliert hat.

Die Bahnelemente der Planeten und Kometen hat EULER bis etwa in die Mitte der 1750er Jahre auf die als invariabel angenommene Ekliptikebene bezogen.

Mit seiner Preisschrift [E 414] für 1756 erkannte er, dass die Bahnelemente der Erde vor allem durch die Planeten Venus und Jupiter gestört werden. In einer am 24. April 1755 der Berliner Akademie vorgelegten Abhandlung [E 223] untersuchte er deshalb die sogenannte "planetare Präzession", also die Änderung der Ekliptikebene bezüglich einer fiktiven, raumfesten Bezugsebene aufgrund der Störungen der anderen Planeten. Später, in der Arbeit [E 484] von 1775, wählte er die Ekliptikebene zur Epoche 1700 als invariante Bezugsebene. In einer weiteren Abhandlung [E 578] von 1776 bezog EULER die Bahnelemente auf eine mittlere (raumfeste) Ebene, welche durch die oskulierenden Bahnelemente definiert ist. Die durch den Gesamtdrehimpuls des Sonnensystems gegebene Bezugsebene wird heute als "Laplacesche invariante Ebene" bezeichnet.

In einer Reihe von Abhandlungen, beginnend 1747 mit der fundamentalen Arbeit [E 112] zur Störungstheorie, leitete EULER die Bewegungsgleichungen direkt in den Bahnelementen her und untersuchte ihre Änderungen aufgrund der resultierenden Wirkungen der Störkörper. In den §§70 und 71 der Abhandlung [E 578] von 1776 (publiziert 1786) bestimmte er schliesslich die zeitlichen Änderungen (mit $d\theta$ als Zeitelement) der "Bahnelemente" (momentante Entfernung v vom Zentralkörper, Halbparameter f, Exzentrizität g, wahre Anomalie ω, Knotenlänge π) als Funktion der Störkraftkomponenten m und n. Diese Gleichungen stellen nichts Geringeres als eine Form der sogenannten "Gaussschen planetaren Störungsgleichungen" dar, wobei eine davon die Bewegung der Apsidenlinie beschreibt. Dabei stellte er keine Bedingung an die Störkraft, d.h., die Störkraft muss nicht Gradient der skalaren Störungsfunktion und somit nicht konservativ sein.[162] Diese Gaussschen Störungsgleichungen als Funktion der Normal- und Tangentialkräfte M und N sowie der Bahnelemente findet man aber bereits in EULERs Notizbuch [Ms 401], fol. 17r, hergeleitet im Juli 1749. Er kommentiert diese Entdeckung mit der Bemerkung, dass mittels dieser Formeln, in welchen die gestörten Bewegungen der Planeten durch die Kräfte M und N definiert seien, vermutlich eine direkte Methode zur Bestimmung der Bewegung des Mondes etabliert werden könne.

Physikalische Prinzipien

EULER erwähnt in der Vorrede zu seiner "ersten" Mechanik [E 15] zwei Werke, die er besonders intensiv studiert habe, nämlich NEWTONs *Principia* und HERMANNs *Phoronomia*.[163] Insbesondere letzteres habe ihn sehr bereichert. In der Tat findet sich in HERMANNs Werk der Impulssatz erstmals analytisch formuliert in der LEIBNIZschen Notation. Dieses in mathematische Sprache umformulierte Bewegungsgesetz spielte in der Folge für die Entwicklung der Himmelsmechanik, insbesondere der Störungstheorie, eine entscheidende Rolle. Die Bedeutung dieses "mechanischen Prinzips" kommt dadurch zum Ausdruck, dass EULER in [E 15]

162 [Beutler 2005], pp. 216–217, 230.
163 [Newton 1687], [Newton 1713], [Newton 1726], [Hermann 1716].

versuchte, diesen Satz aus den Grundlagen der Statik (Hebelgesetz), der Definition der Geschwindigkeit (bei konstanter Geschwindigkeit) sowie der Erkenntnis Galileis, dass sich bei konstanter Beschleunigung das Inkrement der Geschwindigkeit proportional zum Zeitelement verhält, herzuleiten. Es ist bemerkenswert, dass Newton in diesem Zusammenhang von Euler gar nicht erwähnt wird. Die früheste Herleitung findet sich aber in Eulers Manuskript [Ms 167], das vermutlich bereits um 1730 entstanden ist.[164] Für die weitere Entwicklung war dieses Gesetz in der eindimensionalen Form nicht brauchbar. Die allgemeine Behandlung störungstheoretischer Fragen und Problemstellungen erforderte zwingend eine Erweiterung des Impulssatzes auf drei Dimensionen, da die Bahnebenen der störenden und der gestörten Himmelskörper in der Regel nicht zusammenfallen und die resultierenden Störkräfte in der Regel drei linear unabhängige Komponenten aufweisen. Es ist eines der grossen Verdienste Eulers, diese Verallgemeinerung vollzogen und den nach der Zeit parametrisierten Impulssatz in drei Dimensionen bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems formuliert zu haben. Dieser Schritt erfolgte vermutlich bereits zwischen 1743 und 1744, obwohl Euler die entsprechende Abhandlung [E 112] erst am 8. Juni 1747 der Berliner Akademie vorlegte.

Diese bedeutende Innovation war aber nur aufgrund der impliziten Anwendung eines Prinzips möglich, das heute als “Dekompositions-” oder “Superpositionsprinzip” von Kräften (Beschleunigungen) und Kraftmomenten bekannt ist. Dieses Prinzip geht aus dem “Gesetz des Kräfteparallelogramms” hervor, wie es bereits von Newton und Varignon aufgestellt wurde, wobei sich dieses damals auf nur zwei Dimensionen beschränkte. Die Verallgemeinerung dieses Prinzips auf drei Dimensionen führte erst Euler im Zusammenhang mit der Entstehung seiner *Scientia navalis* und dem darin aufgestellten Schwerpunktsatz[165] um 1738 durch. Insbesondere statuierte er in einem Lemma, dass die Translations- und Rotationsbewegungen eines Starrkörpers unabhängig voneinander betrachtet werden können.[166]

Eulers Aufzeichnungen zur Schiffstheorie beginnen in seinem Notizbuch [Ms 399] auf fol. 66v und entstanden vermutlich zwischen 1736 und 1738, wie seine eigenhändige Datierung auf dem Titelblatt dieses Notizbuches belegt.[167] Darin leitet er den Drehimpulssatz für die Rotationsbewegung eines Systems von Massenpunkten um eine raumfeste Achse in drei Schritten her, wie er es bereits im Manuskript [Ms 167] um 1730 gemacht hat.[168] Das Resultat – der Drehimpulssatz für die Rotation eines Systems von Massenpunkten um eine raumfeste Achse – samt der Herleitung ist publiziert einerseits im ersten Band seiner *Scientia nava-*

164 [Mikhailov 1965], pp. 101–106.
165 [Ms 399], fol. 74v–75r; [E 110], §§121 und 122.
166 [Ms 399], fol. 74v–75r; [E 110], §128.
167 “Adversaria Mathematica scribi incepta ad d. 12 Febr A. 1736”, cf. [Ms 399], fol. 2r.
168 [Mikhailov 1965], pp. 216–221.

lis[169], die EULER bereits 1738 im Wesentlichen fertiggestellt hat,[170] andererseits auch in seiner Preisschrift *Dissertation sur la meilleure construction du cabestan* [E 78], deren lateinisches Original [Ms 245] am 3. Juli 1738 bei der Petersburger Akademie deponiert wurde. Die französische Fassung wurde am 12. April 1741 prämiert[171] und 1745 gedruckt. In §3 dieser Preisschrift [E 78] brachte EULER unmissverständlich zum Ausdruck, dass das bekannte Prinzip (Impulssatz) zur Beschreibung der Starrkörperbewegung unzureichend ist und dass er ein neues und für die gesamte Mechanik sehr weitreichendes Prinzip (Drehimpulssatz) von grosser Bedeutung entdeckt habe. Er spricht in §21 und §23 auch bereits das Problem der Rotation eines Starrkörpers um eine bewegliche Achse an, er sei aber zu diesem Zeitpunkt nur in der Lage, das Problem mit seinem neu entdeckten Prinzip für den Fall zu lösen, bei dem die Rotation um eine feste Achse erfolgt und sich die Zentrifugalkräfte gegenseitig aufheben würden. Das neue Prinzip leitet er (genau wie in [Ms 399]) in §24 bis §26 her und fasst es in §27 in Worten zusammen. Schliesslich weist er in §28 auf die grosse Analogie zwischen Impuls- und Drehimpulssatz und auf deren weitreichende Bedeutung hin. Wie in [Verdun 2021] dargelegt, führte er zwischen November und Dezember 1742 in seinem Notizbuch [Ms 400], fol. 188r, den Begriff "Drehimpuls" (momentum motus rotatorii) ein, ohne diesem jedoch ein eigenes Symbol zuzuweisen. Die im Zusammenhang mit den Untersuchungen zur Bestimmung der Bewegung flexibler Körper erfolgten weiteren Aufzeichnungen EULERs in [Ms 400] belegen, dass sich seit Ende 1743 bei ihm der nach der Zeit parametrisierte Impuls- und Drehimpulssatz in zwei Dimensionen als zentrale Methode fest etabliert hat.[172] Diese Seiten lassen sich mit Hilfe seines Briefwechsels mit GOLDBACH und JOHANN I BERNOULLI sehr genau datieren.[173]

Am 5. Oktober 1744 las EULER in der Berliner Akademie die Abhandlung [E 138] mit dem Titel *Sur le mouvement des noeuds de la lune, et sur la variation de son inclinaison à l'Ecliptique*, von der im ersten Band, pp. 40–44, der Berliner Memoiren für 1745 aber nur eine Zusammenfassung erschien. Sie enthält die Herleitung[174] des nach der Zeit T parametrisierten Impulssatzes $2\,ddX = P\,dT^2$ in einer Dimensionen (X) für die Bewegung des Mondes im Ruhesystem der Erde, der anschliessend in allen drei Dimensionen angewendet wird. Die Bewegungs-

169 [E 110], §165 (Definition des Trägheitsmomentes), §176 (Bestimmung des Trägheitsmomentes für ein Rotationsellipsoid), §166 (Drehimpulssatz) sowie §132 und §163 (Interpretation der "vis gyratoria" als Winkelbeschleunigung).

170 Brief [R 210] von EULER an JOHANN I BERNOULLI vom (31.) 20. Dezember 1738.

171 PV 1741, pp. 107–108.

172 [Ms 400], fol. 225r, 226r–229r, 246r; [E 174].

173 [Ms 400], fol. 203r, mit [R 781] vom 4. Mai 1743; [Ms 400], fol. 221v, mit [R 788] vom 15. Oktober 1743; [Ms 400], fol 243r, mit [R 153] vom 4. Februar 1744.

174 In dieser Herleitung bezieht sich EULER explizit auf "meo tractatu de motu", also auf seine "erste" Mechanik [E 15], §§220–223.

gleichungen im Ruhesystem der Erde lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{2\,ddx}{dT^2} &= -\frac{(E+G)ggx}{Gv^3} - \frac{Fggx}{Gu^3} + \frac{Fggf\cos r}{Gu^3} - \frac{Fgg\cos r}{Gff}\\
\frac{2\,ddy}{dT^2} &= -\frac{(E+G)ggy}{Gv^3} - \frac{Fggy}{Gu^3} + \frac{Fggf\sin r}{Gu^3} - \frac{Fgg\sin r}{Gff}\\
\frac{2\,ddz}{dT^2} &= -\frac{(E+G)ggz}{Gv^3} - \frac{Fggz}{Gu^3}\,,
\end{aligned}$$

wobei x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Mondes bezüglich des inertial ruhenden Erdzentrums, E, F, G die Orte und Massen von Mond, Sonne und Erde, u und f die Entfernungen des Mondes und der Erde von der Sonne, v die Distanz zwischen Erde und Mond, dT das Zeitelement, r die geozentrische Länge der Sonne bezüglich einer raumfesten Richtung und g eine Normierungskonstante bedeuten. Sodann unternimmt EULER einen äussert bemerkenswerten Schritt: Er eliminiert die Terme mit $\frac{(E+G)gg}{Gv^3}$ in den drei Komponentengleichungen. Durch diese Elimination der Kräfte zwischen Erde und Mond wirken nur noch die Kräfte der Sonne auf den Mond, so dass durch diesen Prozess zwangsläufig der Bahndrehimpulssatz resultieren muss:

$$\begin{aligned}
\frac{2\,d\cdot(z\,dx - x\,dz)}{dT^2} &= \frac{Fggv\sin p\cos r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)\\
\frac{2\,d\cdot(z\,dy - y\,dz)}{dT^2} &= \frac{Fggv\sin p\sin r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)\\
\frac{2\,d\cdot(y\,dx - x\,dy)}{dT^2} &= \frac{Fggv\cos p\sin r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)\,,
\end{aligned}$$

wobei auf den linken Seiten die zeitlichen Ableitungen der Komponenten des Drehimpulses und auf den rechten Seiten die resultierenden, auf den Mond wirkenden Drehmoment-Komponenten stehen. Dieser bedeutende Schritt sei hier zum leichteren Verständnis noch einmal in der modernen Vektornotation dargestellt: Die Anwendung des Impulssatzes liefert $\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{K}$, wobei $\boldsymbol{K}$ die auf den Mond und $\boldsymbol{F}$ die zwischen Erde und Mond wirkende resultierende Kraft bezeichnen. EULERs Eliminationsprozess ist gleichbedeutend dem Vektorprodukt $\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$, wodurch $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ wegen der Kollinearität dieser beiden Vektoren verschwindet. Da aber $\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$ auch als $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})$ geschrieben werden kann, liefert die anschliessende Integration die Ableitung des Gesamtdrehimpulses $\dot{\boldsymbol{L}}$ als äquivalent dem äusseren resultierenden Gesamtdrehmoment $\boldsymbol{D}$ und somit den Drehimpulssatz.

EULER wendete den Impulssatz nicht erst in seiner Abhandlung [E 138] in drei Dimensionen erfolgreich an, sondern bereits in seinem unpublizierten Manuskriptfragment [Ms 281], das etwa um die gleiche Zeit, zwischen 1743 und 1745, entstanden ist. Wie schon in [E 138] fällt auf, dass er das Prinzip des Kräftetransfers bei der Bestimmung der Kraft und der Scheinkräfte äusserst sorgfältig anwendet. Dies deutet darauf hin, dass die Entstehung und Anwendung dieses enorm wichtigen Prinzips auf den Impulssatz in diesen beiden Dokumenten überhaupt ihren Ursprung haben. Damit hatte er ein Instrument zur Verfügung, das er als "neue Methode" bezeichnete und mit dem er die Mondtheorie [E 139] sowie das Problem der Grossen Ungleichheit [E 120] angehen konnte. So kann aus der Zusammenfassung [E 138a] vom 5. Oktober 1744, die Euler vermutlich selbst geschrieben hat und in der das Prinzip des Kräftetransfers sehr ausführlich beschrieben wird, gefolgert werden, wie neu und wie bedeutend dieses Verfahren in Kombination mit der Anwendung des Impulssatzes damals sein musste und welches Gewicht er selbst dieser Methode beilegte. Mit dem Impulssatz in drei Dimensionen, dem Prinzip des Kräftetransfers sowie dem Drehimpulssatz um eine feste Achse war er frühestens ab etwa 1743/44 in der Lage, sehr viele Probleme aus der Mechanik und Himmelsmechanik anzugehen und entsprechende Bewegungsgleichungen zu formulieren. Ein wichtiges Problem blieb aber noch für weitere 15 Jahre ungelöst, nämlich die Beschreibung der Rotationsbewegung eines Starrkörpers um eine bezüglich des inertialen Raums bewegliche Achse. Für die Bewältigung dieses Problems benötigte Euler, von den ersten Versuchen bis zur Lösung der Bewegungsgleichungen, insgesamt über 20 Jahre.[175] Vier Innovationen spielten dabei eine zentrale Rolle: die Einführung des Winkelgeschwindigkeitsvektors und des Vektorproduktes als Ausgangspunkt um 1749, die Herleitung der kinematischen Gleichungen im Jahr 1751 sowie die Einführung des Hauptträgheitsachsensystems im Jahr 1758. Diese Elemente ermöglichten ihm 1758/59 die Formulierung und Lösung der heute nach ihm benannten "Eulerschen Bewegungsgleichungen der Starrkörperrotation".

Mathematische Methoden

Während die sphärische Trigonometrie bei der Auswertung und Reduktion astronomischer Beobachtungen im 18. Jahrhundert stets eine bedeutende Rolle spielte, dominierte die analytische Geometrie der Kegelschnitte die Himmelsmechanik, solange diese bis zu Beginn der 1740er Jahre im Rahmen des Zweikörperproblems behandelt wurde. Mit der korrekten analytischen Formulierung von Bewegungsgleichungen als gekoppelte Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung ab Mitte der 1740er Jahre rückten gewisse Methoden der Analysis in den Brennpunkt des Interesses. Es mussten Methoden entwickelt und herangezogen werden, mit denen diese Bewegungsgleichungen, wenn auch nur näherungsweise, integriert werden konnten. Der Fortschritt der Analysis war gleichbedeutend mit dem Fortschritt der Integrationsmethoden. Bei dieser Entwicklung haben sich zwei mathematische Methoden als besonders fruchtbar, effizient und robust herausgebildet und etabliert: Der "Kalkül der trigonometrischen Funktionen" sowie die "Methode der unbestimmten Koeffizienten". Obwohl "trigonometrische

175 [Verdun 2021].

Funktionen" bereits 1669 durch Newton verwendet worden waren und die Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vermutlich auf Leibniz zurückgeht, war es Eulers Verdienst, trigonometrische Reihen als Teil der Analysis begründet und als Integrationsverfahren standardisiert und etabliert zu haben.[176]

Noch bis in die späten 1730er Jahre betrachtete man Winkelfunktionen wie Sinus, Kosinus oder Tangens nicht als "Funktionen" im Sinne der Analysis, sondern als gewisse Seitenverhältnisse eines Kreises von gegebenem Radius.[177] Es erstaunt deshalb auch nicht, dass sich kein eigentlicher "Kalkül" dieser Funktionen entwickeln konnte. Die funktionen-theoretische Definition und die analytische Behandlung im Rahmen der Infinitesimalrechnung erfolgte erst in zwei Abhandlungen Eulers, die er am 4. Dezember 1738 bzw. am 30. März 1739 sowie am 15. Dezember 1739 der Petersburger Akademie vorlegte. In der Abhandlung [E 126] mit dem Titel *De novo genere oscillationum* behandelt er unter anderem die Oszillation der Bewegung des Meeres bei Ebbe und Flut, in der Abhandlung [E 128] mit dem Titel *Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales* gibt er Anweisungen, wie die Winkelfunktionen durch Reihenentwicklungen leicht berechnet werden können. Die Vorarbeiten und frühesten Aufzeichnungen zu diesen beiden Abhandlungen finden sich verstreut in seinem drittem Notizbuch [Ms 399], fol. 140r–148v, 157v–159r, 193r. Dieses Dokument enthält insbesondere die frühesten Aufzeichnungen Eulers zur Integration und Differentiation trigonometrischer Funktionen sowie zur Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen. In diesen Arbeiten erkannte er, dass gewisse Differentialgleichungen mit Hilfe trigonometrischer Funktionen gelöst werden können. Diese Einsicht sowie die Kenntnis der Differentiations- und Integrationseigenschaften der trigonometrischen Funktionen brachten ihn vermutlich auf die Idee, diese Winkelfunktionen als Lösungsansatz zur Integration von Differentialgleichungen zu verwenden, da sie die periodischen Bewegungen der Himmelskörper bestens zu beschreiben vermögen. Die trigonometrischen Funktionen brachten den Vorteil, dass sie sich leicht integrieren und sich ihre Werte für bestimmte Winkelargumente durch rasch konvergente Reihenentwicklungen sehr genau berechnen liessen. Dies war vermutlich die Motivation Eulers für seine zweite, oben erwähnte Abhandlung [E 128], deren Inhalt sich (obwohl verstreut) in seinem Notizbuch [Ms 399], fol. 205r–254r, fast vollständig erhalten hat.

Als analytische Methode zur Integration von Bewegungsgleichungen setzte Euler sukzessive auf die sogenannte "Methode der unbestimmten Koeffizienten". In späteren Arbeiten, die im Zusammenhang mit seiner "zweiten" Mondtheorie [E 418] stehen, verwendete er auch die "Methode der sukzessiven Approximation". Als dritte analytische Methode wäre die "Methode der Variation

176 [Katz 1987], pp. 312–313.
177 [Katz 1987], pp. 315–316.

der Konstanten" zu erwähnen. Erstaunlicherweise hat sich diese Methode bei ihm nicht durchgesetzt und kam daher nur selten zur Anwendung. Die von ihm bevorzugte Methode der unbestimmten Koeffizienten besteht im Wesentlichen darin, einen Ansatz für die gesuchten Variablen zu finden, welcher der erwarteten Lösungsfunktion analytisch formal ähnlich ist (in der Regel eine Reihenentwicklung mit unbestimmten Koeffizienten), der dann – unter Umständen in der nullten, ersten und zweiten Ableitung – in das gekoppelte Differentialgleichungssystem eingesetzt und termweise integriert wird. Die unbestimmten Koeffizienten werden sodann durch Koeffizientenvergleich bestimmt. Dies ist zwar eine sehr einfache und robuste, auf beliebig komplizierte Bewegungsgleichungen anwendbare Integrationsmethode. Je nach Komplexität des Differentialgleichungssystems und je nach Grad oder Ordnung der Reihe für den gewählten Ansatz kann diese Art der Integration aber extrem rechenaufwendig sein, insbesondere deshalb, weil die Potenzen der trigonometrischen Funktionen durch Anwendung der Additionstheoreme zum Verschwinden gebracht werden müssen, damit die Abhängigkeit der Lösung von den Winkelargumenten (bzw. von deren Linearkombinationen) besser ersichtlich wird. So war EULER in seiner Preisschrift [E 384] von 1752 für die Integration der Bewegungsgleichungen des Saturn mit dieser Methode gezwungen, über 10′000 Terme algebraisch zu bestimmen, damit er den Koeffizientenvergleich durchführen konnte. Das früheste Dokument, in dem diese Methode der unbestimmten Koeffizienten – wenn auch noch nicht in vollster Allgemeinheit – angewandt wurde, ist das unpulizierte Manuskriptfragment [Ms 281], in dem EULER erstmals eine Sonnen- und Mondtheorie als Dreikörperproblem formulierte und die Bewegungsgleichungen des Mondes damit zu lösen versuchte. Darin erkennt man einerseits sehr schön den Ansatz für die Lösungsfunktion P, den er als Kosinusreihe

$$P = A + Bk\cos v + Ck^2\cos 2v + Dk^3\cos 3v + \text{etc.}$$

formulierte, wobei A, B, C, D die unbestimmten Koeffizienten, k die Exzentrizität der Mondbahn und v die exzentrische Anomalie bedeuten. Andererseits notierte er die Integrale jener Terme, die in Kombination mit P in den Bewegungsgleichungen vorkommen und mit Hilfe des Ansatzes integriert werden: $\int P\,dv$, $\int P\,dv\sin v$, $\int P\,dv\cos v$, $\int P\,dv\cos 2v$, $\int P\,dv\sin v^2$ sowie $\int Pv\,dv\sin v$. All die resultierenden, integrierten Terme werden sodann koeffizientenweise zusammengefasst und schliesslich der Koeffizientenvergleich durchgeführt.

Spätestens Mitte der 1750er Jahre erkannte EULER, dass die Methode der unbestimmten Koeffizienten zu umständlich ist. Obwohl sie sich bei ihm zu einem Standard-Verfahren etablierte und er diese Methode noch in seiner "zweiten" Mondtheorie [E 418] anwandte, entwickelte er alternative Methoden. Neben semi-analytischen Verfahren, bei denen die homogene Gleichung analytisch, die inhomogene Gleichung aber numerisch gelöst wird, sah er in den rein numerischen Verfahren die einzige Möglichkeit, wie Drei- und Mehrkörperprobleme wenigstens ansatzweise gelöst werden können. Er befasste sich schon vor 1730 mit den grundlegenden Prinzipien der numerischen Integration, wie aus seinem Notizbuch [Ms 397], fol. 171r, ersichtlich ist. Die soliden Grundlagen dazu erarbeitete er aber im Zusammenhang mit seinem monumentalen Werk [E 342] über die Integralrechnung. Im Kapitel VII, *De integratione aequationum differentialium per approximationem*, des ersten Bandes formulierte er jenen Algorithmus, der den Ausgangspunkt – "the mother of all integration methods" – aller heutigen numerischen Integrationsmethoden darstellt.[178]

Obwohl EULER semi-analytische Methoden bereits in den Abhandlungen [E 414], [E 511] und [E 512] anwandte, entwickelte er rein numerische Methoden zur Bestimmung der gestörten Bewegungen der Himmelskörper in seiner berühmten Abhandlung [E 398], denn er musste bald feststellen, dass sogar für einfachere Fälle keine analytisch geschlossenen Lösungen der Bewegungsgleichungen für das Dreikörperproblem (mit den damals zur Verfügung stehenden Mitteln der Analysis, wie er meinte) gefunden werden können. Selbst wenn das allgemeine Problem eines Tages gelöst werden könnte, so mutmasste er, würde dessen Lösung sicher äusserst kompliziert ausfallen und daher für den Gebrauch kaum anwendbar sein. Es lag daher nahe, dass er auch nach einem ganz anderen Weg suchte, wie aus seinem Brief [R 1413] vom 18. August 1761 an LAMBERT hervorgeht. In der am 8. Juli 1762 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung [E 398] schildert er das Prinzip der numerischen Integration. Bezeichnen x, y und z die zu einer gegebenen Epoche t bekannten rechtwinkligen Koordinaten eines Himmelskörpers und sind

$$\frac{dx}{dt} = p\,, \qquad \frac{dy}{dt} = q\,, \qquad \frac{dz}{dt} = r$$

dessen Geschwindigkeitskomponenten, dann folgen aus diesem "Zustandsvektor" ("l'état du corps"), den heute sogenannten "Anfangsbedingungen", sowie den beschleunigenden Kraftkomponenten

$$\alpha\, dp = P\, dt \qquad \alpha\, dq = Q\, dt \qquad \alpha\, dr = R\, dt$$

die Komponenten der Position x', y', z' und Geschwindigkeit p', q', r' des betrachteten Himmelskörpers aufgrund der auf ihn wirkenden resultierenden Kraftkomponenten P, Q und R zur Epoche $t + \tau$, wobei τ ein beliebiges Zeitintervall bezeichnet, mit der Taylorreihenentwicklung n-ter Ordnung

$$\begin{aligned}
x' &= x + \tau p + \frac{\tau\tau P}{2\alpha} + \frac{\tau^3\, dP}{6\alpha\, dt} + \frac{\tau^4\, ddP}{24\alpha\, dt^2} + \frac{\tau^5\, d^3P}{120\alpha\, dt^3} + \text{etc.}\\
y' &= y + \tau q + \frac{\tau\tau Q}{2\alpha} + \frac{\tau^3\, dQ}{6\alpha\, dt} + \frac{\tau^4\, ddQ}{24\alpha\, dt^2} + \frac{\tau^5\, d^3Q}{120\alpha\, dt^3} + \text{etc.}\\
z' &= z + \tau r + \frac{\tau\tau R}{2\alpha} + \frac{\tau^3\, dR}{6\alpha\, dt} + \frac{\tau^4\, ddR}{24\alpha\, dt^2} + \frac{\tau^5\, d^3R}{120\alpha\, dt^3} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

178 [Beutler 2005], p. 254 sowie pp. 259–264.

und

$$p' = p + \frac{\tau P}{\alpha} + \frac{\tau^2\, dP}{2\alpha\, dt} + \frac{\tau^3\, ddP}{6\alpha\, dt^2} + \frac{\tau^4\, d^3P}{24\alpha\, dt^3} + \text{etc.}$$
$$q' = q + \frac{\tau Q}{\alpha} + \frac{\tau^2\, dQ}{2\alpha\, dt} + \frac{\tau^3\, ddQ}{6\alpha\, dt^2} + \frac{\tau^4\, d^3Q}{24\alpha\, dt^3} + \text{etc.}$$
$$r' = r + \frac{\tau R}{\alpha} + \frac{\tau^2\, dR}{2\alpha\, dt} + \frac{\tau^3\, ddR}{6\alpha\, dt^2} + \frac{\tau^4\, d^3R}{24\alpha\, dt^3} + \text{etc.}$$

EULER stellt in dieser Abhandlung sogar Überlegungen zur Fehlerfortpflanzung sowie zur optimalen Integrationsschrittweite an. Je grösser das Zeitintervall τ ist, umso langsamer konvergiert die Reihe und umso mehr Terme müssen für die gleiche Genauigkeit berücksichtigt werden. Ist der Zustandsvektor (x', y', z', p', q', r') zum Zeitpunkt $t+\tau$ bekannt, können daraus der Zustandsvektor sowie (falls nötig) die Kräfte für den Zeitpunkt $t+2\tau$ auf analoge Weise bestimmt werden. Je kleiner τ gewählt wird, um so öfter müssen dieselben Operationen durchgeführt werden. Der Integrationsfehler f bei einer Entwicklung bis Ordnung 2 beträgt $f = \lambda\tau^3$, wobei λ eine Proportionalitätskonstante bezeichnet. Für den Zeitpunkt $t + T$ wird man mit $\tau = T/n$ dieselben Operationen n Mal wiederholen müssen. Für $T = n\tau$ wird der resultierende Fehler $f = \lambda\tau\tau T$ sein, woraus man sieht, dass τ so klein wie möglich gewählt werden sollte, trotz der grösseren Anzahl Operationen. τ ist so zu wählen, dass gilt: $\tau = \sqrt{\left(\frac{f}{\lambda T}\right)}$. Schliesslich entwickelt er die Taylorreihe n-ter Ordnung direkt in den Bahnelementen v (Entfernung vom Zentralkörper), φ (der in der kurzen Zeit τ um das Kraftzentrum beschriebene Elementarwinkel), ψ (Knotenlänge), ω (Bahnneigung) und σ (Argument der Breite).

3.2. Etablierung und Standardisierung der Lösungsmethoden

Ungefähr zwischen 1738 und 1744 standen EULER, vorwiegend durch eigene Entwicklungen, zentrale Elemente zur Verfügung, die bei ihm einen grundlegenden Wandel der Methoden zur Lösung himmelsmechanischer Probleme herbeiführten. Insbesondere ermöglichten sie die Umstellung, die Bewegungen der Himmelskörper nicht mehr als Zweikörperproblem, sondern im Rahmen des Dreikörperproblems zu beschreiben. Dieser wesentliche Schritt bedingte die Einsicht in die Bedeutung der charakteristischen Bahnparameter – die Bahnelemente – und ihre zeitlichen Änderungen aufgrund der Störwirkungen, die Anwendung des Impulssatzes in drei Dimensionen einschliesslich der mittels des Prinzips des Kräftetransfers korrekt bestimmten Kräfte und Scheinkräfte zur Formulierung der nach der Zeit parametrisierten Bewegungsgleichungen sowie die Einführung trigonometrischer Funktionen und ihre Differential- und Integraleigenschaften, mit deren Hilfe die in der Regel gekoppelten Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung näherungsweise gelöst werden konnten. Mit diesen Elementen entwickelten sich in den himmelsmechanischen Arbeiten EULERs Lösungsmethoden, die sich bei ihm sukzessive zu Standard-Verfahren etablierten. Obwohl sich diese Verfahren im Einzelnen und je nach Anwendung oder Problemstellung in gewissen Aspekten voneinander unterscheiden können, weisen sie Gemeinsamkeiten auf, die im Folgenden in vier Teilbereiche zusammengefasst werden: das adäquate Parametrisieren des betrachteten Dreikörperproblems, das Formulieren der Bewegungsgleichungen, das näherungsweise (analytische und/oder numerische) Integrieren dieser Differentialgleichungen sowie die (statistische) Bestimmung von Parametern (z.B. Integrationskonstanten) aus einer Anzahl redundanter Beobachtungen zur Prüfung oder Verbesserung der aus der Integration resultierenden Gleichungen. Dieses Prozedere wird heute in der modernen Mechanik und Himmelsmechanik als selbstverständlich betrachtet. Die in den Bänden 25 bis 27 der Series secunda der *Opera omnia* enthaltenen Abhandlungen zeigen eindrücklich, dass und wie sich diese Lösungsmethoden vor allem in den himmelsmechanischen Arbeiten EULERs herausbildeten. Sie erscheinen in seinen erstpublizierten Abhandlungen, unveröffentlicht gebliebenenen Manuskripten und Manuskriptfragmenten sowie in seinen Notizbüchern manchmal zwar in verschiedener Form und Ausführlichkeit, in der Gesamtentwicklung treten sie jedoch immer klarer und sicherer hervor, wodurch sich ihr Etablierungs- und Standardisierungsprozess nachzeichnen und mitverfolgen lässt. Es ist deshalb entscheidend, EULERs Werke zur Himmelsmechanik stets hinsichtlich seiner Lösungsmethoden in ihrer Gesamtheit zu untersuchen und innerhalb ihrer chronologischen und inhaltlichen Entwicklung darzustellen.

Parametrisierung der Probleme

EULER war vermutlich einer der Ersten, der sich Gedanken über geeignete Parametrisierungen von Problemen machte, damit diese leichter gelöst werden konnten. Diese Parametrisierung beinhaltet nicht nur die Definition geeigneter, das Problem charakterisierender Variablen, sondern ebenso die Wahl adäquater Bezugssysteme, in denen die das Problem beschreibenden Bewegungsgleichungen möglichst einfach werden und die Lösung möglichst schnell konvergiert. In dieser Hinsicht betrat er Neuland und stellte schon vor 1730 ein rechtwinkliges Koordinatensystem explizit als Bezugssystem in der Abhandlung [E 9] dar. Viele seiner Erfolge in der Himmelsmechanik beruhen letztlich darauf, dass es ihm gelang, jeweils bestmögliche Parametrisierungen und Bezugssysteme zu finden.[179] Es waren vorwiegend seine Innovationen auf diesem Gebiet, die ihm in verschiedensten Bereichen, vor allem aber in der Mondtheorie sowie in der Theorie der Starrkörperrotation, jeweils zum Durchbruch verhalfen. Eine geschickte Parametrisierung kann ein spezifisches Problem signifikant vereinfachen und dadurch

179 [Meli 1993]; [Verdun 2003a].

lösbar machen. Der Parametrisierungsprozess beinhaltet in der Regel nicht nur die Definition der freien Parameter oder Koordinaten-invarianten Variablen (in den meisten Fällen ist dies die Zeit). Vielfach ist eine Umparametrisierung oder Variablen-Transformation sinnvoll, um das Problem optimal den gegebenen Bedingungen anzupassen (z.B. die Substitution des Zeitargumentes durch gewisse Weg- oder Winkelargumente, die der unmittelbaren Messung und Beobachtung besser zugänglich sind). Dann kann die Wahl eines geeigneten Bezugssystems eine entscheidende Rolle spielen. Die Parametrisierung ist daher in den meisten Fällen eng mit der Wahl der Koordinaten bzw. des Koordinatensystems verbunden.

Euler leitete den Impulssatz (in einer Dimension) zunächst im unpubliziert gebliebenen Manuskript [Ms 167], sodann aber in §155 seiner "ersten" Mechanik [E 15] zuerst in der nach der Zeit t parametrisierten Form her und transformierte diesen in §157 sofort in die nach dem Weg s parametrisierte und im weiteren Verlauf stets verwendete Form

$$c\,dc = \frac{np\,ds}{A}\ ,$$

wobei ds das Wegelement, c die Geschwindigkeit, A die Masse, p die Kraft und n eine Konstante bezeichnen. Dieses Umparametrisieren hatte für ihn einen gewichtigen Grund. Die Geschwindigkeitsskala ("scala celeritatum") und die Zeitskala ("scala temporum"), die er zuvor in §48 und §49 explizit definiert und eingeführt hat, sind über die – auf Galilei zurückgehende – Proposition 15, §130, (bei konstanter Beschleunigung) miteinander verknüpft. Das Quadrat der Geschwindigkeit ist aber gemäss §200 und §201 der ihr entsprechenden Fallhöhe proportional und ist daher über diese der direkten Messung zugänglich. Euler verwendete daher den Impulssatz zunächst in der nach dem Weg parametrisierten Form. Dadurch entsteht bei der Integration in Proposition 25, §193, ein Faktor 2, den er in der Folge beibehielt und die Proportionalitätskonstanten bzw. die Einheiten anschliessend in §204 und §205 derart wählte, dass die Geschwindigkeit v gleich der ihr entsprechenden Fallhöhe x entspricht, weshalb dieser Faktor nicht verschwindet. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass die Parametrisierung zudem auch mit der Wahl des Einheitensystems verknüpft sein kann.[180] Euler hielt (vorerst) deshalb an einem nach dem Weg parametrisieren Impulssatz fest, weil er damals in erster Priorität noch an der Form der vom betrachteten Teilchen im Raum zurückgelegten Trajektorie und erst in zweiter Linie am zeitlichen Verlauf interessiert war. Diese Priorität änderte sich mit der Anwendung des Impulssatzes in drei Dimensionen auf die Beschreibung der Bahntrajektorien im Rahmen des Dreikörperproblems und mit Eulers Einsicht, dass in den nach der Zeit parametrisierten Bewegungsgleichungen die Dynamik der Bewegung verborgen liegt. In diesem Fall ist es zentral, sowohl den zeitlichen als auch den räumlichen Verlauf der gestörten Bahn des betrachteten Himmelskörpers beschreiben

180 [González Redondo 2007].

zu können. Diese Tatsache erklärt den Umstand, weshalb EULER in seinen frühen störungstheoretischen Arbeiten die Umparametrisierung des Impulssatzes auf die Zeit explizit und sorgfältig durchführte. Anknüpfend an seine Definition der einer gegebenen Geschwindigkeit dX/dT entsprechenden Fallhöhe V schreibt er in §8 von [E 138] gemäss §202 seiner "ersten" Mechanik [E 15] (wonach das Quadrat der Geschwindigkeit gleich der Fallhöhe ist):

$$V = \frac{dX^2}{dT^2} \; .$$

Die zeitliche Ableitung liefert bei konstantem dT

$$dV = \frac{2\,dX\,ddX}{dT^2} \; .$$

Im Zusatz 5 (§207) zur Proposition 25 in [E 15] zeigt er, dass $dv = \frac{p\,ds}{A}$, wobei v die der Geschwindigkeit zukommende Fallhöhe, ds das zurückgelegte Wegelement und p die auf das Teilchen mit Masse A wirkende Kraft bedeuten. EULER ergänzt in §213, dass NEWTON die Wirkung p/A als "beschleunigende Kraft" bezeichnet habe. Bezeichnet P eben diese beschleunigende Kraft (d.i. die auf das Teilchen wirkende Kraft dividiert durch dessen Masse), gilt somit

$$dV = P\,dX \; .$$

Eingesetzt in obige Beziehung ergibt

$$\frac{2\,dX\,ddX}{dT^2} = P\,dX$$

und somit

$$2\,ddX = P\,dT^2 \; .$$

Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist EULERs Hinweis in §8 von [E 138] auf seine "erste" Mechanik [E 15] ("in meo tractu de motu"), in der (§§219–223, 230–234) seine getroffene Definition und Wahl der Einheiten den Vorteil habe, dass mit dem Einheitenfaktor 1/125 die Fallhöhe von 15625 Skrupel gerade in 1 Sekunde zurückgelegt wird. Diesen Einheitenfaktor erwähnt er auch im unpublizierten Manuskriptfragment [Ms 281], fol. 1v–2r, in seinen späteren Arbeiten (ab ungefähr 1745) aber nicht mehr.

Die Anwendung des nach der Zeit parametrisierten Impulssatzes in drei Dimensionen, wie dies EULER erstmals in seiner fundamentalen Abhandlung [E 112] publiziert hat, stellt zwar den allgemeinst möglichen Ansatz zur Formulierung der Bewegungsgleichungen dar und ist auf alle physikalischen Probleme der Punktmechanik anwendbar. Die aus der Störungstheorie oder der Theorie der Starrkörperrotation resultierenden Bewegungen der Himmelskörper und des Erdkörpers müssen aber der astrometrischen Beobachtung zugänglich gemacht werden. Es ist deshalb sinnvoll, bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen ab einem bestimmten

Punkt das Zeitelement dt als unabhängiger Parameter durch ein (zeitabhängiges) Winkelelement $d\varphi$ zu substituieren. Bei dieser Substitution handelt es sich nicht um eine Umparametrisierung, sondern um eine Variablen-Transformation. Das zeitabhängige Winkelelement $d\varphi$ kann z.B. die zeitliche Änderung der ekliptikalen Länge oder die mittlere Anomalie des betrachteten Himmelskörpers oder die Winkeldistanz des momentanen Rotationspols der Erde vom Ekliptikpol bedeuten. Diese Grössen (ekliptikale Länge, Poldistanz) sind direkt an der Himmelsphäre messbar und können daher mit den aus der Theorie folgenden Werten verglichen werden. Die substituierten Winkelelemente als neue Variablen hängen nun aber von der Wahl des Bezugssystems ab. Die ursprünglich Koordinatenunabhängige Parametrisierung erfordert somit die Wahl und Definition eines Bezugssystems, in welchem die Bewegungsgleichungen möglichst einfach formuliert werden können. Genau an diesem Punkt ist der erfolgreiche Durchbruch EULERs bei der Lösung mancher Probleme zu finden. Er war es letztlich, der adäquate und problemorientierte Bezugssysteme explizit einführte und gezielt anwandte.[181] So legte er – je nach Fragestellung – deren Ursprung ins Baryzentrum des Sonnensystems oder des Systems Erde – Mond, ins Zentrum des Sonnen-, des Erd- oder des Mondkörpers. Die aus den Bewegungsgleichungen resultierenden helio-, geo- oder selenozentrischen Bewegungen beziehen sich somit entweder auf das Ruhesystem der Sonne, der Erde oder des Mondes – je nachdem, welcher Himmelskörper untersucht und beobachtet werden sollte. Doch EULER ging noch einen Schritt weiter. Er betrachtete nicht nur Inertialsysteme (mit unterschiedlichem Ursprung), sondern führte auch bewegliche, meist rotierende Bezugssysteme ein. Diese sogenannten "mitrotierenden" Bezugssysteme können, je nach Anwendung, körperfreie oder körperfeste Systeme sein – ein Novum für die damalige Zeit.

In seiner "zweiten" Mondtheorie [E 418] lässt EULER – und das ist die zentrale neue Idee – das Bezugssystem mit der (konstanten) mittleren Bewegung des Mondes um das Baryzentrum des Systems Erde – Mond drehen. Dies brachte den Vorteil, dass sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung erheblich vereinfachen liess. Zugleich nahm er an, dass sich das Baryzentrum in einer Kepler-Ellipse um die Sonne bewegt. Er musste dadurch nur noch die sehr kleinen, durch die Störungen der Sonne verursachten Abweichungen der Mondbewegung von der Kepler-Ellipse in diesem mitrotierenden System betrachten, wodurch die zur näherungsweisen Lösung der Bewegungsgleichungen eingeführten Reihenentwicklungen wesentlich schneller konvergierten. Diese Idee des mitrotierenden Bezugssystems bildete Ende des 19. Jahrhunderts den Ausgangspunkt für die Mondtheorie von HILL und BROWN.[182] Doch damit nicht genug – EULER trieb die geschickte Einführung und Anwendung von Bezugssystemen auf die Spitze. Bereits in seiner *Scientia navalis* [E 110], § 184, stellte er die Hypothese auf, dass

181 [Verdun 2003a].
182 [Hill 1878], [Brown 1898], [Wilson 2010].

in jedem starren Körper drei orthogonale Achsen mit Ursprung in dessen Schwerezentrum existierten, um welche sich dieser frei drehen könne. Doch erst in einer Abhandlung [E 291], die er am 6. Juli 1758 der Berliner Akademie vorlegte, gelang es ihm, die charakteristischen Eigenschaften des Starrkörpers wie Trägheitsmomente, Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen zu definieren und für physikalische Anwendungen zugänglich zu machen. Insbesondere erkannte er, dass sich die Bewegungsgleichungen für die Starrkörperrotation, die er in einer am 3. September 1750 präsentierten Abhandlung [E 177] noch bezüglich eines Inertialsystems formulierte, wesentlich vereinfachen liessen, als er diese auf das körperfeste, mitrotierende Hauptträgheitsachsensystem bezog, woraus die heute sogenannten "Eulerschen Bewegungsgleichungen der Starrkörperrotation" hervorgingen. Die zentrale Idee EULERs bestand also darin, die Bewegungsgleichungen nicht bezüglich eines raumfesten, sondern bezüglich des körperfesten, mitrotierenden Hauptträgheitsachsensystems zu formulieren, wodurch die in den Bewegungsgleichungen enthaltenen Variablen zeitunabhängig wurden. Die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen beschreiben dann die Bewegung des Winkelgeschwindigkeitsvektors (bzw. der Rotationsachse) bezüglich dieses Hauptträgheitsachsensystems. Seine zuvor eingeführten kinematischen Gleichungen beschreiben die Bewegung des Winkelgeschwindigkeitsvektors bezüglich eines beliebigen Inertialsystems. Somit kann die Bewegung eines Körpers, definiert durch seine Hauptträgheitsachsen, bezüglich eines beliebigen Bezugssystems dargestellt werden. Der Schritt zum Erfolg bestand also darin, die Bewegung des Winkelgeschwindigkeitsvektors bzw. der Rotationsachse bezüglich eines raumfesten Systems von dessen Bewegung bezüglich eines körperfesten Systems zu trennen.

Unabhängig von der Wahl eines Bezugssystems kann aber die Wahl der Koordinaten getroffen werden. EULER verwendete rechtwinklige Koordinaten, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Richtungskosinus und die später nach ihm benannten "Eulerschen Winkel". Diese führte er im vierten Kapitel "De immutatione coordinatum" des Anhangs zu seiner *Introductio in Analysin Infinitorum* [E 102] ein, die er 1748 publizierte. Im Zusammenhang mit der Starrkörperrotation verwendete er diese Winkel erstmals in der Abhandlung [E 336], die er 7. Oktober 1751 der Berliner Akademie vorlegte. In der Literatur findet sich oft die irrige Meinung, dass er dank der Anwendung dieser Winkel seine berühmten Bewegungsgleichungen der Starrkörperrotation gefunden habe. Die Analyse [Verdun 2021] der Entwicklung dieser Gleichungen widerlegt diese Ansicht. Als wichtige Aspekte im Zusammenhang mit Bezugssystemen und Koordinaten sind auch die "Koordinatentransformationen" und die "Transformationseigenschaften" gewisser Grössen wie z.B. des Winkelgeschwindigkeitsvektors zu nennen. Ende 1749 hat EULER die Eigenschaften einer allgemeinen Koordinatentransformation (Translation und Rotation) als Grundlage zu seinen Untersuchungen zur Starrkörperbewegung formuliert, wie aus seinem Notizbuch [Ms 401], fol. 45v–46r sowie fol. 126r–126v, hervorgeht. Die sogenannte "Orthogonalitätsbedingung" hat er, neben [E 825], bereits in einer am 5. März 1770 vorgelegten Abhandlung [E 407] (für die Raumdimensionen $n = 3$ und $n = 4$) allgemein untersucht.[183] Er war sich auch der Bedeutung des Winkelgeschwindigkeitsvektors klar bewusst. Im seinem Notizbuch [Ms 401], fol. 45v–47r, bestimmt er zuerst die Elemente sowie die Orthogonalitätsbedingung der Transformations- bzw. Rotationsmatrix zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Körper. Diese Erkenntnisse publizierte er in vollem Umfang erst in den Abhandlungen [E 478] und [E 479].[184] Damit bestimmte er die Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors eines Körpers bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems.

Formulierung der Bewegungsgleichungen

Eine der wichtigsten Strategien zur Lösung mechanischer und himmelsmechanischer Probleme ist die Formulierung von Bewegungsgleichungen. Keine andere Methode hatte für die Entwicklung der theoretischen Physik und Astronomie eine derart nachhaltige Bedeutung. Es war in erster Linie Eulers Verdienst, das Aufstellen von Bewegungsgleichungen formalisiert, etabliert und standardisiert zu haben. Damit schuf er ein Instrument von enorm grosser Tragweite, das – losgelöst vom konkret betrachteten Problem – allgemein gültig und auf alle mechanischen Probleme anwendbar ist. Beim Entwicklungsprozess, der zur standardisierten Formulierung von Bewegungsgleichungen führte, waren drei Schritte äusserst wichtig: Es sind dies die Parametrisierung des Impulssatzes nach der Zeit, die komponentenweise Erweiterung des Impulssatzes auf drei Dimensionen sowie die Anwendung des Prinzips des Kräftetransfers. Diese drei Innovationen ergaben sich zwingend aus dem Bestreben, das allgemeine Dreikörperproblem zu formulieren. Bis etwa 1743/44 wurden sämtliche behandelten Probleme der Mechanik und Himmelsmechanik als ein- oder zweidimensionale Probleme betrachtet oder auf solche reduziert. Ziel war es, eine geometrisch beschreibbare Trajektorie direkt aus den nach dem Weg parametrisierten Bewegungsgleichungen als Bahnkurve herzuleiten. Es war Euler, der um diese Zeit in seinem unpubliziert gebliebenen Manuskriptfragment [Ms 281] erstmals versuchte, eine Sonnen- und Mondtheorie im Rahmen des Dreikörperproblems unter Anwendung des nach der Zeit parametrisierten Impulssatzes zu entwickeln. Weil die auf den gestörten Himmelskörper (Sonne oder Mond) resultierende Störkraft im Bezugssystem, das durch den Zentral- und Störkörper definiert ist, aus drei Kraftkomponenten besteht, war er gezwungen, den Impulssatz auf diese drei Komponentenrichtungen anzuwenden, wobei er die Gültigkeit des Superpositionsprinzips (bzw. das Prinzip von der Dekomposition von Kräften) voraussetzte und annehmen musste, dass dieses (als "analoge Erweiterung") auch für die drei (unabhängigen) Impulskomponenten gültig ist. Da er zudem die Bewegung des gestörten Himmelskörpers im Ruhesystem des Zentralkörpers beschreiben wollte, musste er zwingend die auf

183 [Koetsier 2007], pp. 189–192.
184 [Langton 2007], pp. 199–201.

diesen wirkenden Kräfte des störenden und des gestörten Körpers auf letzteren in umgekehrter Richtung als Scheinkräfte anbringen und dadurch mitberücksichtigen. Diese drei Schritte waren für die Formulierung exakt gültiger Bewegungsgleichungen notwendig und hinreichend.

Am 5. November 1744 las EULER in der Berliner Akademie eine Abhandlung[185] mit dem Titel *Sur le mouvement des corps flexibles*, von der in den Mémoires der Akademie nur eine Zusammenfassung veröffentlicht wurde.[186] Diese Abhandlung [E 174] erschien erst 1751 in EULERS *Opuscula 3* [E 156]. Der Inhalt dieser Arbeit findet sich in EULERS Notizbuch [Ms 400], fol. 225r, 226r–229r, 246r. Diese Aufzeichnungen belegen, dass sich bei EULER seit Ende 1744 die Anwendung des nach der Zeit parametrisierten Impuls- und Drehimpulssatzes in zwei Dimensionen als zentrale Methode fest etabliert hat. Diese Notizbucheintragungen lassen sich mithilfe des Briefwechsels EULERS mit GOLDBACH und JOHANN I BERNOULLI sehr genau datieren.[187] Auf fol. 225r von [Ms 400] steht der Impulssatz in zwei Dimensionen,

$$\frac{2\,ddq}{dt^2} = \frac{Q}{K} + \frac{nK}{K}\,, \qquad \frac{2\,ddy}{dt^2} = \frac{P}{K}\,,$$

sowie der Drehimpulssatz, jeweils um die festen Achsen A und B,

$$\frac{2\,dd\zeta}{dt^2} = \frac{na\cos\zeta}{aa+ii} + \frac{(a+b)(P\sin\zeta - Q\cos\zeta)}{L(aa-ii)}\,, \quad \frac{2\,dd\eta}{dt^2} = \frac{Pc\sin\eta - Qc\cos\eta}{Kkk}\,,$$

wobei die verwendeten Symbole aus EULERS Darstellung ersichtlich sind. Die Drehimpulsgleichungen beinhalten auf den linken Seiten die Winkelbeschleunigungen und auf den rechten Seiten die resultierenden Drehmomente dividiert durch die Trägheitsmomente.

Der erste Schritt zur Anwendung des Impulssatzes in drei Dimensionen wird in EULERS Manuskriptfragment [Ms 281], fol. 6v, sehr schön illustriert. Nachdem er die einzelnen Kraftkomponenten, die auf Sonne und Mond wirken, bestimmt hat, fügt er diese in §27 zu resultierenden Kraftkomponenten im Ruhesystem der Erde zusammen. Die drei aus dem Kräftetransfer resultierenden Komponentengleichunen für Sonne und Mond wendet er in §28 sodann auf die entsprechenden Komponentengleichungen des Impulssatzes an und schreibt dazu einleitend:

> Iam ad easdem directiones constantes, ad quas vires sollicitantes reduximus, ipsum motum tam solis quam lunae resolvi oportet: Solis scilicet motus triplex concipiendus est secundum directiones Sr, Ss et $\Sigma\sigma$, quibus tempusculo infinite parvo dt coordinatae $TR = y\cos\theta$, $RS = y\sin\theta$

185 [Knobloch 1984], p. 351, Nr. 32.
186 [E 174a].
187 [Ms 400], fol. 203r, mit [R 781] vom 4. Mai 1743; [Ms 400], fol. 221v, mit [R 788] vom 15. Oktober 1743; [Ms 400], fol. 243r, mit [R 153] vom 4. Februar 1744.

et $S\Sigma = X$ differentialibus suis augeantur, et cum haec differentialia sint spatiola his motibus descripta tempusculo dt si ea per dt dividantur, prodibunt celeritates solis secundum eadem directiones. Ita sol tempusculo dt

	conficit spatiolum	celeritate
secundum Sr	$d \cdot y \cos\theta$	$\dfrac{d \cdot y \cos\theta}{dt}$
secundum Ss	$d \cdot y \sin\theta$	$\dfrac{d \cdot y \sin\theta}{dt}$
secundum $\Sigma\sigma$	dX	$\dfrac{dX}{dt}$

Simili modo luna tempusculo dt [...].

Leider fehlen im Manuskriptfragment die folgenden Seiten, und der Text geht erst mit §33 auf fol. 7r weiter. Die Fortsetzung seiner Herleitung ist jedoch rekonstruierbar, weil in diesem Paragraphen das Resultat – die Bewegungsgleichungen für Sonne und Mond – vorhanden ist. Nachdem er sorgfältig die ersten Ableitungen pro Komponentenrichtung notiert hat, besteht der nächste Schritt in der Bildung der zweiten Ableitungen nach der Zeit. Sodann werden diese Beschleunigungskomponenten den entsprechenden resultierenden Kraftkomponenten gleichgesetzt und das Zeitelement dt durch das Winkelelement $d\omega = d\theta$ durch die Beziehung

$$\frac{rr\,dt^2}{2T} = \frac{a^3\,d\omega^2}{S+T+L}$$

eliminiert, wobei r der Erdradius, a der mittlere Kreisbahnradius der Sonne, θ ihre geozentrische Länge und S, T, L die Massen von Sonne, Erde und Mond bezeichnen, woraus in §34, fol. 7r, die Bewegungsgleichungen für Sonne und Mond in Form eines gekoppelten Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung bestehend aus sechs Komponentengleichungen resultiert: Für die Bewegung der Sonne gilt

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta + \frac{La^3 z\,d\omega^2 \sin(\varphi-\theta)}{S+T+L}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{Q^3}\right) = 0$$

$$ddy - y\,d\theta^2 + \frac{a^3\,d\omega^2}{S+T+L}\left(\frac{(S+T)y}{P^3} + \frac{Ly}{Q^3} + Lz\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{Q^3}\right)\cos(\varphi-\theta)\right) = 0$$

$$ddX + \frac{a^3\,d\omega^2}{S+T+L}\left(\frac{(S+T)X}{P^3} + \frac{Lx}{p^3} - \frac{L(x-X)}{Q^3}\right) = 0\,,$$

für die Bewegung des Mondes gilt

$$2\,dz\,d\varphi + z\,dd\varphi - \frac{Sa^3 y\,d\omega^2 \sin(\varphi-\theta)}{S+T+L}\left(\frac{1}{P^3} - \frac{1}{Q^3}\right) = 0$$

$$ddz - z\,d\varphi^2 + \frac{a^3\,d\omega^2}{S+T+L}\left(\frac{(T+L)z}{p^3} + \frac{Sz}{Q^3} + Sy\left(\frac{1}{P^3} - \frac{1}{Q^3}\right)\cos(\varphi - \theta)\right) = 0$$

$$ddx + \frac{a^3\,d\omega^2}{S+T+L}\left(\frac{(T+L)x}{p^3} + \frac{SX}{P^3} + \frac{S(x-X)}{Q^3}\right) = 0\,,$$

wobei S, T, L die Massen von Sonne, Erde und Mond, y die Distanz der Sonne von der Erde, x die lotrechte Distanz des Mondes von der Ekliptikebene, z die verkürzte, auf die Ekliptik projizierte Distanz des Mondes von der Erde, θ und φ die heliozentrischen Längen von Sonne und Mond, $p = \sqrt{(xx+zz)}$ und $q = \sqrt{\left(y^2+z^2-2yz\cos(\varphi-\theta)+x^2\right)}$, X die Distanz des Sonnenzentrums von der Ekliptik, $P = \sqrt{(x^2+X^2)}$ und $Q = \sqrt{\left(y^2+z^2-2yz\cos(\varphi-\theta)+(x-X)^2\right)}$ die wahren, a und b die mittleren Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde bedeuten. Dieses behutsame, schrittweise Anwenden der Impulsgleichungen vollzog Euler nur noch in den Abhandlungen [E 138] und [E 174], die beide im Jahr 1744 entstanden sind. Nach dieser Zeit, insbesondere bereits in der fundamentalen Abhandlung [E 112], erfolgte die Anwendung des Impulssatzes sowie die Herleitung der Bewegungsgleichungen viel kompakter und standardisierter als noch in diesen frühen Pionier-Arbeiten. Diese Tatsache kann als weiterer wichtiger Hinweis dafür verwendet werden, dass das Manuskriptfragment [Ms 281] zwischen 1743 und 1745 entstanden sein muss. Es gibt eine ganze Liste weiterer Indizien, die für eine solche Datierung sprechen.[188] Euler musste sogleich erkannt haben, dass diese Lösungsmethode einen völlig neuen und sehr allgemeinen Zugang darstellt. Es geht einzig darum, die auf den betrachteten Himmelskörper wirkenden und mit Hilfe des Prinzips des Kräftetransfers bestimmten, resultierenden drei Kraftkomponenten den entsprechenden drei Impulskomponenten gleichzusetzen und die dadurch erhaltenen Bewegungsgleichungen mit irgendeinem Verfahren zu integrieren. Die allgemeine Gültigkeit dieser neuen Methode schildert er in den einleitenden Paragraphen und insbesondere in §17 seiner fundamentalen Abhandlung [E 112], die er am 8. Juni 1747 der Berliner Akademie vorlegte. Diese neue Methode wandte er in [Ms 281] zwar erstmals zur Bestimmung der Bewegungen von Sonne und Mond an, die damit erzielten Resultate sind aus dem leider nur fragmentarisch erhaltenen Manuskript aber nicht ersichtlich. In der Abhandlung [E 138] (am 5. Oktober 1744 gelesen) bestimmte er damit aber die Knotendrehung und die zeitliche Änderung der Neigung der Mondbahnebene, und in [E 120] (1746 bearbeitet, im Juni 1747 fertiggestellt) ging er von den in [E 112] nach diesem Verfahren hergeleiteten Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der Bewegung des Saturn aus. Zweifellos erkannte er aber vermutlich schon in [Ms 281] beim Versuch, die Bewegungsgleichungen für den Mond zu lösen, dass dies mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden war. Das Aufstellen von (exakt gültigen) Bewegungsgleichungen ist nun zwar zu einer formalen Angelegenheit geworden, ihre Integration blieb vorerst aber ein äusserst schwieriges Problem. Dies mag

188 [Verdun 2015], pp. 212–213.

ein Grund dafür gewesen sein, weshalb Euler das vermutlich als Monographie konzipierte Manuskript [Ms 281] nicht publizierte.

Integration der Bewegungsgleichungen

Die prinzipielle Vorgehensweise, mit der Euler in all seinen späteren Arbeiten die Bewegungsgleichungen analytisch zu integrieren versuchte, kommt in seinem unpublizierten Manuskriptfragment [Ms 281] zumindest ansatzweise schon klar zum Vorschein. Er erkennt darin, dass das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für Sonne und Mond nur durch gewisse Näherungen gelöst werden kann. Diese Näherungen kommen durch fünf Vereinfachungen zustande:

1. Durch die Annahme, dass die Bahn der Sonne (für die Beschreibung der Mondbewegung) oder des Mondes (für die Beschreibung der Sonnenbewegung) bekannt ist, lassen sich die Bewegungsgleichungen für Sonne und Mond separat behandeln.
2. Durch die Annahme, dass die Abweichungen der Sonne (resp. der Erde) von der Ekliptik durch die Störungen des Mondes sehr klein sind (Euler bestimmte diese vorab zu $1''20'''$), kann die dritte Komponentengleichung ("out-of-plane component") vernachlässigt bzw. von den anderen beiden Komponentengleichungen entkoppelt und unabhängig von diesen behandelt werden.
3. Die Distanz zwischen störendem und gestörtem Himmelskörper als Funktion ihrer Entfernungen und Winkelseparation vom Zentralkörper tritt in den Bewegungsgleichungen stets in der dritten Potenz im Nenner gewisser Terme auf, was eine analytisch geschlossene Integration dieser irrationalen Terme unmöglich macht und diese deshalb durch entsprechende Reihenentwicklungen approximiert werden müssen, die termweise integrierbar sind.
4. Die inhomogenen Gleichungen müssen ebenfalls entwickelt werden, damit diese integriert werden können. Dazu erweist es sich als vorteilhaft, die zeitabhängigen Variablen derart zu transformieren, dass sie je aus einem konstanten oder zeit-invarianten Teil, der den homogenen Gleichungen genügt, und aus einem zeitabhängigen Teil bestehen, der aber nur noch sehr wenig vom invarianten Teil abweichen kann und daher sehr klein ist. Euler wählte in der Regel als invariante Teile die Bahnelemente der ungestörten Keplerbewegung, welche die homogenen Gleichungen lösen, und als zeitabhängige Variablen die kleinen Abweichungen von der Keplerbahn. Durch diese Variablentransformation lässt sich das Konvergenzverhalten der entwickelten inhomogenen Differentialgleichungen erheblich verbessern.
5. Die entwickelten inhomogenen Gleichungen werden schliesslich mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten gelöst, wobei die als trigonometrische Reihen formulierten Ansätze für die neuen Variablen derart gewählt werden, dass sich die Koeffizienten dieser Reihenansätze aus den gesuchten Bahnelementen (z.B. Bahnexzentrizitäten und deren Potenzen) und die Winkelar-

gumente ihrer Kosinus-Terme aus den gesuchten (oder vermuteten) Linearkombinationen der relevanten Winkeldistanzen (z.B. Elongationen und/oder ekliptikale Längen) zusammensetzen.

Es ist bemerkenswert, dass sich diese Lösungsstrategie bei Euler bereits im Manuskriptfragment [Ms 281] schon sehr früh herausgebildet hat. Die analytische Integration der Bewegungsgleichungen folgte in seinen späteren Abhandlungen im Wesentlichen nach diesem Schema. Es ist daher äusserst hilfreich, dieses Vorgehen zur analytischen Lösung der Bewegungsgleichungen anhand dieses frühen Manuskriptes zur Störungstheorie eingehender zu illustrieren. Für das näherungsweise Lösen der Bewegungsgleichungen der Sonne vernachlässigt er die dritte Komponentengleichung und betrachtet nur das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta + \frac{La^3 z\,d\omega^2 \sin(\varphi-\theta)}{S+T+L}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{Q^3}\right) = 0$$

$$ddy - y\,d\theta^2 + \frac{a^3\,d\omega^2}{S+T+L}\left(\frac{(S+T)y}{P^3}+\frac{Ly}{Q^3}+Lz\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{Q^3}\right)\cos(\varphi-\theta)\right) = 0\ ,$$

wobei S, T, L die Massen von Sonne, Erde und Mond, y die Distanz der Sonne von der Erde, x die lotrechte Distanz des Mondes von der Ekliptikebene, z die verkürzte, auf die Ekliptik projizierte Distanz des Mondes von der Erde, θ und φ die heliozentrischen Längen von Sonne und Mond, $d\omega = d\theta$, $p = \surd(xx+zz)$ und $q = \surd\big(y^2+z^2-2yz\cos(\varphi-\theta)+x^2\big)$, X die Distanz des Sonnenzentrums von der Ekliptik, $P = \surd(x^2+X^2)$ und $Q = \surd\big(y^2+z^2-2yz\cos(\varphi-\theta)+(x-X)^2\big)$ die wahren, a und b die mittleren Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde bedeuten. Zuerst löst er die homogenen Gleichungen

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = 0$$

$$ddy - y\,d\theta^2 + \frac{a^3\,d\omega^2}{yy} = 0\ ,$$

was sofort

$$\omega = C + V + \frac{c}{a}\sin V \qquad \text{sowie} \qquad y = a\Big(1+\frac{c}{a}\cos V\Big)$$

liefert, wobei $\frac{c}{a} = e$ die Exzentrizität der Sonnenbahn und V ihre exzentrische Anomalie bedeuten. Um die inhomogenen Gleichungen näherungsweise lösen zu können, entwickelt er zuerst den Term $\frac{1}{Q^3}$ in eine Reihe:

$$\frac{1}{Q^3} = \frac{1}{y^3} + \frac{3b\cos(\varphi-\theta)}{y^4} + \frac{3bb(3+5\cos 2(\varphi-\theta))}{4y^5} + \text{etc.}\ ,$$

wobei $p = z = b$ und $P = y$ gesetzt wurde. Diese Näherung setzt Euler sodann in das inhomogene System ein und erhält

$$2dy\,d\theta + y\,dd\theta + \frac{La^3bd\omega^2\sin(\varphi-\theta)}{S+T+L}\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{y^3}-\frac{3b\cos(\varphi-\theta)}{y^4}\right)=0$$

$$ddy - y\,d\theta^2 + \frac{a^3d\omega^2}{S+T+L}\left(\frac{(S+T+L}{y^2}+\frac{3Lb\cos(\varphi-\theta)}{y^3}+Lb\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{y^3}\right)\cos(\varphi-\theta)\right)=0\,.$$

Da aber die Entfernung y der Sonne im Vergleich zur mittleren Entfernung b des Mondes von der Erde sehr gross ist, vernachlässigt er die Terme mit $\frac{1}{y^3}$ und $\frac{1}{y^4}$ und betrachtet nur noch das System

$$\begin{aligned} 2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta \quad &+ \frac{La^3\,d\omega^2\sin(\varphi-\theta)}{(S+T+L)bb} = 0 \\ ddy - y\,d\theta^2 + \frac{a^3\,d\omega^2}{yy} &+ \frac{La^3\,d\omega^2\cos(\varphi-\theta)}{(S+T+L)bb} = 0\ . \end{aligned}$$

Dieses inhomogene Differentialgleichungssystem löst er mit dem Ansatz

$$y = a(1+p) \qquad \text{und} \qquad \frac{d\theta}{d\omega} = 1+q\ ,$$

wobei p und q nun sehr kleine Abweichungen von der Kepler-Ellipse der Sonnenbahn darstellen. Dadurch kann er Terme höherer Ordnung in p und q vernachlässigen. Dieses Vorgehen verwendete Euler später in den verschiedensten Varianten immer wieder. Meistens bezeichnete er dann die kleinen Abweichungen mit den Variablen u und v. Zum Lösen der inhomogenen Gleichungen verwendete er für seine störungstheoretischen Untersuchungen in [Ms 281] von Beginn an die Methode der unbestimmten Koeffizienten, die ein termweises Integrieren der trigonometrischen Funktionen der gewählten Lösungsansätze erlaubt. Diese Methode setzte er extensiv in seinen Abhandlungen [E 120] und [E 384] zur Bestimmung der Bewegung des Saturn sowie in seinen beiden Mondtheorien [E 187] und [E 418] ein. Er musste aber schon vor diesen Abhandlungen eingesehen haben, dass eine adäquate Wahl des Ansatzes entscheidend für die resultierenden Ungleichheiten sein kann, wie aus seinem Brief [R 515] vom am 12. Juni 1745 an Delisle hervorgeht. Noch in [Ms 281] setzte Euler den Lösungsansatz nur als Funktion der Exzentrizität sowie der exzentrischen Anomalie der Mondbahn und deren Potenz und Vielfachen an. Dieser Brief belegt nicht nur, dass er die Bedeutung der Linearkombinationen der relevanten Winkelargumente für die entsprechenden Ansätze zur Lösung der Bewegungsgleichung mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten mittlerweile erkannt, sondern insbesondere auch, dass er seine Mondtheorie zu diesem Zeitpunkt bereits über die ersten Ansätze von [Ms 281] hinaus weiterentwickelt haben musste.

Das nicht nur für die Integration des gekoppelten Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung, sondern überhaupt für die gesamte Störungstheorie zentrale Problem liegt in den Termen, welche die Distanz zwischen dem störenden und gestörten Himmelskörper umgekehrt proportional zur dritten Potenz enthalten. Solche Terme erzeugen ihrerseits Terme der Form

$$(1 - g\cos\omega)^{-\mu}\,,$$

wobei $g = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda\lambda}$, $\mu = \frac{3}{2}$ oder $\frac{5}{2}$, und $\lambda = \dfrac{f}{a}$ das Verhältnis zwischen den mittleren Entfernungen f und a des gestörten und des störenden Körpers vom Zentralkörper bedeutet. Diese Terme führen auf elliptische Integrale, die nur näherungsweise mit Reihenentwicklungen gelöst werden können. Die grosse Schwierigkeit besteht meist darin, dass – im Falle der Planetenstörungen – der heliozentrische Winkel ω sämtliche Argumente (von 0° bis 360°) annehmen und λ gegen Eins streben kann, weshalb diese Reihen nur sehr langsam konvergieren. Euler entwickelte den Ausdruck $(1 - g\cos\omega)^{-\mu}$ zunächst in eine (nur langsam konvergierende) Potenzreihe in $\cos\omega$ und verwandelte sodann – um dieses Problem zu beheben – die Potenzterme in Reihen der Vielfachen von ω, so dass er den Ausdruck in der Form

$$\begin{aligned}(1 - g\cos\omega)^{-\mu} = A &+ B\cos\omega + C\cos 2\omega + D\cos 3\omega + E\cos 4\omega\\ &+ F\cos 5\omega + G\cos 6\omega + H\cos 7\omega + \text{etc.}\end{aligned}$$

darstellen konnte, wobei es ihm gelang, die Koeffizienten rekursiv aus den ersten beiden zu bestimmen, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned}A &= 1 + \frac{\mu(\mu+1)}{2\cdot 2}g^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}g^4\\ &\quad + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}g^6 + \text{etc.}\\ \frac{1}{2}B &= \frac{\mu g}{2} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2\cdot 2\cdot 4}g^3 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}g^5\\ &\quad + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}g^7 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Ohne explizite Herleitung nennt Euler in seiner ersten Arbeit [E 120] zur Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn aber noch eine zweite Methode, mit der diese Koeffizienten rekursiv bestimmt werden können, und gibt die ersten drei Entwicklungen von A und $\frac{1}{2}B$. Es handelt sich hierbei um nichts Geringeres als die Entwicklung der heute nach Jean Baptiste Joseph Fourier bezeichneten "Fourierintegrale" zur Bestimmung der Koeffizienten trigonometrischer Reihen. Euler verwies in einem seiner späten Werke, nämlich in der Abhandlung [E 704], §2, auf diese bedeutende Entdeckung, die er in Zusammenhang mit seiner Abhandlung [E 120] gemacht habe. In der Tat enthält bereits sein fünftes Notizbuch [Ms 401] auf fol. 2r–3r Aufzeichnungen zur Mondtheorie, in denen er den Ausdruck $(1 + c\cos\varphi)^n$ entwickelt in

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} cc + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} c^4 + \text{etc.}$$

und diese Reihe anschliessend dem “Fourierintegral”

$$\frac{1}{\pi} \int d\varphi \left((1 + c\cos\varphi)^n + (1 - c\sin\varphi)^n \right)$$

gleichsetzt, wobei nach der Integration $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist. Da diese Seiten des Dokumentes aus dem Jahr 1749 stammen, musste EULER die Entdeckung der sogenannten “Fourierkoeffizienten” schon lange vor seinen berühmten Publikationen über dieses Thema gelungen sein.

Methoden der Parameterbestimmung

Parameterbestimmungs- und Ausgleichsmethoden auf statistisch korrekter Grundlage entwickelten sich im 18. Jahrhundert erstaunlicherweise nur sehr langsam. Allgemein gültige und auf verschiedenste Problemstellungen anwendbare Verfahren gab es nicht. Die einzige “Regel”, mit der redundante Messdaten “standardmässig” reduziert wurden, war die Bildung des arithmetischen Mittels. Dennoch kristallisierten sich seit den 1740er Jahren gewisse Elemente heraus, die sich später als wichtige Bestandteile der Parameterbestimmungs- und Ausgleichstheorie erweisen sollten. Es handelt sich hierbei um die sogenannte “Methode der Bedingungsgleichungen”, das Aufstellen von sogenannten “Beobachtungsgleichungen” sowie das Formulieren von statistischen Auswertungskriterien. Diese Elemente entstanden im Zusammenhang mit der Konstruktion von Mondtafeln, mit der Verifizierung der Theorie zur Grossen Ungleichheit, mit der geodätischen Bestimmung der Figur der Erde sowie mit der Bestimmung der Sonnenparallaxe.

EULER war auf initiale Weise an der Einführung dieser Elemente beteiligt. Erstmals wurde er im Zusammenhang mit der Entstehung seiner Mondtheorie in der Mitte der 1740er Jahre mit dem Problem der Verarbeitung von Beobachtungen ernsthaft konfrontiert. Einerseits wollte er die aus seiner Theorie resultierenden Positionen des Mondes anhand von Finsternisbeobachtungen verifizieren, andererseits musste er die aus der Theorie folgenden Integrationskonstanten mit Hilfe der Beobachtungen bestimmen. Insbesondere war ihm bewusst, dass die theoretisch bestimmten Koeffizienten der Störterme, die sogenannten “Ungleichheiten”, wegen der näherungsweisen Lösung der Bewegungsgleichungen nicht exakt sein konnten und daher eine Anpassung notwendig war, um die Theorie in Einklang mit der Beobachtung zu bringen. Zahlreiche Notizbucheintragungen, Manuskripte und Publikationen EULERs zeugen von diesem Prozess.[189] Die aus

189 [Ms 276], [E 131], [E 836], [E 836a], [E 138], [E 139], [Ms 280], [Ms 282](a), [Ms 282](d),

der Mondtheorie resultierenden Störterme und ihre Koeffizienten flossen nicht direkt als “Ungleichheiten” in die Mondtafeln, sondern wurden derart korrigiert, dass die damit bestimmten Mondpositionen am besten mit geeigneten Beobachtungen, insbesondere mit den Zeiten einer Sonnenfinsternis oder Sternbedeckung durch den Mond, übereinstimmten. Dieses Korrigieren oder Anpassen der Theorie mit Hilfe redundanter Beobachtungen kann bereits als Parameterbestimmungsaufgabe betrachtet werden.

Dabei spielte die Methode der Bedingungsgleichungen eine wichtige Rolle. Mit dieser versuchte EULER auch in seiner ersten Preisschrift [E 120] zum Problem der Grossen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn die aus seiner Störungstheorie folgenden Positionen des Saturn mit Oppositionsbeobachtungen der letzten 150 Jahre in Einklang zu bringen, wie das unpublizierte Manuskriptfragment [Ms 269] belegt. Die darin enthaltenen Bedingungsgleichungen beziehen sich auf dieselben Datensätze,[190] wie sie in [E 120] verwendet wurden, weshalb anzunehmen ist, dass dieses Manuskript in Zusammenhang mit EULERs Arbeiten an [E 120] und somit im Jahr 1747 entstanden sein musste. Durch die Auswahl von “geeigneten” Beobachtungen und durch die Gruppierung der Bedingungsgleichungen in Gleichungssysteme, aus denen dann die gesuchten Parameter bestimmt wurden, war die Anwendung dieser Methode jedoch nicht ganz frei von einer gewissen Willkür.

In der Abhandlung [E 215] über die Bestimmung von Grösse und Figur (Abplattung) der Erde, die EULER am 11. September 1754 der Berliner Akademie vorlegte, machte er in §7 einen für die Geschichte der Auswertemethoden bedeutenden Schritt. Da jede Beobachtung mit Fehlern behaftet ist, sei es – so EULER – von Vorteil, mehrere Messungen (zur Bestimmung der gesuchten Grössen) zu verwenden, um nachher die Resultate vergleichen zu können. Zu diesem Zweck nimmt er die vier ihm damals bekannten Gradbogenmessungen von Südamerika, Südafrika, Frankreich und Lappland und stellt folgendes Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} A\left(1-\tfrac{3}{2}\delta\cos 1^\circ\right) &= 56753 + p\,\text{Toises} \\ A\left(1-\tfrac{3}{2}\delta\cos 66^\circ 36'\right) &= 57037 + q\,\text{Toises} \\ A\left(1-\tfrac{3}{2}\delta\cos 98^\circ 46'\right) &= 57074 + r\,\text{Toises} \\ A\left(1-\tfrac{3}{2}\delta\cos 132^\circ 40'\right) &= 57438 + s\,\text{Toises}\,, \end{aligned}$$

wobei $A = \dfrac{2aaee\,d\varphi\sqrt{2}}{(aa+ee)^{3/2}}$ für alle Messungen gleich ist. Er bemerkt in §8, dass p, q, r und s die unvermeidbaren Messfehler bedeuten, die sowohl positiv als auch negativ werden können und die man ebenfalls so klein wie möglich annehmen werde. Damit stellen diese Gleichungen sogenannte “Verbesserungsgleichungen” dar, die in der Folge für die gesamte Ausgleichsrechnung von zentraler Bedeutung werden

[Ms 283], [E 112], [E 113], [E 837], [E 838], [E 114], [E 117], [E 141] sowie Aufzeichnungen im fünften und sechsten Notizbuch [Ms 401] und [Ms 402].

190 Vergleiche die beiden Datensätze für (1598, 1657, 1686, 1716, 1745) und (1583, 1642, 1672, 1701, 1731) in [Ms 269], §184, fol. 1r, mit [E 120], §108 und §113.

sollten und die hier in dieser Form vermutlich erstmals in der wissenschaftlichen Literatur auftauchen. Aus dem Gleichungssystem leitete er in der Folge zwei Bedingungsgleichungen her, womit er die gesuchten Parameter bestimmte.

Einen wesentlichen Fortschritt in Richtung moderne Parameterbestimmung erbrachte EULER mit seiner Auswertung der Beobachtungen der Venustransits von 1761 und 1769 zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. Etwa ein Jahr nach dem Venustransit vom 3. Juni 1769, vermutlich noch vor dem 20. August 1770, legte er seine Auswertung und seine Resultate der Petersburger Akademie in der umfangreichen Abhandlung [E 397] vor. Er bestimmte darin die Sonnenparallaxe zu 8,80″, was ungefähr dem heutigen Wert entspricht. Die Stärke der EULERschen Methode besteht einerseits in der Art und Weise, wie er die Beobachtungsgleichungen formuliert, die hier vermutlich erstmals in dieser Klarheit und in dieser Bedeutung in Erscheinung traten. Andererseits besteht ihr Vorteil darin, dass er diese Beobachtungsgleichungen mit Bedingungsgleichungen verknüpft, wodurch er die Auswertung dem speziellen Problem optimal anpasst. Er ging vermutlich von der Idee aus, dass bei der Konjunktion zweier punktförmig oder ausgedehnt erscheinenden Himmelskörper der Winkelabstand $\odot v$ zwischen ihren Zentren sowohl für die Beobachtung als auch für das Auswertungsmodell die entscheidende Grösse darstellt. Selbst wenn diese Winkelseparation im Falle eines Venusdurchgangs nicht direkt gemessen werden konnte, führte sie EULER dennoch als sogenannte “Observable” in seine Beobachtungsgleichung ein:

$$\begin{aligned}\odot v = s + x\cos\sigma + y\sin\sigma - (\alpha+\beta)\,dt\cos\sigma + \gamma\,dt\sin\sigma \\ - ((a/b)-1)\,\pi\sin f\cos(\zeta-\sigma)\ .\end{aligned}$$

Diese bestehen aus der theoretisch berechneten Winkelseparation s, dem Positionskorrekturterm $x\cos\sigma + y\sin\sigma$, dem Zeitkorrekturterm $-(\alpha+\beta)\,dt\cos\sigma + \gamma\,dt\sin\sigma$ sowie dem eigentlichen Parallaxenterm $-((a/b)-1)\,\pi\sin f\cos(\zeta-\sigma)$, der die gesuchte Sonnenparallaxe π enthält. Im Positionskorrekturterm wird berücksichtigt, dass der Positionswinkel sowie die heliozentrischen Koordinaten der Venus, die aus den Planetentafeln und somit der Theorie abgeleitet werden, fehlerhaft sind. Der Zeitkorrekturterm berücksichtigt, dass die aus der Planetentheorie bzw. aus den Planetentafeln hergeleitete Bewegung der Venus sowie die beobachteten Kontaktzeiten mit Fehlern behaftet sind. Der Parallaxenterm berücksichtigt schliesslich die Beobachtungsgeometrie, insbesondere die Transformation zwischen Geozentrum und Beobachtungsort. Man darf mit Recht feststellen, dass diese Beobachtungsgleichung ein physikalisches Modell im modernen Sinn für das Zustandekommen der Beobachtung darstellt. EULER hat sie derart allgemein formuliert, dass er damit beliebige Messungen der Winkeldistanzen zwischen den Zentren von Sonnen- und Venusscheibe verarbeiten konnte. Da solche Beobachtungen im 18. Jahrhundert technisch aber noch nicht möglich waren, musste er seine Beobachtungsgleichung den durchgeführten Kontaktzeitmessungen anpassen. Dazu stellte er folgende Bedingungsgleichungen für die äusseren (+) und inneren $(-)$ Kontaktzeiten der Venus- mit der Sonnenscheibe auf:

$$\odot v = (\Delta \pm \delta) + (d\Delta \pm d\delta) \ ,$$

wobei $d\Delta$ und $d\delta$ die ebenfalls zu bestimmenden Unsicherheiten der scheinbaren Halbmesser der Sonnenscheibe Δ und Venusscheibe δ bezeichnen. Entscheidend für EULERs erfolgreiche und genaue Schätzung der Sonnenparallaxe war jedoch der Umstand, dass er gewisse Kriterien bei der Auswertung für die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werten, die heute sogenannten "Residuen", verwendete. Er schätzte die gesuchten Parameter derart, dass die Residuen möglichst klein und sowohl positive als auch negative Werte annehmen.

EDITIONSTECHNISCHE HINWEISE

Die Edition folgt inhaltlich der Originalpublikation, die in der jeweiligen bibliographischen Notiz nach dem Titel angegeben wird. Allfällig vorhandene Summarien werden zu Beginn einer Abhandlung wiedergegeben. In den folgenden Fällen wird vom Original abgewichen: Offensichtliche Druckfehler wurden stillschweigend korrigiert. Weniger offensichtliche Fehler, die leicht korrigiert werden konnten, wurden korrigiert, und es wird die fehlerhafte Stelle in einer Fussnote kenntlich gemacht. Fehler, deren Korrektur umfangreichere Änderungen erfordern würden, werden in einer Fussnote ausgewiesen, bleiben aber zusammen mit ihren Auswirkungen unkorrigiert. Ergänzungen des Herausgebers werden durch eckige Klammern gekennzeichnet. Abkürzungen und Ligaturen werden aufgelöst. Die Minuskeln "v" und "j" werden in lateinischen Texten durch "u" und "i" ersetzt. Die Interpunktion wurde gelegentlich zur besseren Verständlichkeit modifiziert. Winkelfunktionen wurden einheitlich ohne Abkürzungspunkt geschrieben, Arcusfunktionen einheitlich als solche gekennzeichnet. Die Anordnung des Formelsatzes erfolgte nach modernen Grundsätzen.

Die von Euler berechneten numerischen Werte sind öfters durch die Verwendung fehlerhafter Logarithmentafeln oder trigonometrischer Tafeln sowie durch akkumulierte Rundungsfehler verfälscht. Deshalb wurden sämtliche numerischen Resultate mit Fortran-Programmen bis zum Schlussergebnis nachgerechnet und die von Euler angegebenen Werte entsprechend korrigiert. Einzige Ausnahme bildet die Preisschrift E 384, wo die Korrektur eines folgenschweren algebraischen Fehlers umfangreiche Änderungen erfordert hätte (siehe den Kommentar zu E 384).

Bibliographische Hinweise werden in der Form [Autor Druckjahr] gegeben. Zitierte Werke Eulers werden mittels ihrer Eneström-Nummer angezeigt und in einem eigenen Verzeichnis aufgelistet.

Sämtliche Kalenderdaten werden nach dem gregorianischen Kalender angegeben.

KOMMENTARE ZU DEN ABHANDLUNGEN

E 416

Meditationes in quaestionem utrum motus medius planetarum semper maneat aeque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur ? et quaenam sit eius causa ?

In dieser im Laufe des Jahres 1759 verfassten Abhandlung versucht Karl Euler, die von der Pariser Akademie am 5. April 1758 gestellte Preisfrage zu beantworten, ob sich die mittleren Bewegungen der Planeten im Laufe der Zeit ändern und, falls dies so ist, die Gründe dafür zu finden.[191] 1760 wurde ihm der Preis für diese Arbeit zuerkannt. Mit dieser Frage beabsichtigte die Akademie, die möglichen Ursachen für die vermeintlichen, aus langen Beobachtungsreihen abgeleiteten säkularen Änderungen bestimmter Bahnelemente der Planeten und Kometen zu klären. Folgen diese Änderungen aus dem Gravitationsgesetz und ist dieses allenfalls zu modifizieren, oder sind andere physikalische Gründe wie z.B. das Vorhandensein eines widerstehenden Mediums für diese vermuteten Änderungen verantwortlich? Mit der Preisfrage für das Jahr 1762 zielte man genau in diese Richtung.[192]

Weil damals die Massen der Kometen weit überschätzt wurden, war es naheliegend, eine mögliche Ursache in nahen Begegnungen von Planeten mit Kometen zu suchen, die hin und wieder stattfinden. Anlass zu dieser Annahme gab zudem die erwartete Rückkehr des Kometen Halley. Karl Euler leitet daher zuerst Störungsgleichungen für die zeitliche Änderung der Knotenlänge und der Bahnneigung (bzgl. der Bahnebene des störenden Körpers), des Argumentes der Breite sowie der Distanz zur Sonne des gestörten Himmelskörpers ohne Näherungen her. Weil das resultierende gekoppelte Differentialgleichungssystem erster Ordnung wegen des irrationalen Faktors $\frac{1}{\tau^3}$ (wobei τ die Distanz zwischen störendem und gestörtem Körper bezeichnet) nicht direkt integriert werden kann, bestimmt Karl Euler die Störungen zur Zeit der engsten Begegnung des Kometen Halley im Frühjahr 1759 direkt aus den jeweiligen Differentialgleichungen, indem er diese Gleichungen für drei bis vier Tage vor und nach dem Zeitpunkt der grössten Annäherung auswertet. Die Änderungen der Bahnelemente der Erde stellt er in Abhängigkeit der Kometenmasse dar. Mit der Annahme, dass die Kometenmasse gleich der Erdmasse ist, findet er eine Vergrösserung der Halbachse der Erde und

191 Cf. *PV* 1758, p. 291: "S'il y a de l'alteration dans le mouvement moyen des Planetes, et supposé qu'il y en ait, quelles sont les causes de cette alteration."

192 Cf. *PV* 1762, p. 181: "Si les Planetes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leur mouvement ?". Für die Beantwortung dieser Frage erhielt Johann Albrecht Euler mit seiner Schrift [A 8] am 21. April 1762 von der Pariser Akademie ein "Accessit" zugesprochen, cf. *PV* 1762, p. 181, sowie [Eneström 1910/13], p. 219.

somit eine Abnahme ihrer mittleren Bewegung um die Sonne, woraus er schliesst, dass die Länge des Sonnenjahres zugenommen haben muss.

E 511

Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la Terre, causées par l'action de Venus

In diesen am 28. April 1777 der Petersburger Akademie vorgelegten "Betrachtungen" versucht Euler zu begründen, weshalb die von Lacaille 1758 und 1763 publizierten Tafeln[193] der Störungen der Venus in der heliozentrischen Länge der Erde nicht richtig sein können und deshalb völlig von seinen in E 425 berechneten und publizierten Werten abweichen. Euler führt drei Argumente auf: (1) Die zur Integration erforderliche Reihenentwicklung des irrationalen Terms $(1 - g\cos\omega)^{-\frac{3}{2}}$ konvergiere im Falle von Erde und Venus zu langsam und liefere deshalb unsinnige Werte. (2) Nur durch numerische Integration erhalte man die wahren Störungen der Venus, von denen Lacailles Tafelwerte deutlich abweichen würden. (3) Die Koeffizienten der aus der falschen Theorie resultierenden Formel könnten so bestimmt werden, dass sie auch den Störungsverlauf der richtigen Theorie exakt darstellen könnten. Diese Argumente sind jedoch nicht zutreffend, da Lexell, der die Berechnungen für Euler durchführte, ein Vorzeichenfehler unterlaufen ist und die resultierenden Tafelwerte in E 425 daher falsch sind. Euler hat offenbar die in [E 414] gefundene Formel für die Venusstörungen, die qualitativ gut mit jenen von Clairaut und Lacaille übereinstimmen, nicht mit dem vorliegenden Resultat verglichen. Desweitern scheint er die Theorie von Clairaut, aus der jene Formel folgt, mit der Lacaille seine Venustafeln berechnet hatte, nicht gekannt oder nur flüchtig studiert zu haben, denn Clairauts resultierende Reihe konvergiert relativ schnell und die daraus abgeleitete Formel zur Bestimmung der Störungen ist bis auf einen Skalierungsfaktor korrekt. Euler betont, dass nur die Methode der numerischen Integration zum Ziel führen könne:[194]

> Pour remédier à ce grand défaut je doute fort qu'on puisse découvrir une autre méthode, que celle, que j'ai exposée dans le Volume XVI des nouveaux Commentaires de l'Académie,[195] où j'ai formé le plan de poursuivre quasi pas à pas les deux Planètes dans leur mouvement et de déterminer pour chaque petit intervalle de tems l'effet, que l'action de Venus doit produire dans le mouvement de la Terre; et nôtre habile Astronome, Mr. Lexell, a bien voulu se charger de son exécution, en faisant tous les calculs laborieux et pénibles, qu'il exigeoit, et qui lui ont fourni la table, qu'on y trouve ajoutée, pour la correction, à employer dans le lieu de la Terre,

193 [Lacaille 1758], [Lacaille 1763].
194 Cf. [E 511], p. 300; h.v. p. 31.
195 [E 425].

pour chaque situation par rapport à Venus. Or comme l'effet est toujours proportionel à la masse de Venus, nous l'avons supposée égale à celle de la Terre, de sorte qu'en cas qu'elle fut ou plus grande ou plus petite, on n'auroit qu'à changer les nombres de la Table dans la même proportion[196].

E 512

Investigatio perturbationum, quae in motu Terrae ab actione Veneris producuntur

In dieser am 11. Mai 1780 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung untersucht Euler die Störungen, die in der Bewegung der Erde durch die Wirkung der Venus erzeugt werden. Obwohl Euler in E 511 noch die Methode der numerischen Integration, wie er sie in E 425 angewendet hatte, als die einzig richtige darstellte, kehrt er hier wieder zur Methode der Reihenentwicklung zurück, wobei er diese gegenüber der in [E 120] angewandten, ursprünglichen Methode leicht modifiziert, indem er Reihen herleitet, die wesentlich schneller konvergieren. Ausgehend von den Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten löst Euler die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten, ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, mit Hilfe von konvergenten Reihen, deren Koeffizienten aus jenen der ursprünglichen Reihe

$$(1 - n\cos\eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \text{etc.}$$

bestimmt werden können. Dabei nimmt Euler an, dass sich die Venus in der Ekliptik bewegt und dass Erde und Venus Kreisbahnen beschreiben. Für die Entfernung der Erde von der Sonne sowie für ihre heliozentrische Länge lässt er nur kleine Änderungen aufgrund der Störungen der Venus zu. Diese stellt er in Tabellenform dar, deren Berechnung Fuss durchgeführt hat. Da dieser mit der Genauigkeit der Rechnungen nicht zufrieden war, hat er schneller konvergierende Reihen zur Bestimmung der Koeffizienten entwickelt und die ganze Rechnung zur Bestimmung der Venusstörungen in einer eigenen Abhandlung nochmals durchgeführt.[197] Er fand einen fast identischen Störungsverlauf wie Lexell in seiner Nachbearbeitung von E 425, die nun beide mit den Tafeln von Lacaille bis auf kleine Differenzen aufgrund der unterschiedlich angenommenen Massen der Venus übereinstimmen.

E 548

De variis motuum generibus, qui in satellitibus planetarum locum habere possunt

Diese Abhandlung wurde am 16. Januar 1777 der Petersburger Akademie vorgelegt. Darin diskutiert Euler ganz bestimmte, einfache Fälle, die es ermöglichen sollen, die Theorie der Mondbahnbewegung besser zu verstehen und die bisherige

196 Cf. [E 425], § 41.
197 [Fuss 1783].

Mondtheorie zu verallgemeinern. Wäre die Entfernung des Mondes von der Erde, seine Bahnneigung gegenüber der Ekliptik oder seine Exzentrizität viel grösser, würden die mit der bisherigen Mondtheorie entwickelten Reihen viel mehr Terme erfordern, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen, oder sie würden sogar überhaupt nicht konvergieren. Damit aber auch diese Umstände irgend einmal in einer allgemeineren Theorie berücksichtigt werden können, untersucht er in der vorliegenden Abhandlung zuerst die einfachsten Fälle und erhofft sich, damit die Grundlagen zu einer verbesserten und allgemeiner gültigen Mondtheorie zu schaffen. Unter den Annahmen, die Mondbahn liege in der Ekliptikebene, die Erde bewege sich gleichförmig in einem Kreis um die Sonne und die Masse des Mondes sei verschwindend klein, leitet EULER zuerst die Bewegungsgleichungen als gekoppeltes System zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung in rechtwinkligen, sodann in Polarkoordinaten her:

$$\frac{(1+m)(ddv - v\,d\phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{\cos\eta}{u^3} - \frac{v}{u^3} - \cos\eta\,,$$
$$\frac{(1+m)(2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi)}{d\theta^2} = -\frac{\sin\eta}{u^3} + \sin\eta\,,$$

wobei v die geozentrische Entfernung des Mondes, ϕ seine geozentrische Länge von der Bezugsrichtung, η seine (geozentrische) Winkeldistanz von der Sonne, u seine Entfernung von der Sonne, m die Masse der Erde in Einheiten der Sonnenmasse und θ das Zeitelement, dargestellt als geozentrische Länge der Erde von der Bezugsrichtung, bedeuten. Zuerst sucht EULER unter allen Trajektorien, welche diese Bewegungsgleichungen erfüllen, jene, bei denen sich der Mond gleichförmig in einem Kreis um die Erde bewegt. Anhand einer einfachen, aus der zweiten Differentialgleichung folgenden Überlegung zeigt er, dass nur zwei Lösungen möglich sind, nämlich wenn der Winkel η konstant $= 0$ oder $= 180°$ ist. Dies führt auf die Bedingungsgleichung

$$-a(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{(1-a)^2} - 1\,,$$

woraus

$$a^3 = \frac{m}{3+m} \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt[3]{\frac{m}{3+m}} = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$$

folgt. Mit diesem Resultat bestimmt EULER sodann die Grösse der sog. *Einfluss-Bereiche* oder *Einfluss-Sphären* der Planeten Erde, Jupiter und Saturn. Als Radius der Einfluss-Sphäre findet er für die Erde $a = \frac{1}{100}$, für Jupiter $a = \frac{1}{15}$ und für Saturn $a = \frac{1}{21}$. Da der Radius der Einfluss-Sphäre der Erde im Vergleich zu ihrer Entfernung zur Sonne sehr klein ist, kann für das System Sonne–Erde–Mond der Term u^{-3} in eine Reihe entwickelt werden, die rasch konvergiert. Damit bestätigt EULER das oben erzielte Resultat für den Fall, bei dem sich der Mond in einer Kreisbahn gleichförmig um die Erde bewegt. Nun untersucht EULER die Bewegung des Mondes, wenn seine Bahn nur sehr wenig von der Kreisbahn abweicht.

Es gelte also für seine Entfernung von der Erde und seine mittlere Bewegung:

$$v = a(1 + \alpha \cos 2\eta) \quad \text{sowie} \quad \frac{d\phi}{d\theta} = n(1 + \beta \cos 2\eta)\ ,$$

wobei a der Kreisbahnradius der Mondbahn, $\eta = \phi - \theta$ die Winkeldistanz (Elongation) des Mondes von der Sonne, $n = \frac{d\phi}{d\theta}$ das Verhältnis zwischen den Änderungen der geozentrischen Längen von Mond und Sonne bedeuten. α und β stellen darin sehr kleine, konstante Grössen dar. Aus dem daraus folgenden Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{ddv}{d\theta^2} &= -4a\alpha(n-1)^2 \cos 2\eta \\ \frac{v\, d\phi^2}{d\theta^2} &= ann(1 + (\alpha + 2\beta) \cos 2\eta) \end{aligned}$$

folgt für den (mittleren) Kreisbahnradius

$$a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$$

und für die geozentrische Länge des Mondes

$$\phi = n\theta + \frac{\beta n \sin 2\eta}{2(n-1)}\ .$$

Schliesslich untersucht EULER den Fall, bei dem neben den soeben besprochenen Variationen auch eine kleine Exzentrizität (als Abweichung von der Kreisbahnform) hinzukommt. Zu diesem Zweck setzt er nun

$$\begin{aligned} v &= a(1 + \alpha \cos 2\eta + \gamma \cos \zeta)\ , \\ \frac{d\phi}{d\theta} &= n(1 + \beta \cos 2\eta + \delta \cos \zeta)\ , \end{aligned}$$

wobei die durch die Exzentrizität γ hervorgerufene Änderung der mittleren Anomalie ζ durch $d\zeta = i\, d\theta$ gegeben und i noch zu bestimmen ist. Die konstanten Koeffizienten γ und δ seien wiederum sehr kleine Grössen. Da zudem die Koeffizienten α und β bereits bekannt sind, muss das Differentialgleichungssystem nur noch für

$$v = a(1 + \gamma \cos \zeta) \quad \text{und} \quad \frac{d\phi}{d\theta} = n(1 + \delta \cos \zeta)$$

gelöst werden.

Er findet $\gamma = -\frac{1}{2}\delta$, wobei δ unbestimmt bleibt, und $i = \sqrt{\left(nn - \frac{3}{2}\right)}$.

E 549

De motibus maxime irregularibus, qui in systemate mundano locum habere possent, una cum methodo huiusmodi motus per temporis spatium quantumvis magnum prosequendi

Diese Abhandlung wurde am 23. Januar 1777 der Petersburger Akademie vorgelegt und ist als Fortsetzung der Abhandlung E 548 zu verstehen, worin Euler die Grösse der Einfluss-Sphären der Erde und anderer Planeten bestimmt hat. Beschreibt ein Körper seine Bahn stets innerhalb des Einflussbereiches eines Planeten, gehört er zur Klasse der Monde oder Satelliten. Bewegt er sich stets ausserhalb der Einfluss-Sphäre eines Planeten, befindet er sich nur im Einflussbereich der Sonne und muss daher zur Klasse der Hauptplaneten gezählt werden. Je näher sich die Bahn des Körpers im Grenzbereich einer Einfluss-Sphäre befindet, um so gestörter und unregelmässiger muss seine Bewegung sein. Zur dritten Klasse von Körpern zählt Euler jene, die sich derart bewegen, dass ihre Bahn einmal innerhalb der Einfluss-Sphäre eines Planeten, einmal ausserhalb jener verläuft. Solche Körper können also sowohl Satelliten als auch Hauptplaneten sein. Ihre Bewegungen wären aber höchst unregelmässig, so dass man ihre Positionen mit den vorhandenen analytischen Theorien laut Euler nicht ohne grossen Fehler vorhersagen könnte. Nur die vollkommene Kenntnis aller Störungen würde es erlauben, auch die Bahnen solcher Körper zu beschreiben. Da aber keine umfassende, rein analytische Theorie besteht, mit der auch solche Probleme mit genügender Genauigkeit gelöst werden könnten, greift Euler auf seine schon früher entwickelte Methode der numerischen Integration zurück[198] und löst damit das in E 548 (§ 9 bzw. § 20) hergeleitete, gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für die Bewegung des Mondes, das er in ein System erster Ordnung verwandelt:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\theta} &= qqv - \frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1+3\cos 2\eta)\\ \frac{dq}{d\theta} &= -\frac{2pq}{v} - \frac{3}{2}\sin 2\eta\ ,\end{aligned}$$

wobei v die Entfernung des Mondes von der Erde, $\eta = \phi - \theta$ die geozentrische Winkeldistanz zwischen Mond und Sonne als Differenz ihrer geozentrischen Längen ϕ und θ, $m = \frac{3}{1000000}$ die Masse der Erde in Sonnenmassen sowie $p = \frac{dv}{d\theta}$ und $q = \frac{d\phi}{d\theta}$ bedeuten. Die für die numerische Integration benötigten zweiten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}\frac{ddp}{d\theta^2} &= -3pqq + \frac{2mp}{v^3} + \frac{1}{2}p(1+3\cos 2\eta) - 3v(2q-1)\sin 2\eta\\ \frac{ddq}{d\theta^2} &= -q(2qq+1) + \frac{2mq}{v^3} + \frac{6ppq}{vv} + \frac{3p\sin 2\eta}{v} - 3(2q-1)\cos 2\eta\ .\end{aligned}$$

198 Cf. [E 398].

Es ist zu betonen, dass es EULER hier offenbar nur um die Demonstration der Methode der numerischen Integration geht, die er am (einfachen) Beispiel des Systems Sonne–Erde–Mond illustriert. Die Integrationsmethode entspricht genau dem Verfahren, wie er es in seiner Abhandlung E 398 beschreibt. Er entwickelt die Ortskomponenten v und ϕ sowie die Geschwindigkeitskomponenten p und q in eine Taylorreihe mit dem zeitlichen Integrationsintervall ω. Wird dieses genügend klein gewählt, können die Terme der Ordnung vier und höher in ω vernachlässigt werden. Mit Hilfe der Anfangswerte von v, ϕ, p und q zur Ausgangsepoche θ ergeben sich die Orts- und Geschwindigkeitskomponenten v', ϕ', p' und q' für den Zeitpunkt $\theta+\omega$ zu

$$\begin{aligned} v' &= v + \omega p + \frac{\omega^2\,dp}{2\,d\theta} + \frac{\omega^3\,ddp}{6\,d\theta^2} \\ \phi' &= \phi + \omega q + \frac{\omega^2\,dq}{2\,d\theta} + \frac{\omega^3\,ddq}{6\,d\theta^2} \\ p' &= p + \frac{\omega\,dp}{d\theta} + \frac{\omega^2\,ddp}{2\,d\theta^2} \\ q' &= q + \frac{\omega\,dq}{d\theta} + \frac{\omega^2\,ddq}{2\,d\theta^2}\ . \end{aligned}$$

Damit bestimmt EULER die Bahntrajektorie eines fiktiven Mondes der Erde mit folgenden Anfangsbedingungen:

1. Geozentrische Länge der Sonne $\theta = 0$, deren Entfernung von der Erde $= 1$ AE (Astronomische Einheit).
2. Geozentrische Länge des Mondes $\phi = 0$, woraus die geozentrische Winkeldistanz zwischen Sonne und Mond $\eta = 0$ wird.
3. Entfernung des Mondes von der Erde[199] $v = 0.008$ AE.
4. Komponenten seiner Anfangsgeschwindigkeit $\frac{dv}{d\theta} = p = 0$ und $\frac{d\phi}{d\theta} = q = 2$.

Für die ersten beiden Epochen integriert er über $\omega = 1° \ldots 5°$, ab der dritten Epoche über $\omega = 1° \ldots 3°$. Er erstreckt seine Integration bis $\theta = 30°$.

EULERs Integration wurde mit einem Computer-Programm nachgerechnet. Die Unterschiede zwischen den nachgerechneten und den von EULER angegebenen numerischen Werten stammen vorwiegend aus den von ihm vorgenommenen Rundungen oder aus den ungenauen Logarithmenwerten der von ihm verwendeten Tafeln. Das Resultat (für $p = 0.0$ und $q = 2.0$) bestätigt scheinbar

199 Man bemerke: Die mittlere Entfernung des wahren Mondes von der Erde beträgt 0.002570 AE. Der Radius der Einfluss-Sphäre der Erde beträgt nach EULERs Kriterium $\sqrt[3]{\frac{m}{3}} = 0.01$ (cf. [E 548], § 15), der Körper liegt somit zur Anfangsepoche mit $v = 0.008$ AE noch innerhalb des Einflussbereiches der Erde und dürfte diese (gemäss diesem Kriterium) daher nicht verlassen können. EULER versucht im vorliegenden Beispiel, diese Aussage durch die numerische Integration zu bestätigen.

seine Schlussfolgerung, dass der Körper innerhalb der Einfluss-Sphäre der Erde bleibt. Die Jacobi-Konstante für die von EULER gewählten Anfangsbedingungen beträgt 3.00086866. Die Funktion $f(y_1)$ (cf. [Beutler 2005], p. 160) weist für diese Jacobi-Konstante keine Nullstellen um die Erde auf. Der Körper wird demnach die "Einfluss-Sphäre" der Erde verlassen. EULERs Folgerung ist zwar auf Grund seines Resultates richtig, die Integration allein gibt aber keinen Aufschluss darüber, ob ein solcher Körper an die Erde gebunden bleibt oder nicht. Mit EULERs Integrationsverfahren würde der Körper sogar auf die Erde abstürzen. Weitere mit dem Computer berechnete Trajektorien für verschiedene Anfangswerte von p und $q = 2.0$ zeigen, dass beim gewählten Integrationsverfahren Körper mit $p \geq 0.00307$ die Einfluss-Sphäre der Erde verlassen würden. Dieses quantitative Resultat bestätigt hingegen EULERs qualitative Aussage, dass der Körper bei "schräg" (nach aussen) gerichteter Anfangsgeschwindigkeit den Einflussbereich der Erde verlässt und in die Einfluss-Sphäre der Sonne übergeht. Dann aber werden auch die der numerischen Integration zugrunde gelegten Differentialgleichungen nicht mehr gelten, da die Näherung bzw. die Reihenentwicklung für die Terme mit $\frac{1}{vv}$ entweder ungenügend wird oder gar nicht mehr konvergiert.

E 578

De perturbatione motus planetarum et cometarum

Diese am 5. Dezember 1776 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung ist einer der letzten Beiträge, die EULER der Störungstheorie gewidmet hat. Darin leitet er Differentialgleichungen für die Bahnelemente in Abhängigkeit von den Störkraftkomponenten in und senkrecht zur momentanen (oskulierenden) Bahnebene des betrachteten Körpers, also die sog. *planetaren* oder *Gauss'schen Störungsgleichungen*, her, wobei diese Störkraftkomponenten als Resultierende der Beiträge aller störenden Himmelskörper betrachtet werden. Bemerkenswert ist die Art und Weise, wie EULER zu diesen Störungsgleichungen gelangt: Aus den Bewegungsgleichungen leitet er zuerst durch Integration die Gleichung für den Bahndrehimpuls her, woraus er mittels Polarkoordinaten eine erste Differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit bzw. für die wahre Anomalie erhält. Sodann zerlegt er die resultierende Störkraft in die Radial- und Tangentialkomponente und leitet mit diesen eine zweite Differentialgleichung für den Betrag des Bahndrehimpulses her. Nachdem EULER den Energiesatz in rechtwinkligen und Polarkoordinaten hergeleitet hat, untersucht er den Einfluss einer Störkraft auf die Bahnlageelemente, wobei er deren Änderungen auf eine mittlere Bahnebene bezieht, die sich aus allen oskulierenden Bahnebenen ergibt. Sodann führt er mit Hilfe der Polargleichung der Ellipse die übrigen Bahn(form)elemente ein und leitet für die in der momentanen Bahnebene liegenden Radial- und Tangentialkomponenten der resultierenden Störkraft die entsprechenden Störungsgleichungen her.

Im siebten und letzten Kapitel dieser Abhandlung beschreibt Euler ein Verfahren zur Bestimmung der Störungen, die ein Himmelskörper von beliebig vielen anderen erfährt. Er bezieht diese wiederum auf eine fiktive mittlere Bahnebene, die man heute als *invariable* oder *Laplacesche Bahnebene* bezeichnen würde, und bestimmt für jeden beliebigen Zeitpunkt $t = t_0 + n\,dt$, der seit der Anfangsepoche t_0 verflossen ist, die resultierenden Störkraftkomponenten und daraus mittels der planetaren Störungsgleichungen die Änderungen der Bahnelemente und die zu ihrer Bestimmung benötigten Bahndrehimpulskomponenten bezüglich dieser mittleren Ebene, wobei dt genügend klein zu wählen ist. Dieses Verfahren entspricht genau der schrittweisen numerischen Integration der Störungsgleichungen, wodurch Euler nochmals zum Ausdruck bringt, dass nur mit spezieller Störungsrechnung die gegenseitigen Störungen und Bewegungen beliebig vieler Körper bestimmt werden können.

E 626

De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta

Diese Abhandlung wurde am 12. Dezember 1776 der Petersburger Akademie präsentiert und stellt den letzten Versuch Eulers dar, wenigstens das kollineare eingeschränkte Dreikörperproblem zu lösen. Er betrachtet also nur den Fall dreier Körper, die sich in einer Geraden gegenseitig anziehen, da nach seiner Ansicht zuerst dieser einfachste Fall gelöst werden muss, bevor man sich an allgemeinere Dreikörperprobleme heranwagen sollte. Aus dem gekoppelten System der drei Bewegungsgleichungen leitet Euler zuerst die Gleichungen für den Schwerpunkt des Systems her, das sich stets geradlinig gleichförmig bewegt. Sodann gewinnt er durch geeignete Kombination der einzelnen Bewegungsgleichungen eine Gleichung für die "lebendige Kraft" (das sog. Energieintegral), die besagt, dass die Summe der lebendigen Kräfte (die sog. Gesamtenergie) stets gleich bleibt. Mit Hilfe dieser Gleichung ersten Grades erhält er eine ähnliche Gleichung zweiten Grades. Nun drückt er die drei Bewegungsgleichungen in Relativkoordinaten aus, die sich durch geeignete Kombination auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung reduzieren lassen. Sodann drückt er die Bewegung des Schwerezentrums ebenfalls in diesen Relativkoordinaten aus und bestimmt die Positionen der drei Körper sowie die Energiegleichung bezüglich des Systems, in dem sich das Schwerezentrum in Ruhe befindet. Da sich weder die drei allgemeinen Bewegungsgleichungen noch die daraus hergeleitete Energiegleichung integrieren lassen, beschränkt sich Euler auf den Fall, in dem die beiden Relativdistanzen stets ein festes Verhältnis untereinander aufweisen. Daraus folgt eine charakteristische Gleichung fünften Grades, die mindestens eine reelle Wurzel hat. Euler diskutiert diese Gleichung für die Spezialfälle, bei denen die beiden randständigen Körper dieselben Massen haben oder eine der Massen verschwindet.

E 834

Astronomia mechanica

Das Hauptwerk EULERs zur Theorie der Himmelsmechanik ausgedehnter Körper bildet seine zwischen 1758 und 1759 verfasste, aber erst 1862 posthum erschienene *Astronomia mechanica*.[200] Dieses umfangreiche Werk entstand im Zusammenhang mit den bahnbrechenden Arbeiten zur Starrkörperrotation, deren Ergebnisse EULER sogleich auf die Himmelsmechanik des Zwei- und Dreikörperproblems anzuwenden versuchte. Darin formuliert er die theoretischen Grundlagen zur Himmelsmechanik ausgedehnter Körper und präzisiert damit die universelle Gültigkeit des Gravitationsgesetzes in letzter Konsequenz. Zuerst bestimmt er die Kräfte, mit denen ausgedehnte Himmelskörper andere punktförmige oder ausgedehnte Himmelskörper an sich ziehen. Sodann studiert er die Bewegung zweier sphärischer Körper, die sich gegenseitig anziehen. Als Spezialfall davon untersucht er anschliessend die Bewegung eines Massenpunktes um einen Zentralkörper, dessen als rotationssymmetrisch angenommene Figur sphärisch oder sphäroidisch (abgeplattet) ist. Weiter stellt er das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für die Bewegungen dreier sphärischer Körper auf, die sich stets in derselben Ebene befinden. Als Anwendung davon behandelt er schliesslich "eingeschränkte" Spezialfälle dieses Problems. EULER kann die auftauchenden Differentialgleichungssysteme selbst für Spezialfälle vermeintlich wegen der noch unzureichend entwickelten Analysis nicht in analytisch geschlossener Form, sondern für bestimmte Fälle nur näherungsweise lösen. Dies mag der Grund dafür sein, dass er sein Werk nicht veröffentlichte.

In den §§ 38–53 löst EULER folgendes Problem: Es ziehe ein endlicher Körper von gegebener Figur ein Teilchen an, das sich in einer gegebenen und bedeutenden Entfernung befindet; man bestimme sowohl die Grösse als auch die Richtung der Kraft, durch die das Teilchen bewegt wird. EULER entwickelt den Distanzterm v^{-3}, wobei v die Entfernung des Teilchens von einem beliebigen Massenelement dM des Körpers bezeichnet, in eine Reihe und erhält für die drei rechtwinkligen Kraftkomponenten $H\alpha$, $H\beta$ und $H\gamma$ entlang der Hauptträgheitsachsen:

$$\begin{aligned} H\alpha = \frac{Mm\cos\alpha}{hh}\bigg(1 + \frac{3aa}{2hh}\Big(3 - 5\cos^2\alpha\Big) + \frac{3bb}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\beta\Big) \\ + \frac{3cc}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big)\bigg) \\ H\beta = \frac{Mm\cos\beta}{hh}\bigg(1 + \frac{3bb}{2hh}\Big(3 - 5\cos^2\beta\Big) + \frac{3cc}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big) \\ + \frac{3aa}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\alpha\Big)\bigg) \end{aligned}$$

200 Das Originalmanuskript befindet sich im Archiv der Petersburger Akademie der Wissenschaften und ist in [Kopelevič et al. 1962], p. 85, unter Nr. 268 registriert.

$$H\gamma = \frac{Mm\cos\gamma}{hh}\left(1 + \frac{3cc}{2hh}\left(3 - 5\cos^2\gamma\right) + \frac{3aa}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\alpha\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3bb}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\beta\right)\right) ,$$

wobei h die Distanz zwischen dem Teilchen und dem Trägheitszentrum, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus des Teilchens bezüglich den Hauptträgheitsachsen und Maa, Mbb, Mcc die Hauptträgheitsmomente bedeuten. Daraus bestimmt EULER die resultierende Kraft ("vis aequivalens") zu

$$\frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\alpha\right) + \frac{3bb}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\beta\right) + \frac{3cc}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\gamma\right)\right) ,$$

sowie deren Richtung als Winkelabweichung

$$\frac{3}{hh}\sqrt{\left((aa-bb)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + (aa-cc)^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma + (bb-cc)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma\right)}$$

von der Verbindungslinie zwischen den Zentren der beiden Körper. EULER betont, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, diese Kraftkomponenten darzustellen und gibt zwei weitere Varianten an. Mit Hilfe dieses Resultates löst er anschliessend folgendes Problem: Man bestimme die Kraft, mit der ein endlicher (ausgedehnter) Körper M von einem sehr weit entfernten (Massen-)Punkt oder einem Körper, dessen Masse N als in einem Punkt vereint angenommen werden darf, angezogen und durch jene bewegt wird. EULER findet für die rechtwinkligen Komponenten $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ dieser Kraft

$$N\alpha = \frac{MN\cos\alpha}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}\left(3 - 5\cos^2\alpha\right) + \frac{3bb}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\beta\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3cc}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\gamma\right)\right)$$
$$N\beta = \frac{MN\cos\beta}{hh}\left(1 + \frac{3bb}{2hh}\left(3 - 5\cos^2\beta\right) + \frac{3cc}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\gamma\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3aa}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\alpha\right)\right)$$
$$N\gamma = \frac{MN\cos\gamma}{hh}\left(1 + \frac{3cc}{2hh}\left(3 - 5\cos^2\gamma\right) + \frac{3aa}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\alpha\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3bb}{2hh}\left(1 - 5\cos^2\beta\right)\right) ,$$

deren ins Trägheitszentrum J von M zeigende Resultante sich zu

$$JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{5aa}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\alpha\right) + \frac{5bb}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\beta\right) + \frac{5cc}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\gamma\right)\right)$$

ergibt. Wiederum gibt EULER zwei weitere Darstellungen dieser Kräfte. Auf Grund dieser Resultate bemerkt er, dass im Allgemeinen die resultierende Anziehungskraft eines ausgedehnten Körpers weder durch sein Trägheitszentrum geht noch genau dem Abstandsquadrat umgekehrt proportional ist.

Dieser posthum erschienenen Arbeit fügte EULER einen Anhang bei mit dem Titel "Digressio, qua effectus cometae Anno 1759 expectati in motu terrae perturbando investigatur", in dem er den vermeintlichen Störeinfluss des Kometen Halley bei seinem Wiedererscheinen im Jahr 1759 auf die Bahnelemente der Erde, insbesondere auf die grosse Halbachse der Erdbahn, bestimmt. Dabei nimmt er die Masse des Kometen gleich der Erdmasse an. Dieser Anhang scheint in engem Zusammenhang mit der Abhandlung E 416 seines Sohnes KARL EULER zu stehen, indem hier die ausführlichen Berechnungen dargelegt werden. Die Resultate der "Conclusio" dieses Anhangs wurden in E 416 diskutiert und publiziert. EULERs Methode zur Bestimmung der Störungen wurde in ein Computerprogramm umgesetzt und damit seine Resultate nachgeprüft. Sie zeigen, dass sich sämtliche Bahnelemente durch die nahe Begegnung des Kometen zwar ändern, nach der Begegnung aber wieder ihre ursprünglichen Werte annehmen.

E 835

Solutio duorum problematum, Astronomiam mechanicam spectantium

In dieser vermutlich zwischen 1745 und 1749 verfassten Abhandlung formuliert und löst EULER folgendes Problem I: Gegeben sei ein sphäroidischer, aus homogener Materie zusammengesetzter Körper, der mit einer Kraft gegen ein Kraftzentrum O gezogen wird, die umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung ist. Man finde die resultierende Richtung, in welche dieser Körper getrieben wird. EULER betrachtet zu diesem Zweck acht Massenpunkte des als rotationssymmetrisch gedachten Sphäroids mit Zentrum C, die bezüglich der Äquatorebene des Sphäroids und bezüglich der durch O verlaufenden und auf dieser senkrecht stehenden Ebene symmetrisch angeordnet sind. Sodann bestimmt er die auf diese acht Partikel des Sphäroides durch das Gravitationszentrum O wirkenden und bezüglich dieser beiden Ebenen orthogonalen Kraftkomponenten. Mit Hilfe der in Reihen entwickelten Entfernungen der betrachteten Massenelemente vom Kraftzentrum O liefert die Integration der Kraftkomponenten über den ganzen sphäroidischen Körper die resultierenden Gesamtkraftkomponenten

$$\text{Kraft } Yy = \frac{Mkkg}{h^3}\left(1 - \frac{9bb}{10hh} - \frac{3aa}{5hh} + \frac{3aaff}{2h^4} + \frac{3bbgg}{2h^4}\right)$$
$$\text{Kraft } Xx = \frac{Mkkf}{h^3}\left(1 - \frac{3bb}{10hh} - \frac{6aa}{5hh} + \frac{3aaff}{2h^4} + \frac{3bbgg}{2h^4}\right) ,$$

wobei a der Äquatorradius, b der Polradius, h die Entfernung des Kraftzentrums O vom Zentrum C des Sphäroides, $M = \frac{4}{3}\pi aab = \frac{4}{3}\pi nb^3$ die Masse des Sphäroides, f und g die (x- und z-)Koordinaten von O bezeichnen. Die Kraft, mit der eine Partikel gegen O gezogen wird, bezeichnet EULER mit $\frac{kk}{vv}$, wobei k die Proportionalitätskonstante und $v = \sqrt{\left(yy+(f-x)^2+(g-z)^2\right)}$ dessen Entfernung von O bedeuten. Die Richtung der von O auf das Sphäroid wirkenden resultierenden Gesamtkraft verläuft nicht durch das Zentrum C des Sphäroides, sondern durch einen Punkt c in der durch C verlaufenden und senkrecht auf der Äquatorebene stehenden Geraden. Diese Gesamtkraft bestimmt EULER zu

$$c\,O = \sqrt{(Xx \cdot Xx + Yy \cdot Yy)} = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(2gg-ff)}{10h^4}\right) .$$

Schliesslich zerlegt EULER die resultierende Gesamtkraft $c\,O$ in eine Zentralkraftkomponente CO und eine Normalkraftkomponente $C\gamma$, die ein Drehmoment auf das Sphäroid ausübt:

$$\begin{aligned} CO &= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(3+5\cos 2\varphi)}{20hh}\right) \\ C\gamma &= \frac{Mkk}{hh} \cdot \frac{3(aa-bb)\sin 2\varphi}{10hh} , \end{aligned}$$

wobei $g = h\cos\varphi$ und $f = h\sin\varphi$ gesetzt wurde.

EULER formuliert auch ein Problem II, die Abhandlung bricht indessen ohne Lösung ab.

E 841

Recherche des inégalités causées au mouvement des planètes par des forces quelconques

Die zu Beginn dieser postum publizierten Abhandlung[201] gefundenen Störungsgleichungen wendet EULER zur Bestimmung der Bewegung eines Satelliten mit Masse E sowie dessen Hauptplaneten mit Masse C an, wobei die Sonne mit Masse F den Störkörper darstellt. Da deren Distanz y zum Zentralköper C viel grösser ist als die Distanz x des Satelliten zu C, lässt sich der irrationale Faktor $\frac{1}{z^3}$ in eine rasch konvergente Reihe entwickeln, wobei z die Entfernung zwischen E und F bezeichnet. Die Struktur der resultierenden Differentialgleichungen für die zeitlichen Änderungen der Bahnelemente erlaubt es EULER, zwischen drei Arten von störungsbedingten Ungleichheiten – primäre, parallaktische und abgeleitete

201 Das Original-Manuskript ist in [Kopelevič et al. 1962], p. 84, unter Nr. 264 verzeichnet und seine Verfassungszeit in die 1750er Jahre gesetzt. Da der Inhalt dieser Abhandlung eng mit der Preisschrift [E 414] für das Jahr 1754 bzw. 1756 verbunden ist, dürfte sie vermutlich bereits in den frühen 1750er Jahren entstanden sein.

Ungleichheiten – zu unterscheiden, die durch die jeweiligen Massen- und Distanzverhältnisse bestimmt werden, wobei die Massen- bzw. Kraftverhältnisse durch $m = \frac{F}{\sqrt{A(C+E)}}$, $n = \frac{E}{\sqrt{A(C+F)}}$ gegeben sind und A eine Skalierungskonstante bedeutet. Die primären Ungleichheiten sind Terme der Form $\frac{mx}{y^3}$, die parallaktischen sind Terme der Form $\frac{mxx}{y^4}$, und die abgeleiteten Ungleichheiten sind jene Terme, welche die Faktoren mm oder nn enthalten. Die zeitlichen Änderungen der Bahnelemente des Satelliten auf Grund der Hauptungleichheiten bestimmt Euler durch Integration der genäherten Störungsgleichungen mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten, wobei er Terme der Ordnung zwei und höher vernachlässigt.

Euler leitet zuerst die *allgemeinen Störungsgleichungen* für die Bahnelemente (Bahnhalbparameter, Bahnexzentrizität, wahre Anomalie sowie Länge bzw. Argument der Breite) als Funktion der Störkräfte her, wobei er annimmt, dass sich der in Ruhe befindende Zentralkörper mit Masse C sowie die beiden sich gegenseitig störenden Körper mit Massen E und F in der gleichen Ebene bewegen. Die resultierenden Differentialgleichungen für die zeitlichen Änderungen der Bahnelemente werden ohne Näherungen hergeleitet und gelten somit exakt. Damit sie gelöst werden können, betrachtet Euler die Bedingungen für die Distanz- und Massenverhältnisse, die erfüllt sein müssen, damit die Bewegungen nicht stark von den Keplerschen Gesetzen abweichen und somit eine Integration durch Näherungen herbeigeführt werden kann. Dadurch lässt sich in besonderen Fällen der irrationale Fakor $\frac{1}{z^3}$ in eine schnell konvergente Reihe entwickeln, wobei z den gegenseitigen Abstand der beiden sich störenden Körper E und F bezeichnet.

INDEX DER ABHANDLUNGEN

Insunt in hoc volumine indicis ENESTROEMIANI commentationes
416, 511, 512, 548, 549, 578, 626, 834, 835, 841

MEDITATIONES
IN QUÆSTIONEM

Utrum motus medius Planetarum ſemper maneat æque velox, an ſucceſſu temporis quampiam mutationem patiatur? & quænam ſit ejus cauſa?

Ipſe Pater ſtatuit, quævis cœli aſtra moveret.

A CAROLO EULER, LEONARDI Filio.

Præmio donatæ anno M. DCC. LX.

Prix de 1760. A

Commentatio 416 indicis ENESTROEMIANI
Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'académie royale des sciences **8**, 1771
Sixième pièce, 44 p.

MEDITATIONES IN QUAESTIONEM UTRUM MOTUS MEDIUS PLANETARUM SEMPER MANEAT AEQUE VELOX, AN SUCCESSU TEMPORIS QUAMPIAM MUTATIONEM PATIATUR? ET QUAENAM SIT EIUS CAUSA?

Commentatio 416 indicis ENESTROEMIANI
Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'académie royale des sciences **8**, 1771
Sixième pièce, 44 p.

(Kommentar zu E 416)

1. Planetarum motus medius, utrum perpetuo eandem celeritatem conservet, an cuipiam variationi labente tempore sit obnoxius? quaestio est eo magis ardua, quod ei in Astronomia ne locus quidem relinqui videtur. Cum enim ab Astronomis cuiusque planetae motus medius ex collatione antiquissimarum observationum cum novissimis definiri soleat, dum spatium interea confectum in partes tempori proportionales dispertiunt, hoc modo omnis inaequalitas a motu medio excluditur: neque motus medius cuiusquam planetae. Recte assignatus putatur, nisi cum vetustissimis observationibus aeque conveniat atque cum iis, qua hodie instituuntur. Hoc quoque modo anni quantitas recte determinari existimatur, si ad tempora HIPPARCHI remota aequinoctiis ab eo observatis satisfaciat: similisque est ratio reliquorum planetarum, quorum motus medius per cuiusque tempus periodicum determinatur.

2. Ob errores autem observationum Astronomi coacti fuere ad tempora maxime remota confugere, ut errores inde in motum medium redundantes quam minimi redderentur, quod remedium potissimum circa instaurationem Astronomiae aliquot abhinc seculis necessarium erat. Postquam autem observationes maiori cura institui sunt captae, pari atque meliori successu motus planetarum medios ex comparatione recentissimarum observationum cum aliis non ita pridem institutis definire licuit. Quo in negotio aliquod discrimen a conclusionibus superioribus est animadversum, quod utrum ab erroribus observationum profiscatur, an revera cuipiam perturbationi in motu planetarum factae sit tribuendum, incertum videri debebat, antequam Theoria adiuti pleniorem motuum coelestium cognitionem essemus adepti.

3. Notabile imprimis est discrimen, quod in quantitate anni solaris diverso modo determinata cernitur. Comparatio enim observationum HIPPARCHI cum PTOLEMAEI aliquot minutis annum maiorem praebet, quam si PTOLEMAEI observationes cum recentioribus comparentur. Quae differentia, sive in observationum errores sit reiicienda, sive inde oriatur, quod reductio temporum a PTOLEMAEO notatorum ad calendarium Julianum minus sit certa, nulla causa satis

firma reperitur, cur anni quantitatem perpetuo eandem fuisse statuamus. De Luna quidem vix iam dubitare licet, quin eius motus medius nunc aliquanto sit incitatior quam olim: tum vero etiam in Saturni et Jovis motu medio quaedam mutatio agnosci debet, quemadmodum sollertissimus motuum coelestium scrutator Le Monnier evicit[1]. Ex quo opinio de perpetua horum motuum constantia nunc quidem penitus profligata est censenda.

4. Quodsi hae inaequalitates ob parvitatem a pertinacibus veteris opinionis propugnatoribus adhuc in dubium vocentur, iis profecto Cometa initio huius anni visus omnem defensionem adimere debet.[2] Cum enim hic Cometa idem sit, qui Anno 1682 apparuit,[3] eius tempus periodicum, in quo iam insigne discrimen ex praecedentibus apparitionibus erat animadversum, non solum fere ad biennium est protractum, sed etiam haec retardatio a sagacissimo Viro Clairaut iam ante est praedicta et exacte definita[4], ita ut nullum amplius dubium superesse queat, quin hic Cometa idem plane sit, qui iam aliquoties est conspectus, etiamsi in temporibus periodicis haud exiguum discrimen esset deprehensum. Cum igitur hic Cometa tantam variationem in motu suo medio sit perpessus, eo minus similem variationem in planetis negare poterimus, quod causae utrinque similes existunt, quae huiusmodi effectum producere valeant.

5. Ac causae quidem istae non amplius sunt ignotae, postquam principium gravitationis universalis tot tam feliciter explicatis phaenomenis abunde est confirmatum, ita ut nunc quidem vix ullum scientiae naturalis principium ad tantum certitudinis gradum evectum videatur, quam omnia corpora coelestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent in ratione directa massarum et reciproca duplicata distantiarum. Neque adeo ad summam Astronomiae perfectionem quicquam desideratur, nisi ut motus huic principio consentanei per calculum determinentur, quod opus a sola analysi est expectandum. Quo in genere plurima praeclarissima specimina edita sunt ab iis, qui cum in determinatione motuum lunarium, tum perturbationum Jovis ac Saturni, tum vacillationis axis ipsius terrae, tum vero nuperrime in retardatione Cometae operam suam collocarunt.

6. Quae cum ita sint, fontes, unde resolutio quaestionis propositae est haurienda, sunt detecti, totumque negotium huc revocatur, ut ostendatur, utrum ex gravitatione mutua corporum coelestium ulla mutatio in motu eorum medio nascatur nec ne? Cum autem idea motus medii per se non satis fit fixa, neque etiam tempus periodicum commode eius loco introduci possit, quippe quod per inaequalitates periodicas saepe haud mediocriter turbatur, veluti in luna est perspicuum, quaestio nostra optime ad axem transversum cuiusque orbitae adstringi videtur. Quomodocunque enim motus cuiuspiam planetae vel cometae perturbatur, is semper ita concipi potest, quasi in sectione conica fieret, cuius tam positio

1 Cf. [Lemonnier 1751a], [Lemonnier 1751b], [Lemonnier 1752].
2 Id est 1P/1758 Y1 (Halley), cf. [Kronk 1999], pp. 422–430 (1759 I).
3 Id est 1P/1682 Q1 (Halley), cf. [Kronk 1999], pp. 373–376 (1682).
4 Cf. [Clairaut 1759b], [Clairaut 1760].

quam species et quantitas continuo varietur: motu ceteroquin manente regulis KEPLERIANIS conformi.

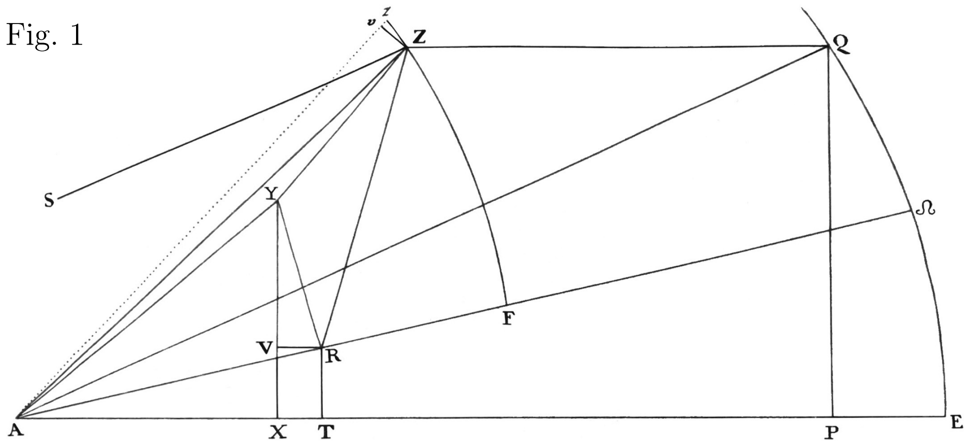
7. Quare si hoc modo motus coelestes per sectiones conicas variabiles representententur, hoc negotium nobis erit impositum, ut investigemus, utrum axis transversus cuiuspiam orbitae planetariae vel cometariae aliquam mutationem patiatur nec ne? Ubi quidem notari convenit, si axis transversus post singulas revolutiones ad eandem magnitudinem revertatur, quantumvis interea fuerit variatus, hinc tamen nullam inaequalitatem in motum medium transferri. At si per plures revolutiones continuo vel crescat vel decrescat, etiamsi forsitan deinceps aliquando in magnitudinem pristinam restituatur: talis variatio in motum medium commode coniicitur. Imprimis autem, si axis transversus ab actione cuiuspiam cometae, cuius adventus quasi ex improviso accidit neque praevideri potest, incrementum vel decrementum patitur, hunc effectum aliter nisi per motus medii retardationem vel accelerationem representare non licet.

8. Quandoquidem perturbationes motus sunt ingentes, quemadmodum fit in luna, praeter axem transversum etiam reliquorum elementorum mutationes ad tempus periodicum hincque ad motum medium constituendum concurrunt. Quando autem motus proxime regulas KEPLERIANAS sequitur, uti fit in planetis primariis et cometis, mutatio axis transversi, cuius quippe cubo quadratum temporis periodici est proportionale, sola motum medium afficere est censenda. Ita si axis transversus orbitae telluris hodie maior minorve esset quam tempore PTOLEMAEI, motus eius medius hodie lentior vel incitatior esset statuendus quam illo tempore. Ac si cometa huius anni,[5] dum haud adeo procul a terra praetervolavit, actione sua axem orbis magni, uti videtur, aliquantillum auxit, in posterum annus solaris maior motusque medius solis tardior esset futurus: cuius effectus quantitatem autem ob massam cometae incognitam non nisi ex observationibus deinceps instituendis definire licebit.

9. Quo igitur quaestioni ab Illustrissima Academia propositae satisfaciam, quantum motus sive planetae sive cometae ab actione alius planetae sive cometae, cuius quidem motus ut cognitus spectatur, perturbatur, primum quidem in genere investigabo, tum vero, quia omnes inaequalitates neque ad hoc institutum sunt necessariae neque quaeruntur, ad axis transversi variationes omnem curam intendam; facile autem intelligitur, antequam universa mutatio dato tempore in axe transverso producta definiri queat, mutationem eius momentaneam determinari opportere. Unde hoc commode consequemur, ut si forte non licuerit per integrationes ad scopum pervenire, ex formula differentiali pro partibus temporis satis exiguis mutationes axis seorsim definiantur, tumque in unam summam colligantur. Haec methodus usum habebit, quando actio notabilis corporis attrahentis non diu durat, uti in transitu cometae fere fit, ac deinceps ob insignem distantiam quasi prorsus in nihilum abit.

5 Id est 1759.

Fig. 1



10. Sit igitur (Fig. 1) sol in A, et planeta vel cometa cuius attractione motus alterius perturbatur, moveatur in plano tabula representato, in quo EQ sit eius orbita, AE vero linea recta fixa, a qua longitudines computemus. Alter vero planeta, cuius perturbationes motus investigamus, moveatur in alio plano, quod nunc quidem illud planum secet secundum rectam $A☊$, quae est linea nodorum, sitque FZ eius orbita ab F in sublime ascendens. Nunc autem ille planeta seu cometa versetur in Q, hic vero in Z ductisque rectis QA, ZA et QZ ex Z in planum tabulae demittatur perpendiculum ZY, tum vero ex Q et Y ad AE normales QP et YX. Porro ex Y quoque ad lineam nodorum $A☊$ normaliter ducatur YR, ut iuncta ZR angulus YRZ exhibeat inclinationem binarum orbitarum. Denique ex R tam ad AE quam XY ducantur perpendiculares RT et RV. Haecque fere sunt, quibus Geometria quaestionis continetur.

11. Iam faciamus sequentes denominationes sitque

1. Longitudo lineae nodorum $EA☊ = \psi$;
2. Inclinatio orbitarum mutua seu $YRZ = \omega$;
3. Longitudo planetae Q seu angulus $EAQ = \theta$;
4. Eius distantia a sole seu recta $AQ = u$;
5. Planetae Z distantia a sole $AZ = v$;
6. Eius argumentum latitudinis seu $☊AZ = \xi$.

Hinc reliquae lineae ita definientur:

$$AP = u\cos\theta\ ;\quad AR = v\cos\xi\ ;\quad YR = v\sin\xi\cos\omega\ ;$$
$$PQ = u\sin\theta\ ;\quad ZR = v\sin\xi\ ;\quad YZ = v\sin\xi\sin\omega\ .$$

Porro cum angulus RYV aequetur angulo $EA☊ = \psi$, erit[6]

$$AT = v\cos\xi\cos\psi\ ;\quad VY = v\sin\xi\cos\omega\cos\psi\ ;$$
$$TR = v\cos\xi\sin\psi\ ;\quad RV = v\sin\xi\cos\omega\sin\psi\ .$$

6 Editio princeps: $VY\sin\xi\cos\omega\cos\psi$ loco $VY = v\sin\xi\cos\omega\cos\psi$, $v\cos\xi\cos\psi$ loco $v\cos\xi\sin\psi$, $RV\sin\xi\cos\omega\sin\psi$ loco $RV = v\sin\xi\cos\omega\sin\psi$.

Quare si pro puncto sublimi Z ternas coordinatas vocemus

$$AX = X\,; \quad XY = Y\,; \quad YZ = Z\,,$$

habebimus

$$\begin{aligned} X &= AT - RV = v\cos\xi\cos\psi - v\sin\xi\cos\omega\sin\psi\,; \\ Y &= TR + VY = v\cos\xi\sin\psi + v\sin\xi\cos\omega\cos\psi\,; \\ Z &= v\sin\xi\sin\omega\,. \end{aligned}$$

12. Ex his denique etiam definitur distantia planetarum QZ, quae brevitatis gratia statuatur

$$QZ = \tau\,.$$

Cum enim sit

$$PX = AP - AX = u\cos\theta - X \quad \text{et} \quad PQ - XY = u\sin\theta - Y\,,$$

erit

$$QY^2 = uu - 2u(X\cos\theta + Y\sin\theta) + XX + YY\,;$$

cui quadratum $YZ^2 = Z^2$ additum dabit

$$QZ^2 = \tau^2 = uu - 2u(X\cos\theta + Y\sin\theta) + XX + YY + ZZ\,.$$

At est $XX + YY + ZZ = vv$, ideoque

$$\tau^2 = uu - 2u(X\cos\theta + Y\sin\theta) + vv\,.$$

Verum ob

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi &= \cos(\theta - \psi)\,, \\ \sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi &= \sin(\theta - \psi)\,, \end{aligned}$$

ubi notetur $\theta - \psi = EAQ - EA☊$ exprimere angulum $☊AQ$, seu longitudinem planetae Q a linea nodorum sumtam, erit

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = v\cos\xi\cos(\theta - \psi) + v\sin\xi\cos\omega\sin(\theta - \psi)\,,$$

ita ut sit

$$\tau = \sqrt{\big(uu - 2uv(\cos\xi\cos(\theta - \psi) + \sin\xi\cos\omega\sin(\theta - \psi)) + vv\big)}\,;$$

unde perspicuum est formulam $\cos\xi\cos(\theta - \psi) + \sin\xi\cos\omega\sin(\theta - \psi)$ exprimere cosinum anguli QAZ, qui est distantia planetarum e sole visa.

13. Quomodocunque ab actione planetae Q planum orbitae alterius planetae Z immutatur, ita ut momento temporis tam positio lineae nodorum $A☊$

quam inclinatio mutua utriusque orbitae variationem patiatur, certa quaedam relatio inter has variationes intercedat. Si enim puncto temporis planeta ex Z in z succedat, ut angulus elementaris ZAz sit $= d\varphi$, punctum z aeque ad positionem orbitae praecedentem angulis ψ et ω determinatam atque ad positionem sequentem angulis $\psi + d\psi$ et $\omega + d\omega$ contentam referri oportet. Ex quo differentialia dX, dY et dZ eadem prodire debent, sive anguli ψ et ω constantes sumantur et pro anguli $\Omega AZ = \xi$ differentiali scribatur $d\varphi$, quippe qui hoc elemento augetur; sive iidem anguli ψ et ω etiam pro variabilibus habeantur angulusque ξ vero suo differentiali $d\xi$ augeri statuatur, quod ob mutationem in linea nodorum et inclinatione factam non amplius angulo elementari $d\varphi$ aequale est aestimandum. Ex hac autem duplici differentiatione gemina relatio inter angulos elementares $d\varphi$, $d\xi$, $d\psi$ et $d\omega$ concludetur.

14. Prima differentiatio, qua anguli ψ et ω constantes et $d\xi = d\varphi$ sumuntur, praebet:

$$\begin{aligned} dX &= \frac{X\,dv}{v} - v\,d\varphi\,(\sin\xi\cos\psi + \cos\xi\cos\omega\sin\psi) \\ dY &= \frac{Y\,dv}{v} - v\,d\varphi\,(\sin\xi\sin\psi - \cos\xi\cos\omega\cos\psi) \\ dZ &= \frac{Z\,dv}{v} + v\,d\varphi\,\cos\xi\sin\omega\,. \end{aligned}$$

Altera autem differentiatio hos suppeditat valores[7]:

$$\begin{aligned} dX = \frac{X\,dv}{v} &- v\,d\xi\,(\sin\xi\cos\psi + \cos\xi\cos\omega\sin\psi) \\ &- v\,d\psi\,(\cos\xi\sin\psi + \sin\xi\cos\omega\cos\psi) + v\,d\omega\,\sin\xi\sin\omega\sin\psi \\ dY = \frac{Y\,dv}{v} &- v\,d\xi\,(\sin\xi\sin\psi - \cos\xi\cos\omega\cos\psi) \\ &+ v\,d\psi\,(\cos\xi\cos\psi - \sin\xi\cos\omega\sin\psi) - v\,d\omega\,\sin\xi\sin\omega\cos\psi \\ dZ = \frac{Z\,dv}{v} &+ v\,d\xi\,\cos\xi\sin\omega + v\,d\omega\,\sin\xi\cos\omega\,. \end{aligned}$$

Hinc aequatis postremis formulis pro dZ inventis colligitur

$$d\varphi = d\xi + \frac{d\omega\,\sin\xi\cos\omega}{\cos\xi\sin\omega}\,.$$

15. Quo facilius relatio ex prioribus oriunda eliciatur, consideremus has formulas inde derivatas:

7 Editio princeps: $-v\,d\psi\,(\cos\xi\cos\psi - \sin\xi\cos\omega\sin\psi)$ loco $+v\,d\psi\,(\cos\xi\cos\psi - \sin\xi\cos\omega\sin\psi)$.

Ex priori differentiatione

$$dX\ \cos\psi + dY\ \sin\psi = \frac{dv}{v}(X\cos\psi + Y\sin\psi) - v\,d\varphi\ \sin\xi$$
$$dX\ \sin\psi - dY\ \cos\psi = \frac{dv}{v}(X\sin\psi - Y\cos\psi) - v\,d\varphi\ \cos\xi\cos\omega\ ;$$

Ex posteriori differentiatione

$$dX\ \cos\psi + dY\ \sin\psi = \frac{dv}{v}(X\cos\psi + Y\sin\psi) - v\,d\xi\ \sin\xi - v\,d\psi\sin\xi\cos\omega$$
$$dX\ \sin\psi - dY\ \cos\psi = \frac{dv}{v}(X\sin\psi - Y\cos\psi) - v\,d\xi\ \cos\xi\cos\omega - v\,d\psi\cos\xi + v\,d\omega\sin\xi\sin\omega\ ,$$

quarum aequalitas dat

$$d\varphi = d\xi + d\psi\ \cos\omega$$

et

$$d\varphi = d\xi + \frac{d\psi}{\cos\omega} - \frac{d\omega\ \sin\xi\sin\omega}{\cos\xi\cos\omega}\ ;$$

ex quibus coniunctis sequitur

$$d\psi\,\frac{(1-\cos\omega^2)}{\cos\omega} = \frac{d\omega\ \sin\xi\sin\omega}{\cos\xi\cos\omega}$$

seu

$$d\psi = \frac{d\omega\ \sin\xi}{\cos\xi\sin\omega}\ .$$

16. Semper ergo variationes in linea nodorum et inclinatione a se invicem pendent, ut sit

$$d\psi = \frac{d\omega\ \sin\xi}{\cos\xi\sin\omega}\quad \text{seu}\quad d\omega = \frac{d\psi\ \cos\xi\sin\omega}{\sin\xi}\quad \text{seu}^{8}\quad \frac{d\psi}{\tan\xi} = \frac{d\omega}{\sin\omega}\ .$$

Tum vero angulus elementaris $ZAz = d\varphi$, per quem corpus Z revera progreditur tempusculo infinite parvo, dum variationes $d\xi$, $d\psi$ et $d\omega$ gignuntur, ita definitur, ut sit

$$\text{vel}\quad d\varphi = d\xi + \frac{d\omega\ \sin\xi\cos\omega}{\cos\xi\sin\omega}\quad \text{vel}\quad d\varphi = d\xi + d\psi\ \cos\omega\ ;$$

quarum aequalitas iam in superiori continetur, ita ut hinc duae tantum relationes inter quaterna elementa $d\varphi$, $d\xi$, $d\psi$ et $d\omega$ constituantur, quas in sequentibus, ubi effectus virium sollicitantium sumus investigaturi, probe meminisse iuvabit.

8 Editio princeps: $d\varphi$ loco $d\psi$.

17. Antequam ad partem mechanicam huius quaestionis progrediar, haud abs re erit quasdam relationes observare, quae in sequentibus insignem usum sunt habiturae. Scilicet cum differentialibus dX, dY et dZ ex priori differentiatione natis uti liceat. Ad quae quippe altera iam sunt perducta, inde deducimus

$$\begin{aligned} Y\,dX - X\,dY = &-v\,d\varphi\Big(Y(\sin\xi\cos\psi+\cos\omega\cos\xi\sin\psi) \\ &-X(\sin\xi\sin\psi-\cos\xi\cos\omega\cos\psi)\Big) \end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned} Y\,dX - X\,dY = &-v\,d\varphi\Big((Y\cos\psi - X\sin\psi)\sin\xi \\ &+(Y\sin\psi+X\cos\psi)\cos\xi\cos\omega\Big)\ . \end{aligned}$$

At est

$$Y\cos\psi - X\sin\psi = v\sin\xi\cos\omega$$

et

$$Y\sin\psi + X\cos\psi = v\cos\xi\ ;$$

quibus valoribus substitutis fit

$$Y\,dX - X\,dY = -vv\,d\varphi\,(\sin\xi^2\cos\omega+\cos\xi^2\cos\omega)\ ,$$

ita ut sit

$$Y\,dX - X\,dY = -vv\,d\varphi\,\cos\omega$$

seu

$$X\,dY - Y\,dX = vv\,d\varphi\,\cos\omega\ .$$

18. Simili modo habebimus:

$$X\,dZ - Z\,dX = v\,d\varphi\Big(X\cos\xi\sin\omega + Z(\sin\xi\cos\psi+\cos\xi\cos\omega\sin\psi)\Big)\ ,$$

et pro X et Z in membro posteriori substitutis valoribus:

$$\begin{aligned} X\,dZ - Z\,dX = vv\,d\varphi\,\sin\omega\Big(&\cos\xi(\cos\xi\cos\psi-\sin\xi\cos\omega\sin\psi) \\ &+\sin\xi(\sin\xi\cos\psi+\cos\xi\cos\omega\sin\psi)\Big)\ , \end{aligned}$$

quae manifesto in hanc simplicem [formulam] contrahitur:

$$X\,dZ - Z\,dX = vv\,d\varphi\,\sin\omega\cos\psi\ .$$

Denique eodem vestigio insistentes colligimus:

$$Y\,dZ - Z\,dY = v\,d\varphi\Big(Y\cos\xi\sin\omega + Z(\sin\xi\sin\psi - \cos\xi\cos\omega\cos\psi)\Big)\,,$$

et pro Y et Z valoribus substitutis

$$\begin{aligned}Y\,dZ - Z\,dY = vv\,d\varphi\,\sin\omega\Big(&\cos\xi(\cos\xi\sin\psi + \sin\xi\cos\omega\cos\psi)\\ &+\sin\xi(\sin\xi\sin\psi - \cos\xi\cos\omega\cos\psi)\Big)\,,\end{aligned}$$

quae sponte in hanc simplicem formulam abit:

$$Y\,dZ - Z\,dY = vv\,d\varphi\,\sin\omega\sin\psi\,.$$

19. Denique cum ex elementis dX, dY et dZ sit elementum revera descriptum $Zz = \surd(dX^2+dY^2+dZ^2)$, ob $AZ = v$ et[9] $Az = v+dv$, si centro A arculus Zv describatur, erit $zv = dv$, et cum positus sit angulus elementaris $ZAz = d\varphi$, erit $Zv = v\,d\varphi$, hincque $Zz^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2$. Ex quibus evidens est fore

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2\,;$$

quam aequalitatem etiam ex formulis pro differentialibus dX, dY et dZ ante inventis, sed per plures ambages deducere licuisset. Atque haec fere sunt, quae Geometria et Analysis pro solutione quaestionis proposita subministrant, quibus instructi facilius partem mechanicam, qua totum negotium continetur, agredi poterimus. Haec autem seorsim exponere visum est, ne relationes circa lineae nodorum et inclinationis mutationes momentaneae principiis mechanicis inniti videantur.

20. Sit igitur massa Solis $= A$, Planetae in $Z = B$ et Planetae Cometaeve perturbantis in $Q = C$: ac primo planeta in Z primo ad solem urgetur secundum ZA vi acceleratrice $= \dfrac{A}{vv}$, unde pro directionibus fixis coordinatarum nascuntur vires

$$\begin{aligned}\text{secundum } XA &= \frac{(A+B)X}{v^3}\\ \text{secundum } YX &= \frac{(A+B)Y}{v^3}\\ \text{secundum } ZY &= \frac{(A+B)Z}{v^3}\,,\end{aligned}$$

deinde versus Q urgetur secundum directionem ZQ vi acceleratrice $= \dfrac{C}{\tau\tau}$, unde

9 Editio princeps: $AZ = v + dv$.

per similem resolutionem nascuntur vires hae[10]:

$$\begin{aligned}\text{secundum } AX &= \frac{C(u\cos\theta - X)}{\tau^3}\\ \text{secundum } XY &= \frac{C(u\sin\theta - Y)}{\tau^3}\\ \text{secundum } ZY &= \frac{CZ}{\tau^3}\,,\end{aligned}$$

denique cum etiam sol ad Q sollicitetur vi acceleratrice $\frac{C}{uu}$, haec contrarie secundum directionem ZS ipsi QA parallelam in planetam Z applicata est concipienda, unde oriuntur hae duae vires:

$$\text{secundum } XA = \frac{C\cos\theta}{uu} \quad \text{et} \quad \text{secundum } YX = \frac{C\sin\theta}{uu}\,.$$

21. His iam viribus novimus accelerationes corporis in Z secundum easdem directiones esse proportionales: unde si elementum temporis statuamus $= dt$ idque constans sumamus, habebimus tres sequentes aequationes[11]:

$$\begin{aligned}ddX &= -\alpha\, dt^2\left(\frac{(A+B)X}{v^3} - \frac{C(u\cos\theta - X)}{\tau^3} + \frac{C\cos\theta}{uu}\right)\\ ddY &= -\alpha\, dt^2\left(\frac{(A+B)Y}{v^3} - \frac{C(u\sin\theta - Y)}{\tau^3} + \frac{C\sin\theta}{uu}\right)\\ ddZ &= -\alpha\, dt^2\left(\frac{(A+B)Z}{v^3} + \frac{CZ}{\tau^3}\right)\end{aligned}$$

ubi α certam constantem, qua proportionaliter determinatur, designat, quam deinceps ex motu quodam cognito veluti motu terrae medio, qui nunc quidem locum habet, definiri conveniet. Quo pacto simul loco elementi temporis vagi in se dt spatium motu terrae medio interea descriptum in calculum introducetur. Ceterum hic notetur massam solis A tantopere massas planetarum et cometarum excedere, ut pro $A+B$ tuto scribere liceat A quantitasque $\frac{C}{A+B}$ pro fractione minima haberi possit.

22. Omnes nunc vires Analyseos in hoc intendi oportet, ut istas tres aequationes differentio-differentiales resolvamus, hoc est vel integremus vel ad commodam approximationem perducamus. Ac primo quidem binis coniugendis simpliciores formas adipiscemur

$$X\,ddY - Y\,ddX = \alpha\, dt^2\left(-\frac{Cu(Y\cos\theta - X\sin\theta)}{\tau^3} + \frac{C(Y\cos\theta - X\sin\theta)}{uu}\right)\;;$$

10 Editio princeps: secundum AY loco secundum XY.
11 Editio princeps: $(A+B)Y$ loco $(A+B)Z$.

seu

$$X\,ddY - Y\,ddX = \alpha C\,dt^2\,(X\sin\theta - Y\cos\theta)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) .$$

Deinde simili modo colligimus[12]

$$\begin{aligned} X\,ddZ - Z\,ddX &= \alpha\,dt^2\left(\frac{-CZu\cos\theta}{\tau^3} + \frac{CZ\cos\theta}{uu}\right)\\ &= -\alpha CZ\,dt^2\,\cos\theta\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\\ Y\,ddZ - Z\,ddY &= \alpha\,dt^2\left(-\frac{CZu\sin\theta}{\tau^3} + \frac{CZ\sin\theta}{uu}\right)\\ &= -\alpha CZ\,dt^2\,\sin\theta\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) , \end{aligned}$$

ubi autem manifestum est harum trium aequationum binas iam tertiam in se complecti.

23. Hic primo observetur formulas

$$X\,ddY - Y\,ddX\,,\quad X\,ddZ - Z\,ddX\,,\quad Y\,ddZ - Z\,ddY$$

esse differentialiae formularum

$$X\,dY - Y\,dX\,,\quad X\,dZ - Z\,dX\,,\quad Y\,dZ - Z\,dY\,,$$

quarum valores supra (§§ 17, 18) assignavimus. Deinde cum sit

$$Z = v\sin\xi\sin\omega$$

et

$$X\sin\theta - Y\cos\theta = v\cos\xi\sin(\theta-\psi) - v\sin\xi\cos\omega\cos(\theta-\psi) ,$$

superiores tres aequationes has induent formas[13]:

$$\begin{aligned} d\cdot(vv\,d\varphi\,\cos\omega) &= \alpha Cv\,dt^2\Big(\cos\xi\sin(\theta-\psi)\\ &\qquad - \sin\xi\cos\omega\cos(\theta-\psi)\Big)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) ,\\ d\cdot(vv\,d\varphi\,\sin\omega\cos\psi) &= -\,\alpha Cv\,dt^2\,\cos\theta\sin\xi\sin\omega\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) ,\\ d\cdot(vv\,d\varphi\,\sin\omega\sin\psi) &= -\,\alpha Cv\,dt^2\,\sin\theta\sin\xi\sin\omega\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) , \end{aligned}$$

12 Editio princeps: $\frac{CZu\sin\theta}{\tau^3}$ loco $-\frac{CZu\sin\theta}{\tau^3}$.

13 Editio princeps: $\sin\psi$ loco $\cos\psi$.

quarum binae etsi iam continent tertiam; tamen, quia nulla est ratio, cur unam prae reliquis omittamus, conveniet omnes tres retineri, quo inde facilius formulas deinceps usum habituras eliciamus.

24. Cum igitur binae posteriores, si ex parte evolvantur, praebeant:

$$\begin{aligned}&\cos\psi\; d\cdot(vv\,d\varphi\,\sin\omega) - vv\,d\varphi\,\sin\omega\cdot d\psi\,\sin\psi\\&\qquad= -\alpha Cv\,dt^2\,\cos\theta\sin\xi\sin\omega\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;,\\&\sin\psi\; d\cdot(vv\,d\varphi\,\sin\omega) + vv\,d\varphi\,\sin\omega\cdot d\psi\,\cos\psi\\&\qquad= -\alpha Cv\,dt^2\,\sin\theta\sin\xi\sin\omega\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;,\end{aligned}$$

illa per $\sin\psi$, haec vero per $-\cos\psi$ multiplicata coniuncte producent

$$-vv\,d\varphi\,d\psi\,\sin\omega = \alpha Cv\,dt^2\,\sin\xi\sin\omega\sin(\theta-\psi)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;,$$

quae per $-v\sin\omega$ [divisa] dat

$$v\,d\varphi\,d\psi = -\alpha C\,dt^2\,\sin\xi\sin(\theta-\psi)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;,$$

ita ut hinc elementum $d\psi$ pro temporis elemento dt determinetur

$$d\psi = -\frac{\alpha C\,dt^2\,\sin\xi\sin(\theta-\psi)}{v\,d\varphi}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;,$$

unde simul colligitur $d\xi = d\varphi - d\psi\,\cos\omega$ atque

$$d\omega = \frac{d\psi\,\cos\xi\sin\omega}{\sin\xi} = -\frac{\alpha C\,dt^2\,\cos\xi\sin\omega\sin(\theta-\psi)}{v\,d\varphi}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;.$$

25. Sin autem earumdem binarum aequationum prior per $\cos\psi$ et posterior per $\sin\psi$ multiplicetur, iunctim prodit:

$$d\cdot(vv\,d\varphi\,\sin\omega) = -\alpha Cv\,dt^2\,\sin\xi\sin\omega\cos(\theta-\psi)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;,$$

quae ex parte evoluta fit

$$\sin\omega\; d\cdot(vv\,d\varphi) + vv\,d\varphi\,d\omega\,\cos\omega = -\alpha Cv\,dt^2\,\sin\xi\sin\omega\cos(\theta-\psi)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;.$$

Prima autem simili modo ex parte evoluta dat

$$\begin{aligned}&\cos\omega\; d\cdot(vv\,d\varphi) - vv\,d\varphi\,d\omega\,\sin\omega\\&\qquad= -\alpha Cv\,dt^2\,\left(\sin\xi\cos\omega\cos(\theta-\psi)-\cos\xi\sin(\theta-\psi)\right)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\;.\end{aligned}$$

Nunc igitur illa per $\cos\omega$, haec vero per $-\sin\omega$ multiplicata coniunctim producent:

$$vv\,d\varphi\,d\omega = -\alpha Cv\,dt^2\,\cos\xi\sin\omega\sin(\theta-\psi)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\ ,$$

quae cum modo ante inventa congruit. Quod eo minus est mirandum, quod, uti iam observavimus, nostrae ternae aequationes nonnisi pro duabus sunt habendae, neque propterea plures duabus conclusiones suppeditant.

26. Multiplicemus autem binarum postremarum aequationum illam per $\sin\omega$, hanc vero per $\cos\omega$, atque earum aggregatum praebebit:

$$d\cdot(vv\,d\varphi) = -\alpha Cv\,dt^2\,\left(\sin\xi\cos(\theta-\psi)-\cos\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)\right)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\ ,$$

quae ad sequentem usum maxime accomodabitur, si per $2vv\,d\varphi$ multiplicetur et integretur. Quia enim elementum dt constans assumitur, integrale hoc modo representabitur:

$$v^4\,d\varphi^2 = -2\alpha C\,dt^2\!\int v^3\,d\varphi\left(\sin\xi\cos(\theta-\psi)-\cos\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)\right)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right),$$

ac videbimus totum negotium potissimum ad inventionem huius integralis revocari. Hae ergo sunt illae duae conclusiones, quas ex ternis nostris aequationibus derivatis deducere licet, quarum altera valorem ipsius $v^4\,d\varphi^2$ altera vero ipsius $d\psi$ vel $d\omega$ ostendit.

27. Cum igitur vis nostrarum trium aequationum principalium (§ 21) nondum sit exhausta, sequenti combinatione novam inde aequationem formemus. Multiplicentur scilicet prima per $2\,dX$, secunda per $2\,dY$ ac tertia per $2\,dZ$, ut hoc modo summae prius membrum fiat integrabile, et cum sit

$$X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ = v\,dv\ ,$$

obtinebimus

$$\begin{aligned}&2\,dX\,ddX+2\,dY\,ddY+2\,dZ\,ddZ\\&\qquad = -2\alpha\,dt^2\left(\frac{(A+B)\,dv}{vv}+\frac{Cv\,dv}{\tau^3}-C(dX\,\cos\theta+dY\,\sin\theta)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\right);\end{aligned}$$

ex formulis autem differentialibus (§ 14) colligimus

$$\begin{aligned}&dX\,\cos\theta+dY\,\sin\theta\\&\qquad=\frac{dv}{v}(X\cos\theta+Y\sin\theta)-v\,d\varphi\,\left(\sin\xi\cos(\theta-\psi)-\cos\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)\right)\ ,\end{aligned}$$

quae ob

$$X\cos\theta+Y\sin\theta = v\left(\cos\xi\cos(\theta-\psi)+\sin\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)\right)$$

tandem praebet

$$\begin{aligned}2\,dX\,ddX + 2\,dY\,ddY + 2\,dZ\,ddZ = -2\alpha\,dt^2 \left(\frac{(A+B)\,dv}{vv} + \frac{Cv\,dv}{\tau^3}\right)\\ + 2\alpha C\,dt^2 \Big(dv\,(\cos\xi\cos(\theta-\psi) + \sin\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)\Big)\\ - v\,d\varphi\,\Big(\sin\xi\cos(\theta-\psi) - \cos\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)\Big)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\ .\end{aligned}$$ Orig: 23

28. Iam partis prioris integrale est

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2\ ,$$

pro parte autem posteriori ponamus brevitatis gratia

$$\cos\xi\cos(\theta-\psi) + \sin\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi) = \cos\rho$$

et

$$\sin\xi\cos(\theta-\psi) - \cos\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi) = \sin\sigma\ ,$$

ut sit $\rho =$ angulo QAZ et propterea

$$\tau = \sqrt{(uu - 2uv\cos\rho + vv)}\ .$$

Hincque aequatio nostra integralis ita se habebit

$$\begin{aligned}dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2\alpha(A+B)\,dt^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f}\right) - 2\alpha C\,dt^2 \int \frac{v\,dv}{\tau^3}\\ + 2\alpha C\,dt^2 \int (dv\ \cos\rho - v\,d\varphi\ \sin\sigma)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\ .\end{aligned}$$

Tum vero ex supra inventis habemus:

$$v^4\,d\varphi^2 = -2\alpha C\,dt^2 \int v^3\,d\varphi\ \sin\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\ ,$$

quibus duabus aequationibus solutio problematis potissimum continetur.

29. Ponamus praeterea ad has formulas contrahendas:

$$\begin{aligned}\int v^3\,d\varphi\ \sin\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) &= P\ ,\\ \int \frac{v\,dv}{\tau^3} &= Q\ ,\\ \int (dv\ \cos\rho - v\,d\varphi\ \sin\sigma)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) &= R\ ,\end{aligned}$$

quas quantitates, quia in terminis valde parvis tantum insunt, tantisper tanquam cognitas spectemus: et nostrae aequationes erunt

$$v^4\, d\varphi^2 = 2\alpha\, dt^2\, \left((A+B)G - CP\right)\ ,$$
$$dv^2 + vv\, d\varphi^2 = 2\alpha\, dt^2\, \left((A+B)\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{f}\right) - CQ + CR\right)\ ,$$

ubi ut parvitas massae C prae $A+B$ clarius in oculos incurrat, ponamus $\frac{C}{A+B} = n$, ita ut n sit fractio quam minima: induentque nostrae aequationes has formas

$$v^4\, d\varphi^2 = 2\alpha(A+B)\, dt^2\, (G - nP)\ ,$$
$$dv^2 + vv\, d\varphi^2 = 2\alpha(A+B)\, dt^2\, \left(\frac{1}{v}-\frac{1}{f} - nQ + nR\right)\ .$$

30. Hinc iam commode exui potest consideratio tempusculi dt, fietque

$$(G-nP)(dv^2 + vv\, d\varphi^2) = v^4\, d\varphi^2\, \left(\frac{1}{v}-\frac{1}{f} + n(R-Q)\right)\ ,$$

unde colligitur

$$dv^2\,(G-nP) = v^4\, d\varphi^2\, \left(\frac{1}{v}-\frac{1}{f} + n(R-Q) - \frac{(G-nP)}{vv}\right)\ ,$$

hincque porro

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{(G-nP)} = d\varphi\, \sqrt{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{f} + n(R-Q) - \frac{(G-nP)}{vv}\right)}\ ,$$

qua aequatione relatio inter differentialia dv et $d\varphi$ exprimitur, reliqua autem iam supra ad $d\varphi$ sunt reducta: tum vero nunc etiam tempusculum dt eodem revocatur ope aequationis

$$vv\, d\varphi = dt\, \sqrt{2\alpha(A+B)(G-nP)}\ ;$$

si fractio n plane evanesceret, hinc cognitae regulae KEPLERIANAE deduci solent.

31. Quo nunc motus determinationem ad similitudinem regularum KEPLERIANARUM perducamus, distantiae $AZ = v$ formam similem ei, quae in sectionibus conicis occurrit, tribuamus, sitque

$$v = \frac{p}{1 + q\cos x}\ ,$$

ubi p denotat semiparametrum sectionis conicae, q excentricitatem et x eum angulum, qui anomalia vera appellatur. Cum autem vulgo anomalia vera ab aphelio computari soleat, liceat hic mihi ab hoc more recedere eamque a perihelio computare, quo simul in cometarum orbitis locum inveniri queat. In motu regulari quantitates p et q essent constantes, nunc autem eas ut variabiles tractemus, ut, quemadmodum initio observavi, motus perturbatio in variatione elementorum sectionis conicae comprehendatur. Dum autem semiparameter est $= p$ et excentricitas $= q$, erit semiaxis transversus $= \frac{p}{1-qq}$, quem vocemus $= r$, in cuius variatione definienda tota quaestio versatur.

32. Cum igitur hoc modo loco unius variabilis v tres novae variabiles p, q et x in computum ingerantur, binas pro lubitu definire licet, in quo quidem ratio [lineae] absidum est habenda, qua hae duae conditiones praescribuntur, ut casibus, quibus fit vel $\cos x = 1$ vel $\cos x = -1$, differentiale dv ideoque et formula irrationalis

$$\sqrt{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f} + n(R-Q) - \frac{G-nP}{vv}\right)}$$

evanescat: sit brevitatis [gratia] ergo

$$\frac{1}{f} - n(R-Q) = M$$

et

$$G - nP = N\,,$$

ut habetur

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{N} = d\varphi \ \sqrt{\left(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}\right)} \ ;$$

et binae conditiones praescriptae praebent[14]:

$$-M + \frac{1+q}{p} - \frac{N(1+q)^2}{pp} = 0 \quad \text{et} \quad -M + \frac{1-q}{p} - \frac{N(1-q)^2}{pp} = 0\,,$$

quarum differentia dat $\frac{2q}{p} = \frac{4Nq}{pp}$ seu $p = 2N$, unde fit

$$M = \frac{1+q}{p} - \frac{(1+q)^2}{2p} = \frac{1-qq}{2p}$$

ideoque $2M = \frac{1}{r}$, ob $r = \frac{p}{1-qq}$; erit ergo

$$p = 2(G-nP) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{2}{f} - 2n(R-Q)\,.$$

33. His iam determinationibus pro M et N inventis formula nostra irrationalis fit:

$$\sqrt{\left(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}\right)} = \sqrt{\left(-\frac{(1-qq)}{2p} + \frac{1+q\cos x}{p} - \frac{(1+q\cos x)^2}{2p}\right)} = \frac{q\sin x}{\sqrt{2p}}\,;$$

14 Editio princeps: $\frac{1+q}{q}$ loco $\frac{1+q}{p}$.

unde ob $N = \frac{p}{2}$ colligitur

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\frac{p}{2}} = \frac{q\,d\varphi\,\sin x}{\sqrt{2p}} \qquad \text{seu} \qquad \frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\,\sin x}{p}\;.$$

Cum autem sit $\frac{1}{v} = \frac{1+q\cos x}{p}$, erit

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp}(1+q\cos x) - \frac{dq\,\cos x}{p} + \frac{q\,dx\,\sin x}{p} = \frac{q\,d\varphi\,\sin x}{p}\;,$$

unde sequitur fore pro anomalia vera

$$dx = d\varphi - \frac{dp\,(1+q\cos x)}{pq\sin x} + \frac{dq\,\cos x}{q\sin x}\;.$$

At ob $1 - qq = \frac{p}{r}$ est $q\,dq = \frac{p\,dr - r\,dp}{2rr}$, sicque fit

$$dx = d\varphi - \frac{dp\,(1+q\cos x)}{pq\sin x} - \frac{dp\,\cos x}{2qqr\sin x} + \frac{p\,dr\,\cos x}{2qqrr\sin x}\;,$$

seu

$$dx = d\varphi - \frac{dp\,(2q+(1+qq)\cos x)}{2pqq\sin x} + \frac{dr}{rr}\cdot\frac{p\cos x}{2qq\sin x}\;,$$

ubi cum sit $dp = -2n\,dP$ et $\frac{dr}{rr} = -2n(dQ - dR)$, erit

$$dx = d\varphi + \frac{n\,dP(2q+(1+qq)\cos x)}{pqq\sin x} - \frac{np\,(dQ-dR)\cos x}{qq\sin x}\;.$$

34. Iam vero, cum sit $dP = v^3\,d\varphi\,\sin\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$, erit primo variatio in semi-parametro p producta:

$$dp = -2nv^3\,d\varphi\,\sin\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\;.$$

Deinde ob $dv = \frac{qvv\,d\varphi\,\sin x}{p}$ erit

$$dQ = \frac{qv^3\,d\varphi\,\sin x}{p\tau^3}$$

et[15]

$$dR = \left(\frac{qvv\,d\varphi\,\sin x\cos\rho}{p} - v\,d\varphi\,\sin\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\;;$$

15 Editio princeps: quv loco qvv.

unde pro variatione semi-axis transversi r reperitur:

$$\frac{dr}{rr} = -\frac{2nqv^3\,d\varphi\,\sin x}{p\tau^3} + 2nv\,d\varphi\left(\frac{qv\sin x\cos\rho}{p} - \sin\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Tum vero relatio inter $d\varphi$ et dx prodit[16]:

$$\begin{aligned} dx = d\varphi &+ \frac{nv^3\,d\varphi\,(2q+(1+qq)\cos x)\sin\sigma}{pqq\sin x}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right) - \frac{nv^3\,d\varphi}{q\tau^3}\cos x \\ &- \frac{npv\,d\varphi\,\cos x\sin\sigma}{qq\sin x}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right) + \frac{nvv\,d\varphi\,\cos x\cos\rho}{q}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right); \end{aligned}$$

ubi meminisse oportet esse $v = \dfrac{p}{1+q\cos x}$.

35. In hac postrema formula termini per $\sin\sigma$ affecti commode in unum colligi possunt: si enim posterior per $\dfrac{vv(1+q\cos x)^2}{pp} = 1$ multiplicetur, ambo coniunctim erunt

$$+\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin\sigma}{pqq\sin x}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\left(\cos x + 2q + qq\cos x - \cos x - 2q\cos x^2 - qq\cos x^3\right),$$

qui ergo in hunc evalescunt

$$\frac{nv^3\,d\varphi\sin x\sin\sigma}{pq}(2+q\cos x)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

hincque ergo habebimus[17]

$$\begin{aligned} dx = d\varphi - \frac{nv^3\,d\varphi}{q\tau^3}\cos x &+ \frac{nvv\,d\varphi\,\cos x\cos\rho}{q}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right) \\ &+ \frac{nv^3\,d\varphi\,\sin x\sin\sigma}{pq}(2+q\cos x)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right); \end{aligned}$$

quae forma etiam hoc modo exprimi potest[18]:

$$dx = d\varphi - \frac{nv^3 d\varphi}{q\tau^3}\cos x + \frac{nvv d\varphi}{q}\left(\cos x\cos\rho + \frac{2+q\cos x}{1+q\cos x}\sin x\sin\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

ubi notandum est $d\varphi - dx$ definire progressionem momentaneam lineae absidum.

36. Consideremus nunc etiam relationem, quae inter angulum elementarem $d\varphi$ et tempusculum dt intercedit, et cum sit $G - nP = \frac{1}{2}p$, erit

$$vv\,d\varphi = dt\sqrt{\alpha(A+B)p}\,.$$

Quodsi iam loco tempusculi dt angulum a terra motu medio interea confectum introducere velimus, ut constans vaga α eliminetur, ponamus a terra secundum motum medium, quoquidem nunc gaudet, tempusculo dt absolvi angulum ele-

16 Editio princeps: $-\dfrac{nv^3\,d\varphi}{q\tau^3}$ loco $-\dfrac{nv^3\,d\varphi}{q\tau^3}\cos x$.

17 Vide notam praecedentem.

18 Ibidem.

mentarem dT: et formula ista ad motum terrae accommodata, qui[19] pro motu medio tanquam circulus spectari debet, cuius radius seu distantia media a sole fit $= a$, fiet $v = p = a$ et $d\varphi = dT$, ita ut sit[20]

$$aa\,dT = dt\sqrt{\alpha(A+B)a}\,, \qquad \text{seu} \qquad \alpha(A+B)\,dt^2 = a^3\,dT^2\,,$$

ubi quidem B massam terrae denotat; sed ob insignem massae solis magnitudinem pro omnibus planetis quantitas $A+B$ pro eadem haberi potest. Tempusculo ergo, quo terra motu medio angulum dT absolvit, erit pro nostro planeta

$$vv\,d\varphi = a\,dT\sqrt{ap} \qquad \text{ideoque} \qquad dT = \frac{vv\,d\varphi}{a\sqrt{ap}}\,.$$

37. Cum nunc sit $\alpha\,dt^2 = \dfrac{v^4\,d\varphi^2}{(A+B)p}$, erit hoc valore in superioribus formulis (§ 24) substituto ob $\dfrac{C}{A+B} = n$

$$d\psi = -\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin\xi\sin(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\,,$$

hincque porro pro variatione inclinationis

$$d\omega = -\frac{nv^3\,d\varphi\,\cos\xi\sin\omega\sin(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\,,$$

ac pro variatione argumenti latitudinis seu anguli ☊$AZ = \xi$

$$d\xi = d\varphi + \frac{nv^3\,d\varphi\,\sin\xi\cos\omega\sin(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\,,$$

ubi $d\varphi - d\xi$ exprimit promotionem lineae nodorum in orbita planetae, quem in Z consideramus. Atque hoc modo omnes mutationes momentaneas ab actione planetae cometaeve in Q versantis profectas per angulum elementarem $d\varphi$ ideoque etiam per angulum motu medio terrae vel solis confectum dt expressas dedimus.

38. Si hae formulae integrari possent, non solum quaestioni ab Illustrissima Academia Regia Scientiarum perfecte satisfieret, sed etiam omnes perturbationes, quas planetae vel cometae mutua actione in motu suo patiuntur, ita exacte definiri possent, ut vix quicquam amplius in Theoria Astronomiae esset desiderandum, quod autem, antequam Analysis insignibus incrementis locupletetur, nec sperare quidem licet. Quamdiu autem his subsidiis caremus, tutissima via videtur his ipsis formulis differentialibus ita utendi, ut mutationes intervallo singulorum dierum productae tanquam differentialia spectentur sicque valor ipsius dT statuatur $= 59'\,8''$. Tum enim pro singulis temporis intervallis ex ipsis formulis differentialibus valores variationum dp, dr, $d\psi$ et $d\omega$ colligi indeque pro tempo-

19 Editio princeps: quae.
20 Editio princeps: $au\,dT$ loco $aa\,dT$.

re quantumvis magno eaedem mutationes satis exacte aestimari poterunt. Haec methodus praecipue usum habebit, si perturbationes a cometa oriantur, cuius effectus cum per modicum tempus duret, non nimis prolixos calculos postulabit. Periculum igitur feci in perturbatione motus terrae a nupero cometa orta aestimanda.

De effectu nuperi Cometae in motu Telluris perturbando

39. Cum huius Cometae[21] nondum eiusmodi observationes ad me pervenerint, ex quibus elementa motus, quem nunc tenuit, definire potuissem, iis usus sum elementis, quae pro eius apparatione Anno 1682 sunt stabilita;[22] atque quantum ex observationibus crassioribus colligere licuit, assumsi hanc cometam[23] ad diem 14 Martii huius anni[24] per Perihelium transiisse. Quamvis autem verisimile sit elementa motus perinde ac tempus periodicum a praecedente apparatione mutationem esse passa, tamen loca cometae visa satis cum superioribus elementis convenire sunt deprehensa, ut hinc nullus enormis error sit metuendus. Erat ergo hic cometa terrae proximus circa diem 27 Aprilis, eiusque distantia ad distantiam solis fere se habebat ut 2 ad 17. De massa autem eius nihil suspicari licet; quam ad massam Solis rationem tenere pono ut n ad 1, ita ut, si cometae massa aequaretur massae terrae, foret prope modum $n = \frac{1}{200000}$. At verum valorem fractionis n nonnisi ex effectu in posterum observando definire licebit.

40. Quoniam igitur actio cometae in terram circa 27 Aprilis erat maxima, pro pluribus diebus ante et post hoc tempus variationes in orbita terrae productas ex formulis ante datis computavi:

Intervallum temporis.	Variatio semi−parametri. dp	Variatio semi−axis. dr	Variatio lineae absidum. $d\varphi - dx$	Variatio lineae nodorum. $d\psi$	Variatio inclinationis. $d\omega$
Aprilis					
20 − 21	$+\ 45310\,n$	$+\ 44570\,n$	$-\ 4937560\,n$	$+\ 8903\,n$	$+\ 6717\,n$
25 − 26	$+155650\,n$	$+154346\,n$	$-19059570\,n$	$+112880\,n$	$+111364\,n$
26 − 27	$+135314\,n$	$+135466\,n$	$-18445310\,n$	$+152436\,n$	$+159996\,n$
27 − 28	$+\ 66010\,n$	$+\ 67438\,n$	$-11593600\,n$	$+155398\,n$	$+173911\,n$
28 − 29	$-\ 3262\,n$	$-\ 1014\,n$	$-\ 3778470\,n$	$+119840\,n$	$+143550\,n$
29 − 30	$-\ 37860\,n$	$-\ 35616\,n$	$+\ 878107\,n$	$+\ 78234\,n$	$+100724\,n$
30 − 1 Maii	$-\ 46088\,n$	$-\ 44210\,n$	$+\ 1799210\,n$	$+\ 48305\,n$	$+\ 67183\,n$
1 − 2	$-\ 43260\,n$	$-\ 41772\,n$	$+\ 2959610\,n$	$+\ 29734\,n$	$+\ 44933\,n$
6 − 7	$+\ 19031\,n$	$-\ 17736\,n$	$+\ 1554230\,n$	$+\ 3608\,n$	$+\ 9506\,n$

posito semi-axe ab actione cometae immuni $r = 100000$.

21 Vide notam 2.
22 Vide notam 3.
23 Vide notam 2.
24 Id est 1759.

41. Hinc patet 1° semi-parametrum p ad 28 Aprilis augeri, tum vero iterum minui, ita tamen, ut incrementum multum superet decrementum. Totum quidem augmentum exsurgere videtur ad $700000\,n$, ex quo, cum ante adventum cometae semi-parameter esset $= 97144$, is posthac erit $= 97144+700000\,n$. Quare si massa cometae ad massam terrae statuatur ut m ad 1, erit nunc semi-parameter orbitae terrae $= 97144 + \frac{7}{2}\,m$. 2° Pares fere mutationes patitur semi-axis transversus r, qui ab actione cometae augmentum accepisse videtur $= 690000\,n$, unde isquidem nunc erit $= 100000+\frac{69}{20}\,m$, denotante perpetuo $m : 1$ rationem massae cometae ad terrae. 3° Hinc sequitur, cum excentricitas orbitae terrae ante adventum cometae esset $= 0{,}0169$, eam nunc aliquanto fore minorem $= 0{,}0169-0{,}000044\,m$. Quando vera elementa motus cometae fuerint erecta, operae pretium erit hunc calculum repetere et ad plures dies tam ante quam post perigaeum extendere.

42. Cum ab actione cometae axis orbitae terrae certe sit auctus in posterum, quantitatem anni solaris maiorem fieri necesse est, idque in ratione

$$1 \text{ ad } \left(1+\frac{69\,m}{2000000}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{seu} \quad 1 \text{ ad } \left(1+\frac{207\,m}{4000000}\right).$$

Quare cum ante adventum cometae annus solaris fuisset $365^{\mathrm{d}}5^{\mathrm{h}}49' = 525949'$, incrementum anni in posterum hinc prodit $= 27\,m'$, quod sane admodum est notabile; si enim massa cometae aequalis esset massae terrae, quantitas anni solaris posthac futura esset $365^{\mathrm{d}}6^{\mathrm{h}}16'$, unde non exigua mutatio in calendarium inferretur. Imprimis autem tabulae astronomicae omnes mediorum motuum, quatenus ad annos referentur, insigni correctione indigerent. Quin etiam, si cometa tantum parti $\frac{1}{27}$ terrae aequaretur, incrementum unius minuti primi in annos mox sentiri deberet, atque hinc massa cometae accuratissime cognosci posse videtur.

43. Quia motus cometae erat retrogradus, motusque lineae absidum terrae ad eius orbitam relatur, signum $-$, quod in columna $d\varphi - dx$ praevalet, ostendit lineam absidum terrae promotam esse. Idque per spatium, quod haud minus quam $100000000\,n$ aestimari potest. Foret ergo nunc aphelium terrae magis promotum per spatium $500\,m''$, unde si cometa esset terrae aequalis, nunc quidem locus aphelii, quem tabulae ostendunt, augeri deberet $8'20''$, quod incrementum mox ex accuratissimis observationibus solis post actionem cometae instituendis percipi deberet. Denique ex binis ultimis columnis patet ambos angulos ψ et ω insigne augmentum capere debere. Quod utrinque haud minus quam $950000\,n''$ vel $47\frac{1}{2}\,m''$ aestimari potest, sunt enim ambo fere aequalia. Cuiusmodi autem phaenomena hinc oriantur, operae pretium erit accuratissime definire.

44. Sit igitur (Fig. 2) in coelo ☊C via cometae ex sole visa et ☊♎♋ eclipticae situs ante cometae adventum, erit ex elementis orbitae cometae angulus[25] C☊♎ $= 17°56' = \omega$ et arcus ☊♎ $= 57°16'$. Iam per punctum ♎ transeat aequator Æ♎Q, ut sit angulus Æ♎♋ $= 23°28\frac{1}{2}'$. At postquam cometa effectum

25 Editio princeps: ☊♎C loco C☊♎.

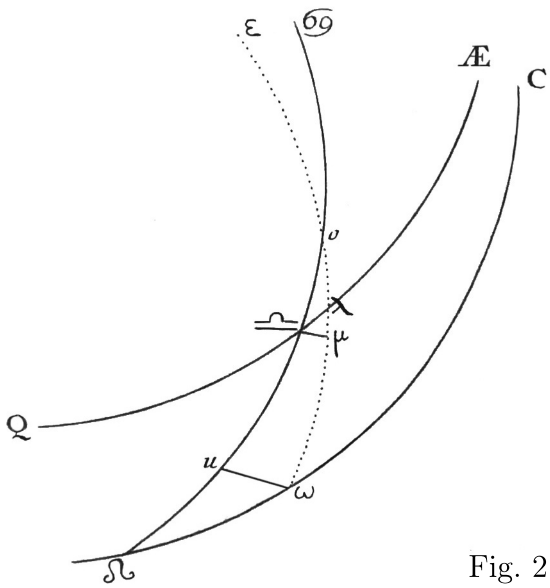


Fig. 2

suum produxit, sit $\varepsilon o\lambda\omega$ ecliptica secans priori in o, erit

$$♌\omega = d\psi \quad \text{et} \quad C\omega o = \omega + d\omega \,.$$

Ducatur arculus ωu ad $♌ o$ normalis, erit

$$♌ u = d\psi \, \cos\omega \quad \text{et} \quad \omega u = d\psi \, \sin\omega \,.$$

Hinc ob $d\omega = d\psi$ reperitur arcus $♌ o = 17°7'$ et angulus minimus ad $o = 50\,m''$, ob $d\psi = d\omega = 47\frac{1}{2}\,m''$. Cum ergo sit $♎ o = -34°9'$, ecliptica motu aggratorio circa punctum o, quod cadit in ♏ $4°9'$, conversa est angulo $50\,m''$ sicque punctum solstitiale ♋ magis ab aequatore removetur et obliquitas eclipticae augetur. Ac si obliquitas eclipticae augetur ac si obliquitas eclipticae pristina ponatur $= \varepsilon$, praesens[26] $= \varepsilon + d\varepsilon$, invenitur $d\varepsilon = 41\,m''$, et cum sit $\mu\lambda = -63\,m''$, puncta aequinoctialia super ecliptica promota erunt spatio $63\,m''$, super aequatore autem spatio $70\,m''$. In latitudine igitur stellarum fixarum hic effectus potissimum spectabitur, et maxime quidem in iis, quarum longitudo est vel ♌ $4°9'$ vel ♒ $4°9'$, quarum illae ad polum eclipticae borealem accessisse, hae vero ab eo recessisse videbuntur intervallo $50\,m''$.

Responsio ad Quaestionem

45. Cum ergo dubitari nequeat, quin axis orbitae Telluris ab actione nuperi Cometae augmentum acceperit, nisi forte quis vel sistema gravitationis universalis evertere vel corpora cometarum omnes materia expertia statuere velit, quorum

26 Editio princeps: $\zeta + d\varepsilon$ loco $\varepsilon + d\varepsilon$.

alterum gravissimis argumentis, alterum naturae corporum adversaretur, omnino agnoscere debemus quantitatem anni solaris in posterum aliquantum maiorem esse futuram, quam adhuc fuerat, etiamsi verum augmentum ob massam cometae incognitam definire haud liceat. Ex quo necessario sequitur motum medium solis aliquanto tardiorem fieri oportere. Cuiusmodi mutatio cum nunc quidem in terra contigerit, omnino probabile est similem perturbationem iam antehac non solum in terra, sed etiam in reliquis planetis esse factam, ita ut sine ulla dubitatione asseverare possimus motus medios planetarum quandoque alterationibus esse obnoxios.

46. Huiusmodi alteratio toties evenire debet, quoties cometa cuipiam planetae sit admodum vicinus, quod, quin saepius iam contigerit, vix dubitare licet. Utinam Historia Cometarum maiori cura ab Astronomiae peritis omni tempore fuisset consignata! Inde enim, quinam cometae ad quempiam planetam satis prope accesserint, cognosci eorumque effectus per similem calculum, quo hic sum usus, determinari posset; sed vetustiores relationes ita plerumque fabulis sunt refertae, ut parum fidei mereantur; quantus enim effectus oriri debuisset ab illis cometis, quorum magnitudo apparens Lunam superasse perhibetur? Qui quin terrae multo viciniores fuissent, quam hic postremus, dubitare non posset, cum tamen observationes astronomicae vix ullam alterationem indicare videantur. Merito igitur huiusmodi cometarum, qui adeo in regiones sublunares descendisse ferantur, relationes fabulis vulgi annumerantur.

47. Neque tamen omnino negare possumus ante hoc tempus ullas huiusmodi perturbationes in motu terrae esse productas, etiamsi fortasse aliquot abhinc seculis, quibus Astronomia maiori studio tractare est capta, nihil tale evenerit. Fieri enim posset, ut ob defectum idonearum observationum huiusmodi alteratio non esset animadversa, vel ut motus medius iam ita fuerit constitutus, ut etiam cum illis satis prope conveniret. Suspicio hinc saltem nasci posset, quoniam Ptolemaei observationes, cum nostris collocatae, anni quantitatem aliquanto minorem ostendunt, nisi error reductionis Calendarii Aegyptiaci ad Romanum in causa sit, intervallo temporis ab Hipparcho ad Ptolemaeum elapsi cometam quendam annum contraxisse, deinde vero ab alio quopiam cometa annum iterum nonnihil fuisse protractum. Verum de his nihil praeter coniecturas proferre licet, sufficiat igitur exemplo nuperi cometae ostendisse ab eius actione utique alterationem in motu medio terrae oriri debuisse.

48. At si ab ista cometa non solum terrae motus medius, sed etiam positio et species eius orbitae quandam variationem est passa, fieri omnino nequit, quin Luna in motu suo multo maiores perturbationes sit passa, quas cum per Theoriam definire vix liceat, observationes posthac instituendae declarabunt[27]. Ubi quidem non parum esset dolendum, cum iam post tot tantosque labores Theoria Lunae ad id perfectionis sit perducta, ut lunae loca fere aeque exacte ac solis definire valuerimus, si ingens hoc opus posthac nulli usui amplius esset futurum, plures

27 Editio princeps: instituenda declarabant.

enim anni novae Theoriae condendae vix sufficerent. Hoc autem eo magis est verendum, cum revera mutatio quaedam in motu lunae medio post tempora vetustissimarum observationum facta deprehendatur. Quae quin effectui cuiuspiam cometae sit tribuenda, nunc quidem extra dubium positum videtur.

49. Atque hae causae perturbationum ab actione cometarum profectae ita sunt incertae, ut neque quae antehac evenerunt ob defectum observationum assignari, neque futurae praedici queant, nisi forte pro iis cometis, quorum reversiones iam satis sunt exploratae, etiamsi perturbationes, quas ipsi in suo cursu a planetis patiuntur, haud levi sint impedimento. Certiores autem eae sunt perturbationes, quae ab actione mutua planetarum oriuntur, et ad quas definiendas supra expositae formulae simili modo adhiberi possunt, ita ut pro singulis diebus vel etiam minoribus maioribusve temporis intervallis variationes singulorum elementorum per ipsas formulas differentiales definiantur, ac deinceps in unam summam colligantur. Qui calculus fortasse minori opera expedietur, quam si integratio completa harum formularum in nostra esset potestate; integralia enim, siquidem unquam ea eruere licebit, tantopere implicata fore videntur, ut nonnisi prolixissimis ac taediosissimis calculis evolvi queant.

50. Cum igitur quaestio proposita non omnes perturbationes requirat, sed ad variationem axis transversi sit adstricta, eam sequenti formula exprimi supra vidimus:

$$\frac{dr}{rr} = -\frac{2nqv^3\, d\varphi\, \sin x}{p\tau^3} + 2nv\, d\varphi \left(\frac{qv \sin x \cos\rho}{p} - \sin\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) \;;$$

quam aliquanto attentius considerari conveniet. Est autem n fractio tam parva, ut, nisi distantia τ admodum sit exigua, haec expressio nullius sit momenti: tum vero patet eam proxime cubo distantiae $QZ = \tau$ reciproce esse proportionalem, ita ut dimidia distantia effectum octies maiorem afferat. Deinde etiam distantia $AQ = u$, quando fit minima, hanc expressionem multum augere potest, tamen quia tantum ratio inversa duplicata distantiae adest, hic effectus illo longe minor est censendus, nisi forte ingens cometa in perihelio suo solem fere attingat, uti Anno 1681 evenisse constat: sed haec vicinitas nimis cito transit, quam ut effectus inde notabilis oriri posse videatur.

51. Qui formulam non tam integrare quam ad commodam approximationem perducere voluerit, vehementer vereor, ne oleum operamque perdiderit. Primo enim ipsa quantitas τ tali irrationalitate est implicata, ut ad hunc usum vix in seriem satis convergentem evolvi posse videatur: namque si casu, quo τ est quantitas parva, fuerit convergens, id quod imprimis est opus, pro reliquis casibus plane erit inepta. Deinde tam in ea quam in reliquis formulae partibus inest angulus ρ cum angulo σ, qui ipsi formulis nimis perplexis definiuntur, quam ut successum sperare valeamus. Cuius difficultatis ratio potissimum in inclinatione binarum orbitarum seu angulo τ est sita, qui cum in cometis quantumvis magnus esse possit, ne tentare quidem huiusmodi reductionem volui, praesertim

cum omnino minus sit molestum calculum ex ipsa formula differentiali repetere, quemadmodum pro cometa huius anni feci, eademque methodo pro omnibus reliquis cometis uti mallem, a quorum actione motus cuiuspiam planetae turbari videatur.

52. Verum pro actione mutua planetarum, quoniam eorum orbitae parum inter se inclinantur, nostra formula aliquanto simplicior reddi potest. Si enim inclinatio ω evanescat, uti pro planetis assumere licet, consideratio lineae nodorum penitus exuitur ob $\cos\omega = 1$, erit

$$d\xi = d\varphi - d\psi \quad \text{et} \quad \xi = \varphi - \psi$$

hincque

$$\cos\rho = \cos(\varphi - \theta) \quad \text{et} \quad \sin\sigma = \sin(\varphi - \theta)\ ,$$

ita ut litterae ρ et σ eundem angulum $\varphi - \theta$, qui est distantia amborum planetarum ex sole visa, denotent. Quare hoc casu erit

$$\tau = \sqrt{\left(uu - 2uv\cos(\varphi - \theta) + vv\right)}\ ,$$

et

$$\frac{dr}{rr} = -\frac{2nqv^3\, d\varphi\, \sin x}{p\tau^3} + 2nv\, d\varphi \left(\frac{qv\cos(\varphi - \theta)\sin x}{p} - \sin(\varphi - \theta)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quae ob $\frac{p}{v} = 1 + q\cos x$ transformatur in hanc

$$\frac{dr}{rr} = -\frac{2nqv^3\, d\varphi\, \sin x}{p\tau^3} - \frac{2nvv\, d\varphi}{p}\left(\sin(\varphi - \theta) + q\sin(\varphi - \theta - x)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\ .$$

53. In hac formula, quia per fractionem minimam n est multiplicata atque omnes perturbationes valde sunt exiguae, primo quantitates p et q pro constantibus haberi possunt. Tum vero ponere licet $dx = d\varphi$ neglecto motu lineae absidum. Deinde quo tempore terra motu medio conficit angulum dT, eodem erit $d\varphi = \frac{a\, dT\sqrt{ap}}{vv}$, existente $v = \frac{p}{1 + q\cos x}$. Ac si pro altero planeta perturbante in Q sit semiparameter $= b$, excentricitas $= e$ et anomalia vera a perihelio computata $= y$, erit simili modo

$$u = \frac{b}{1 + e\cos y} \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{a\, dT\sqrt{ab}}{uu} = dy\ ,$$

unde omnia differentialia ad idem dT reducuntur. Sed maxima difficultas etiamnum in formula irrationali τ residet. Quae quomodo superari queat, ita quidem, ut nostrum institutum postulat, nondum perspicio: immanes enim calculos evitare vellem, quia inde parum subsidii suppetiturum praevideo.

54. Simplicissimus est casus, quo ambae orbitae statuuntur circulares et excentricitas negligitur. Unde fit $v = p = r$, $u = b$:

$$d\varphi = \frac{a\,dT\,\sqrt{ap}}{rr} = \frac{a\sqrt{a}}{r\sqrt{r}}\,dT$$

et[28]

$$d\theta = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}\,dT\ ,$$

tum vero

$$\tau = \sqrt{\big(bb + rr - 2br\cos(\varphi - \theta)\big)}\ ,$$

et variatio quaesita[29]

$$dr = -2nr\,d\varphi\,\sin(\varphi - \theta)\left(\frac{b}{\tau^3} - \frac{1}{bb}\right)\ ;$$

ubi quidem ipsa quantitas r ob mutabilitatem minimam ut constans spectari potest. Hic igitur observo, quomodocunque formula $\frac{b}{\tau^3}$ in seriem convertatur, in ea tantum anguli $\varphi - \theta$ cosinum cum suis potestatibus occurrere, quae cum ad cosinus multiplorum eiusdem anguli reducantur, si ponamus brevitatis gratia $\varphi - \theta = \eta$, factor $\frac{b}{\tau^3} - \frac{1}{bb}$ huiusmodi formam induet:

$$A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \text{etc.}\ ,$$

unde integrale ipsius dr, quia $d\varphi$ ad dy constantem habet rationem, simili quoque forma exprimetur, ita ut durante qualibet revolutione quantitas r variationes quidem patiatur, sed potest quamlibet iterum eandem quantitatem recuperet: ex quo motus medius nullam alterationem pati censebitur.

55. Quamdiu ergo ambae orbitae excentricitate carent, a planetarum actione mutua nulla alteratio in eorum motu medio efficitur: quas enim mutationes axis transversus per singulas revolutiones subit, eae inter inaequalitates motus referri solent. Fieri autem potest, ut ab eadem actione post longum demum tempus utrique orbitae excentricitas quaedam inducatur, quod cum evenerit, haec ratio cessat atque in nostro calculo excentricitatis ratio erit habenda. Tum autem perpendendum est, tam formulam $\frac{v^3}{\tau^3}$ quam $vv\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$ in huiusmodi seriem evolvi:

$$A + B\cos\eta + C\cos x + D\cos y + \text{etc.}\ ,$$

in qua occurrent cosinus omnium angulorum, qui ex combinatione horum trium η, x et y oriri possunt[30], unde dr aequabitur producto ex elemento $d\varphi$ in seriem

28 Editio princeps: $d\tau$ loco dT.
29 Editio princeps: $-2nr^3$ loco $-2nr$.
30 Editio princeps: oriri η, x et y possunt.

sinuum huiusmodi angulorum:

$$A\sin\eta + B\sin x + C\sin(\eta - x) + D\sin(\eta + x) + E\sin(\eta + y) + F\sin(\eta - y) + \text{etc.}$$

qui scilicet oriuntur, si illa forma vel per $\sin x$ vel per $\sin\eta$ vel per $\sin(\eta - x)$ multiplicetur.

56. Tum vero ad integrationem absolvendam notetur esse

$$d\varphi = dx = dT\,(\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos 2x + \text{etc.})$$

et

$$d\theta = dy = dT\,(\alpha' + \beta'\cos y + \gamma'\cos 2y + \text{etc.})\ .$$

Unde cum huiusmodi formulae integrandae occurrant $d\varphi\,\sin(\lambda y + \mu x + \nu y)$, tum $d\varphi$ ita representari potest, ut sit

$$d\varphi = \frac{\alpha(\lambda\,d\eta + \mu\,dx + \nu\,dy)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'} + M\,dt\,\cos x + N\,dt\,\cos y + \text{etc.}\ ,$$

cuius seriei primum membrum in integratione dat:

$$-\frac{\alpha\cos(\lambda\eta + \mu x + \nu y)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'}\ ;$$

reliqua autem membra, quae sunt multo minora, in formula differentiali novos praebent terminos similes integrandos, qui pari modo sunt tractandi. Sicque cum continuo ad terminos minores perveniatur, tandem hoc modo cuiusque termini integrale satis exacte obtinebitur.

57. Cum autem hic non de omnibus inaequalitatibus axis transversi sit quaestio, sed iis tantum, quae per plures revolutiones continuo vel augentur vel diminuuntur: hic imprimis spectandi sunt ii differentialis termini, in quibus fit

$$\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha' = 0\ ,$$

qui continent sinum anguli $\eta - x + y$ vel eius multiplorum. Cum enim ob $\eta = \varphi - \theta$ hic angulus sit $(\varphi - x) - (\theta - y)$, ubi $\varphi - x$ longitudinem perihelii planeatae Z et $\theta - y$ longitudinem perihelii planetae Q designet, angulus $\eta - x + y$ exprimit distantiam utriusque perihelii, quae cum constans haberi possit, erit partis $d\varphi\,\sin(\eta - x + y)$ integrale $= \varphi\sin(\eta - x + y)$, hincque axis transversus continuo vel crescet vel decrescet uniformiter, nisi quatenus post plurima secula distantia periheliorum mutatur. Quae si tandem ad eundem valorem redierit, iterum axem ad pristinum quidem statum reducit. Verum cum hoc quasi nunquam eventurum sit censendum, quamdiu quidem Astronomia viguit et vigebit, axes transversi orbium planetarum continuo vel augebuntur vel diminuentur.

58. Evidens quoque est coefficientem termini $\sin(\eta - x + y)$ utramque excentricitatem q et e in se complecti; unde ceteris paribus ista axis transversi mutatio

eo maior erit, quo maius fuerit productum excentricitatum eq; ac si alterutra saltem fuerit minima, nisi altera sit maxima, haec axis transversi ideoque et motus medii variatio vix erit sensibilis. Tum vero haec variatio potissimum a distantia periheliorum pendet, qua si fuerit vel nulla vel sex signorum, nullam etiam variationem in motu medio gignit. Maxima autem evadet haec variatio, si ambo perihelia tribus signis a se invicem distent. Praeterea vero hic effectus potissimum a magnitudine planetae perturbantis eiusque vicinitate pendebit.

59. Cum igitur huiusmodi terminus $d\varphi \sin(\eta - x + y)$ certo in variationem axis transversi ingrediatur, iam re perpensa ad quaestionem Illustrissimae Academiae Regiae ita respondeo, ut dicam, motus medios planetarum non solum ab actione cometarum satis prope praetereuntium mutationibus esse obnoxios, sed etiam ab actione mutua eorum pro ratione excentricitatis positionisque periheliorum seu apheliorum eiusmodi mutationes pati, ut continuo fere aequabiliter vel accelerentur vel retardentur. Atque ex formulis inventis, si analysis sufficeret, et quispiam laborem suscipere vellet, vera adeo quantitas huius alterationis assignari posset, quae cum ab Illustrissima Academia non expresse requiratur quaestioni equidem satisfecisse videor, interim quid de singulis planetis sit censendum, hic subiungam.

60. Primo igitur Mercurius, etsi excentricitatem habet maximam, ob[31] insignem reliquorum planetarum distantiam prae distantia solis vix ullam mutationem in motu medio patietur, nisi forte a Jove, cuius aphelium ab aphelio Mercurii distat 64°, effectus quidam exiguus oriatur. In Venere autem ob eius excentricitatem fere evanescentem nulla mutatio producetur. Terrae autem motus medius a Jove imprimis affici debet, cum distantia apheliorum sit 88°, quam autem parum sensibilem esse Observationes testantur. Mars tam a Jove quam Saturno pati debet, idque multo magis quam terra, quia his planetis est propior simulque maiori excentricitate praeditus. Saturnus autem et Jupiter, uti sunt a Sole remotissimi et maximas massas continent, eo magis in se invicem agere debent, quod cum excentricitas in utroque satis est magna, tum vero eorum aphelia 79° a se invicem distant; unde in utroque motus medius haud exiguam variationem patitur, quae adeo iam per observationes satis videtur confirmata.

31 Editio princeps: ab.

RÉFLEXIONS SUR LES INÉGALITÉS DANS LE MOUVEMENT DE LA TERRE, CAUSÉES PAR L'ACTION DE VENUS

Commentatio 511 indicis Enestroemiani
Acta academiae scientiarum Petropolitanae [2:I] (1778:I), 1780, p. 297–307
(Kommentar zu E 511)

Pour déterminer les dérangemens dans le mouvement des Planètes, qui sont causés par leur action mutuelle, on se sert ordinairement de la méthode, que j'ai employé le premier, si je ne me trompe, dans mes recherches sur les irrégularités, qu'on observe dans le mouvement de Saturne.[1] Or cette méthode ne sçauroit réussir, à moins qu'on ne trouve moyen de transformer une telle formule irrationelle: $(1 \pm n\cos\phi)^{-\frac{3}{2}}$ dans une série convergente, dont les trois premiers termes expriment déjà assés exactement la juste valeur; ce qui n'a aucune difficulté dans tous les cas, où la lettre n marque une fraction très petite, puisque alors les trois premiers termes de cette série: $1 \pm \frac{3}{2}n\cos\phi + \frac{15}{8}nn\cos\phi^2$ ne sçauroient s'écarter sensiblement de la vérité. Mais quand la valeur de n devient plus considérable et qu'elle approche même de l'unité: alors il est clair, que ces mêmes trois termes pourront bien énormément s'écarter de la valeur de la formule, et que les termes suivans, qu'on néglige, pourront causer une erreur très considérable.

Or cette formule entre très essentiellement dans le calcul; vu qu'elle renferme l'effet de l'action, que les deux Planètes exercent l'une sur l'autre. Pour montrer cela plus clairement, soient P et Q les deux Planètes, le Soleil étant supposé en repos en S, et nommant les distances $SP = p$ et $SQ = q$ et l'angle au Soleil $PSQ = \phi$, la distance entre les Planètes sera $\sqrt{pp + qq - 2pq\cos\phi}$, au quarré de la quelle l'action des Planètes est réciproquement proportionelle, qui sera donc comme $\frac{A}{pp + qq - 2pq\cos\phi}$; mais la décomposition de cette force, que l'application aux principes du mouvement exige, conduit à des formules, divisées par le cube de cette distance PQ, dont la forme sera par conséquent

$$\frac{S}{(pp + qq - 2pq\cos\phi)^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien $S(pp+qq-2pq\cos\phi)^{-\frac{3}{2}}$, qui se reduit à la forme mentionnée, en supposant

$$pp + qq = SS \quad \text{et} \quad \frac{2pq}{pp + qq} = n\,.$$

1 [E 120], [E 384].

De là on voit, que la valeur de la lettre n dépend du rapport des distances p et q, dont les deux Planètes sont éloignées du Soleil, et qu'elle ne sçauroit être une petite fraction, à moins que l'une de ces deux distances ne soit plusieures fois plus grande que l'autre. Ainsi dans le cas ou Jupiter est supposé en P et Saturne en Q on a

$$p = 52029 \quad \text{et} \quad q = 95418$$

ou bien à peu près $p : q = 5 : 9$, d'où résulte la valeur de $n = \frac{45}{53}$, dont la proximité de l'unité est sans doute la raison, pourquoi tous les éfforts de la Théorie ont jusqu'ici si peu réussi.

Or cet inconvénient devient encore beaucoup plus considérable lorsqu'on veut déterminer l'effet de l'action mutuelle de la Terre et de Venus; car supposant Venus en P et la Terre en Q, on aura les distances moyennes $p = 72340$ et $q = 100000$, d'où l'on tire $n = 0{,}94978$. Cette valeur approche déjà tant de l'unité, que la résolution mentionnée ci-dessus doit s'écarter très énormément de la vérité. Car supposant

$$(1 - n\cos\phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}n\cos\phi + \tfrac{15}{8}n^2\cos\phi^2$$

on aura pour la conjonction, où l'angle $\phi = 0$

$$(1-n)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}n + \tfrac{15}{8}nn\,.$$

Or on trouve la vraye valeur de la formule

$$(1-n)^{-\frac{3}{2}} = 88{,}843$$

et la somme des trois termes ne donne que

$$1 + \tfrac{3}{2}n + \tfrac{15}{8}nn = 4{,}116\,.$$

Cette différence est sans doute extravagante. Considérons aussi le cas des oppositions, où $\phi = 180°$, et qu'on suppose

$$(1+n)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{2}n + \tfrac{15}{8}nn\,;$$

or le premier membre de cette équation produit

$$(1+n)^{-\frac{3}{2}} = 0{,}367$$

et les trois termes de l'autre membre donnent

$$1 - \tfrac{3}{2}n + \tfrac{15}{8}nn = 1{,}268\,.$$

D'où il est clair, qu'en employant cette méthode on risquera de se tromper très grossiérement.

Pour remédier à ce grand défaut je doute fort qu'on puisse découvrir une autre méthode, que celle, que j'ai exposée dans le Volume XVI des nouveaux Commentaires de l'Académie,[2] où j'ai formé le plan de poursuivre quasi pas à pas les deux Planètes dans leur mouvement et de déterminer pour chaque petit intervalle de tems l'effet, que l'action de Venus doit produire dans le mouvement de la Terre; et nôtre habile Astronome, Mr. Lexell, a bien voulu se charger de son exécution, en faisant tous les calculs laborieux et pénibles, qu'il exigeoit, et qui lui ont fourni la table, qu'on y trouve ajoutée, pour la correction, à employer dans le lieu de la Terre, pour chaque situation par rapport à Venus. Or comme l'effet est toujours proportionel à la masse de Venus, nous l'avons supposée égale à celle de la Terre, de sorte qu'en cas qu'elle fut ou plus grande ou plus petite, on n'auroit qu'à changer les nombres de la Table dans la même proportion.[3]

On trouve aussi une telle correction dans les tables solaires de feu Mr. de la Caille,[4] que je présume être calculée suivant la méthode ordinaire, dont je viens de démontrer l'insuffisance. Je me propose de comparer plus soigneusement cette table avec celle que Mr. Lexell a construite sur les véritables principes.[5] Ce qui est d'autant plus facile, que l'une et l'autre se rapporte au même argument, qu'on trouve, en soustrayant la longitude moyenne de la Terre, vuë du Soleil, de la longitude héliocentrique moyenne de Venus. La table ci-jointe peut servir à faciliter cette comparaison entre les deux tables des corrections mentionnées, et en la considérant plus attentivement elles nous fournit les réflexions suivantes.

1. Désignons d'abord l'argument de cette Table par la lettre ϕ, qui marque comme ci-dessus l'angle au Soleil compris entre les lieux de la Terre et de Venus, et on voit d'abord, que tant pour $\phi = 0$ que $\phi =$ VI signes l'une et l'autre équation évanouit. Ensuite on voit que la plus grande équation de nos tables est plus grande que celle de Mr. de la Caille; mais ce n'est pas au défaut de la Théorie qu'il faut attribuer cette différence, qui provient uniquement de l'estime de la masse de Venus, que j'ai supposée égale à la Terre; fondé sur la véritable parallaxe du Soleil de $8\frac{1}{2}''$, pendant que Mr. Clairaut, sur la Théorie[6] du quel les Tables de Mr. de la Caille sont fondées,[7] l'a supposée de $10''$; d'où le volume de Venus se conclut environ deux tiers de la Terre, ce qui est très bien d'accord avec les valeurs de la plus grande équation, qui dans ma table monte à 22,3 et dans la Table de Mr. de la Caille à 15,2 . Nous avons supposé ici l'un et l'autre, que les masses sont en raison des volumes; donc si, comme le grand Newton a soutenu, la densité des Planètes est plus grande dans celles qui sont les plus proches du Soleil, il faudroit encore augmenter la plus grande équation.

2 [E 425].
3 Cf. [E 425], § 41.
4 Cf. [Lacaille 1758], p. 18, Tab. IX; [Lacaille 1763], p. 35, Tab. XI.
5 Voir note 3.
6 Cf. [Clairaut 1759a], p. 556.
7 Cf. [Lacaille 1758], p. 19; [Lacaille 1762], p. 130; [Lacaille 1763], p. 7.

2. En partant de la conjonction, où $\phi = 0$, les équations de notre table augmentent beaucoup plus que dans celle de Mr. DE LA CAILLE, et cette augmentation s'étend aussi beaucoup plus loin, puisque dans notre table elles croissent jusqu'à $\phi = 2^s\,8°$, pendant que dans celle DE LA CAILLE l'équation atteint la plus grande valeur à $\phi = 30°$. Cette différence provient ouvertement de la fausseté de la Théorie, puisque on y suppose l'action de Venus sur la Terre environ 20 fois plus petite, qu'elle n'est effectivement comme nous avons observé ci dessus. Donc puisque cette action est en effet tant de fois plus grande, il s'ensuit nécessairement que son effet doit être beaucoup plus grand et qu'il se doit aussi étendre plus loin.

3. Le contraire arrive après les oppositions, où $\phi > \mathrm{VI}^s$ où la véritable action de Venus est presque quatre fois plus petite que la fausse Théorie la suppose, comme nous avons déjà remarqué ci-dessus. Il faut donc aussi que dans nôtre table les équations croissent plus foiblement que dans la Table de Mr. DE LA CAILLE, et en regardant nôtre table de comparaison, on voit qu'elles diffèrent réellement de la même manière comme nous venons d'observer.

4. Ensuite il se trouve aussi une grande différence entre les endroits répondans aux plus grandes équations, qui sont, après les conjonctions, selon les tables de Mr. DE LA CAILLE, à $\phi = 30°$ et dans ma table à $\phi = 2^s\,8°$ et après l'opposition, selon les premières à $\phi = 7^s\,25°$ et selon la mienne à $\phi = 9^s\,17°$. Or la plus grande différence se trouve dans la marche de ces équations; puisque dans la table construite sur les vrais principes les équations conservent le même signe depuis la conjonction jusqu'à l'opposition, pendant que dans les tables de Mr. DE LA CAILLE elles changent de signe à $\phi = 2^s\,3°$.

5. Remarquons aussi les endroits, où la différence entre les deux Tables devient la plus grande, ce qui arrive à $\phi = 3^s\,12°$ où elle monte à $30{,}8''$. Donc si pour une telle situation on calcule le lieu de la Terre selon les tables DE LA CAILLE, on se trompera de plus de $30''$; et partant on ne doit pas être surpris, quand Mr. DE LA CAILLE avoue lui même, que ses tables peuvent quelques fois différer des observations d'autant de secondes; et peutêtre seront-ce les mêmes cas, où sa table des perturbations de Venus diffère si enormément de la vérité, parce que depuis $\phi = 2^s$ jusqu'à $\phi = 4^s\,22°$ c'est à dire pendant un intervalle de $82°$ la différence entre les deux tables monte au de la de $20''$.

6. Puisque Mr. DE LA CAILLE dit avoir calculé cette table sur les formules de feu Mr. CLAIRAUT,[8] il sera aisé de retrouver ces formules des équations mêmes de la Table, vu qu'il est certain que cette formule doit avoir une telle forme: $\alpha \sin\phi + \beta \sin 2\phi + \gamma \sin 3\phi + \text{etc}$. Car on n'a qu'à tirer de cette formule les équations pour quelques situations principales, que nous ajouterons ici dans cette

8 Voir notes 6 et 7.

table, en marquant les équations, qui en résultent, par les lettres A, B, C, D, etc.

$$\begin{array}{l|l}
3^s & A = \alpha - \gamma \\
2^s & B = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} - \frac{\delta\sqrt{3}}{2} \\
4^s & C = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta\sqrt{3}}{2} \\
1^s\,15^\circ & D = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \\
4^s\,15^\circ & E = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \\
1^s & F = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma + \frac{\delta\sqrt{3}}{2} \\
5^s & G = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma - \frac{\delta\sqrt{3}}{2}
\end{array}$$

De ces équations nous déduisons les combinaisons suivantes:

$$\begin{array}{lll}
B + C = \alpha\sqrt{3} & \text{et} & B - C = \beta\sqrt{3} - \delta\sqrt{3}\,, \\
D + E = \alpha\sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} & \text{et} & D - E = 2\beta\,, \\
F + G = \alpha + 2\gamma & \text{et} & F - G = \beta\sqrt{3} + \delta\sqrt{3}\,.
\end{array}$$

Appliquons maintenant ces formules à la table de Mr. DE LA CAILLE, et nous aurons:

$$A = 9{,}4\,,\ B = -0{,}9\,,\ C = 15{,}1\,,\ D = -4{,}5\,,\ E = 14{,}5\,,\ F = -5{,}6\,,\ G = 11{,}4\,.$$

Delà on tire

$$\begin{array}{rcr}
A = \alpha - \gamma & = & 9{,}4 \\
B + C = \alpha\sqrt{3} & = & 14{,}2 \\
B - C = \beta\sqrt{3} - \delta\sqrt{3} & = & -16{,}0 \\
D + E = \alpha\sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} & = & 10{,}0 \\
D - E = 2\beta & = & -19{,}0 \\
F + G = \alpha + 2\gamma & = & 5{,}8 \\
F - G = \beta\sqrt{3} + \delta\sqrt{3} & = & -17{,}0
\end{array}$$

et de ces équations on tire $\alpha = 8{,}2$, $\beta = -9{,}5$, $\gamma = -1{,}2$, $\delta = -0{,}3$. Voilà donc la formule de Mr. CLAIRAUT, sur laquelle l'Abbé DE LA CAILLE a calculé sa Table, qui donne pour chaque argument ϕ l'équation Venérienne[9]

$$8{,}2\sin\phi - 9{,}5\sin 2\phi - 1{,}2\sin 3\phi - 0{,}3\sin 4\phi\,.$$

7. Quelque fausse que soit cette formule elle a pourtant depuis été adoptée de presque tous les Astronomes, vu qu'on trouve la même table dans tous les recueils de tables astronomiques qui ont été publiés depuis ce temps, et même la

9 Cf. [Lacaille 1762], p. 130.

trouve-t-on, à quelques arrangemens de la forme près, dans les tables lunaires de feu Mr. Mayer, publiées à Londres,[10] qu'on regarde comme les plus exactes. Or après les remarques, que j'ai rapportées ici, on ne sçauroit plus douter, qu'en se servant de ces tables, on ne se trompe très souvent de 20 à 30 secondes, ce qui doit avoir une influence très essentielle dans les tables lunaires, où la détermination du vrai lieu de la Lune suppose toujours celle du Soleil, et partant cette observation doit être de la dernière importance dans le grand Problème de la Longitude.

8. Comme nôtre table n'a été calculée sur aucune formule semblable; mais qu'elle renferme le résultat de toutes les actions élémentaires ajoutées ensemble il n'est gueres probable, qu'on puisse trouver une formule, qui représente exactement toutes les équations de cette table. Cependant il ne sera pas difficile de déterminer les coëfficiens α, β, γ, δ, ensorte que la formule répond au moins à peu près à la vérité.

Faisons un essai la dessus et nous aurons pour les positions principales indiquées ci-dessus les valeurs suivantes: $A = -20{,}6$, $B = -21{,}6$, $C = -13{,}0$, $D = -18{,}9$, $E = -8{,}5$, $F = -13{,}8$, $G = -4{,}4$. De là on tire les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
&1^\circ. & \alpha - \gamma &= -20{,}6\\
&2^\circ. & \alpha\sqrt{3} &= -34{,}6\\
&3^\circ. & (\beta - \delta)\sqrt{3} &= \ -8{,}6\\
&4^\circ. & (\alpha + \gamma)\sqrt{2} &= -27{,}4\\
&5^\circ. & 2\beta &= -10{,}4\\
&6^\circ. & \alpha + 2\gamma &= -18{,}2\\
&7^\circ. & (\beta + \delta)\sqrt{3} &= \ -9{,}4\,;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire les valeurs α, β, γ, δ de cette manière: Cherchons les valeurs des lettres α et γ, et d'abord la seconde équation donne $\alpha = -20{,}0$, ce qui étant substitué dans la première fournit $\gamma = +0{,}6$. Or de la quatrième on tire $\gamma = +0{,}6$, et de la sixième $\gamma = 0{,}9$. Mais puisque ces trois valeurs de γ ne quadrent pas asses bien ensemble, il faut réconnoitre une petite erreur dans l'une et l'autre des deux lettres α et γ, et cette erreur sera partagée également, en prenant $\alpha = -19{,}7$ et $\gamma = +0{,}8$. Pour les deux autres lettres β et δ la 5^e équation donne d'abord $\beta = -5{,}2$ et la 3^e et 7^e, jointes ensemble, donnent $2\beta = -10{,}4$, de sorte que nous pouvons hardiment supposer $\beta = -5{,}2$. Enfin la 7^e moins la 3^e nous fournit $\delta = -0{,}2$.

9. Voilà donc contre toute nôtre attente une formule, qui représente les équations de nôtre table plus exactement qu'on n'auroit osé espérer. Sçavoir pour chaque argument ϕ l'équation de nôtre table se trouve être

$$-19{,}7 \sin\phi - 5{,}2 \sin 2\phi + 0{,}8 \sin 3\phi - 0{,}2 \sin 4\phi\,,$$

10 Cf. [Mayer 1770], Tab. XXII, XXV.

et cette formule ne diffère presque du tout des positions, d'où nous l'avons tirée. Voyons donc comment elle satisfait à d'autres positions, et pour cet effet prenons $\phi = 2^s\,15° = 75°$, d'où en faisant le calcul on tire de la formule l'équation $-22{,}0$, qui ne diffère que de[11] $0{,}2''$ de la table. Prenons aussi $\phi = 3^s\,15° = 105°$ et en faisant le calcul on trouve $-17{,}2$ ce qui ne diffère que de $0{,}1''$ de la table. En examinant les cas $\phi = 15°$ et $\phi = 5^s\,15° = 165°$ on trouve les équations[12] $-7{,}3$ et $-1{,}8$ dont les erreurs ne sont que $0{,}0''$ et $0{,}3''$.

10. Ce merveilleux accord de la formule que nous venons de trouver avec nôtre table ne sçauroit certainement être attribué à un pur hazard, et on pourroit même soupçonner que Mr. LEXELL eut calculé cette table précisement sur cette même formule, si le détail de tout le calcul ne se trouvoit pas exposé dans les Commentaires.[13] Nous devons donc conclure, que cette formule est fondée réellement dans la véritable théorie, ce qui ouvrit une nouvelle carrière pour perfectionner la Théorie, et tout revient maintenant, à sçavoir manier la Théorie ensorte, qu'on en puisse précisement tirer la formule dont nous venons de parler.

11. Puisque les corrections, qu'on a données jusqu'ici pour les inégalités de Saturne, causées par l'action de Jupiter, sont tirées de la même fausse Théorie, on ne doit pas être surpris, qu'elles répondent si mal aux observations, et comme le cas est presque semblable à celui de la Terre et de Venus, on pourra à présent presque déviner la véritable formule, d'où l'on doit tirer les inégalités. Ainsi dans la formule

$$\alpha \sin\phi + \beta \sin 2\phi + \gamma \sin 3\phi + \delta \sin 4\phi$$

le premier coëfficient α, qui selon la méthode commune étoit positif, doit être négatif et même beaucoup plus grand; ensuite le second coëfficient demeure bien négatif, mais il doit être diminué. Pour les deux autres coëfficiens γ et δ ils influeront fort peu sur le lieu de Saturne. Mais il faut ici bien considerer que la force de Jupiter exerce encore un autre effet sur Saturne, qui provient de l'excentricité de leurs orbites, ce qui est une circonstance, à la quelle on n'a pas eu besoin de faire attention dans les orbites de la Terre [et] de Venus, puisque l'excentricité de l'une et de l'autre est si petite, qu'il n'en sçauroit résulter un effet considérable.

11 Édition originale: $5''$.
12 Édition originale: $7{,}3$ et $1{,}7$.
13 [E 425].

Table des Corrections du Lieu de la Terre
tant suivant la Table de Mr. DE LA CAILLE que suivant les vrais principes

Argument. Longitude héliocentrique de ♀ moins Longitude de ♁

	0.		I.		II.		III.		IV.		V.		
	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	
	−	−	−	−	−	−	+	−	+	−	+	−	
0	0,0	0,0	5,6	13,7	0,9	21,4	9,4	20,5	15,1	12,7	11,4	4,4	30
1	0,3	0,5	5,6	14,1	0,6	21,5	9,7	20,3	15,1	12,4	11,1	4,2	29
2	0,5	1,0	5,6	14,5	0,2	21,6	10,0	20,1	15,1	12,1	10,8	4,0	28
3	0,8	1,5	5,6	14,8	+0,1	21,7	10,3	20,0	15,1	11,8	10,5	3,8	27
4	1,1	2,0	5,6	15,2	0,4	21,8	10,6	19,8	15,1	11,5	10,2	3,6	26
5	1,3	2,5	5,6	15,5	0,8	21,8	10,9	19,6	15,1	11,2	9,9	3,4	25
6	1,6	3,0	5,5	15,9	1,1	21,9	11,1	19,4	15,1	10,9	9,6	3,2	24
7	1,9	3,5	5,5	16,2	1,4	22,0	11,4	19,1	15,1	10,6	9,2	3,0	23
8	2,1	4,0	5,4	16,5	1,8	22,0	11,7	18,9	15,1	10,2	8,9	2,8	22
9	2,4	4,4	5,3	16,9	2,1	22,0	11,9	18,7	15,0	9,9	8,5	2,7	21
10	2,6	4,9	5,2	17,2	2,5	22,1	12,2	18,4	14,9	9,6	8,2	2,5	20
11	2,9	5,4	5,1	17,5	2,8	22,1	12,4	18,2	14,9	9,3	7,8	2,3	19
12	3,1	5,9	5,0	17,7	3,2	22,1	12,6	18,0	14,8	9,0	7,4	2,2	18
13	3,3	6,4	4,9	18,0	3,6	22,1	12,9	17,7	14,7	8,7	7,1	2,0	17
14	3,5	6,8	4,7	18,3	3,9	22,0	13,1	17,4	14,6	8,5	6,7	1,9	16
15	3,7	7,3	4,6	18,6	4,3	22,0	13,3	17,2	14,4	8,2	6,3	1,8	15
16	3,9	7,8	4,4	18,8	4,6	22,0	13,3	16,9	14,3	7,9	5,9	1,6	14
17	4,1	8,2	4,2	19,1	5,0	21,9	13,6	16,6	14,2	7,6	5,5	1,5	13
18	4,3	8,7	4,0	19,3	5,4	21,9	13,8	16,3	14,0	7,3	5,1	1,4	12
19	4,5	9,1	3,8	19,5	5,7	21,8	14,0	16,1	13,9	7,0	4,7	1,2	11
20	4,6	9,6	3,6	19,7	6,1	21,7	14,1	15,8	13,7	6,8	4,3	1,1	10
21	4,8	10,0	3,3	20,0	6,4	21,7	14,3	15,5	13,5	6,5	3,8	1,0	9
22	4,9	10,5	3,1	20,2	6,8	21,6	14,4	15,2	13,3	6,3	3,4	0,9	8
23	5,0	10,9	2,9	20,3	7,1	21,5	14,5	14,9	13,1	6,0	3,0	0,8	7
24	5,2	11,3	2,6	20,5	7,4	21,4	14,6	14,6	12,9	5,8	2,6	0,6	6
25	5,3	11,7	2,3	20,7	7,8	21,2	14,7	14,3	12,7	5,5	2,2	0,5	5
26	5,4	12,1	2,1	20,8	8,1	21,1	14,8	14,0	12,4	5,3	1,7	0,4	4
27	5,4	12,6	1,8	21,0	8,4	21,0	14,9	13,7	12,2	5,0	1,3	0,3	3
28	5,5	12,9	1,5	21,1	8,8	20,8	15,0	13,4	11,9	4,8	0,9	0,2	2
29	5,5	13,3	1,2	21,3	9,1	20,7	15,0	13,0	11,7	4,6	0,4	0,1	1
30	5,6	13,7	0,9	21,4	9,4	20,5	15,1	12,7	11,4	4,4	0,0	0,0	0
	+	+	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	
	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	LaCaille	Vraye	
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		

INVESTIGATIO PERTURBATIONUM, QUAE IN MOTU TERRAE AB ACTIONE VENERIS PRODUCUNTUR

Commentatio 512 indicis Enestroemiani
Acta academiae scientiarum Petropolitanae [2:I] (1778:I), 1780, p. 308–316
(Kommentar zu E 512)

1. Existente Sole (Fig. 1) in S sit AT orbita Terrae, BV Veneris, ambae in plano eclipticae sitae. Sumamus autem initio, unde tempora metimur, ambos Planetas fuisse in coniunctione i.e. in A et B, nunc vero elapso tempore t, cui motus Terrae medius respondeat $= \theta$, Terram versari in T, Venerem vero in V, vocemusque angulos $AST = \phi$ et $BSV = \psi$; tum vero sit angulus $TSV = \eta$, ita ut sit $\eta = \psi - \phi$, et iam η designet elongationem Veneris a Terra ex Sole visam. Praeterea vocetur distantia Terrae a Sole $ST = v$; Veneris autem distantia SV ut constans spectetur, sitque $SV = a$. Denique statuatur distantia Veneris a Terra $TV = w$, ita ut $w = \sqrt{vv + aa - 2av\cos\eta}$.

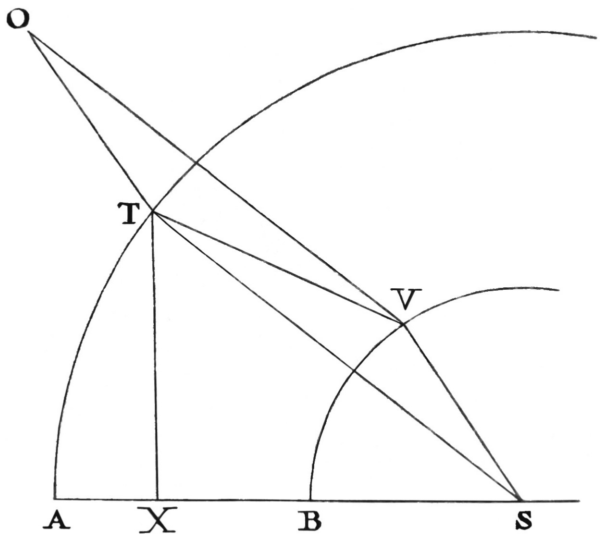


Fig. 1

2. Exprimatur iam massa Solis per unitatem sitque massa Terrae $= m$, quam ex Parallaxi Solis conclusimus $= \frac{3}{1000000}$, eique massam Veneris aequalem supponamus. His positis Terra ad Solem sollicitabitur in directione TS vi $= \dfrac{m+1}{vv}$, et a Venere sollicitabitur in directione TV vi $= \dfrac{m}{ww}$. Denique quia etiam Sol a Venere urgetur vi $= \dfrac{m}{aa}$, haec vis contrario modo secundum directionem VS Terrae est applicanda. Has autem ternas vires ad duas revocare licet complendo parallelogrammum $STOV$; tum enim vis $TV = \dfrac{m}{ww}$ resolvetur in vim

secundum $TS = \frac{mv}{w^3}$ et in vim secundum $TO = \frac{ma}{w^3}$, cuius directio convenit cum directione SV. Hinc ergo omnino Terra sollicitabitur in directione TS

$$\text{vi} = \frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3}\ ,$$

tum vero etiam in directione VS

$$\text{vi} = \frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3}\ .$$

3. Inventis his viribus ex T ad axem SA demittatur perpendiculum TX, et vocentur binae coordinatae $SX = x$ et $XT = y$, secundum quas ambae vires sollicitantes resolvantur, unde orietur vis secundum SX

$$= -\frac{(1+m)\cos\phi}{vv} - \frac{mv\cos\phi}{w^3} - \frac{m\cos\psi}{aa} + \frac{ma\cos\psi}{w^3}$$

et vis secundum XT

$$= -\frac{(1+m)\sin\phi}{vv} - \frac{mv\sin\phi}{w^3} - \frac{m\sin\psi}{aa} + \frac{ma\sin\psi}{w^3}\ ,$$

quibus viribus cum accelerationes debeant esse aequales, quae sunt secundum easdem directiones $\frac{ddx}{d\theta^2}$ et $\frac{ddy}{d\theta^2}$, habebuntur hae duae aequationes:

$$\begin{aligned}
\frac{ddx}{d\theta^2} &= -\frac{(1+m)\cos\phi}{vv} - \frac{mv\cos\phi}{w^3} - \frac{m\cos\psi}{aa} + \frac{ma\cos\psi}{w^3}\\
\frac{ddy}{d\theta^2} &= -\frac{(1+m)\sin\phi}{vv} - \frac{mv\sin\phi}{w^3} - \frac{m\sin\psi}{aa} + \frac{ma\sin\psi}{w^3}\ ,
\end{aligned}$$

ex quibus aequationibus omnia repeti debent, quae ad institutum nostrum desiderantur.

4. Cum iam sit $x = v\cos\phi$ et $y = v\sin\phi$, erit

$$dx = dv\cos\phi - v\,d\phi\sin\phi \quad \text{et} \quad dy = dv\sin\phi + v\,d\phi\cos\phi\ ;$$

porro vero

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad ddx &= ddv\cos\phi - 2\,dv\,d\phi\sin\phi - v\,d\phi^2\cos\phi - v\,dd\phi\sin\phi\\
\text{II.}\quad ddy &= ddv\sin\phi + 2\,dv\,d\phi\cos\phi - v\,d\phi^2\sin\phi + v\,dd\phi\cos\phi\ ,
\end{aligned}$$

ex quibus formulis per combinationem colliguntur sequentes:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & ddy\cos\phi - ddx\sin\phi = 2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi\\
\text{II.}\quad & ddx\cos\phi + ddy\sin\phi = ddv - v\,d\phi^2\ .
\end{aligned}$$

Hic iam loco ddx et ddy valores ex primis aequationibus ex actione virium ortis substituantur, prodibitque

$$\begin{aligned}\frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} &= -\frac{m}{aa}(\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\sin\phi) + \frac{ma}{w^3}(\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\sin\phi)\\ \frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} &= -\frac{1+m}{vv} - \frac{mv}{w^3}\\ &\quad -\frac{m}{aa}(\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi) + \frac{ma}{w^3}(\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi)\end{aligned}$$

sive ob $\psi - \phi = \eta$ erit

$$\begin{aligned}\frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} &= \frac{ma}{w^3}\sin\eta - \frac{m}{aa}\sin\eta\\ \frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} &= -\frac{1+m}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa}\cos\eta + \frac{ma}{w^3}\cos\eta\ .\end{aligned}$$

5. Hic totum negotium pendet ab idonea evolutione membrorum per w^3 divisorum, unde reliquas aequationum partes ad sinistram transponamus, ut aequationes nanciscamur huius formae:

$$\begin{aligned}\frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} + \frac{m}{aa}\sin\eta &= \frac{ma}{w^3}\sin\eta\\ \frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} + \frac{m\cos\eta}{aa} &= \frac{m}{w^3}(a\cos\eta - v)\ .\end{aligned}$$

Vidimus autem initio esse $w = \sqrt{vv + aa - 2av\cos\eta}$, ubi, quia hi termini, utpote littera m affecti, per se sunt quam minimi, etiam distantiam v tanquam constantem spectare licebit, siquidem ab excentricitate orbitae Terrae mentem abstrahamus, quippe quae non solum est satis parva, sed etiam in praesenti negotio nihil in actione Veneris mutare est censenda; quam ob caussam loco v scribamus distantiam mediam Terrae a Sole, quam ponimus $= 1$, sicque erit $w = \sqrt{1 + aa - 2a\cos\eta}$, ideoque

$$w = \sqrt{1+aa}\cdot\sqrt{1 - \frac{2a}{1+aa}\cos\eta}\ ,$$

ubi loco $\frac{2a}{1+aa}$ scribamus litteram n, cuius valor, ob distantiam mediam Veneris a Sole $a = 0{,}72344$, erit $n = 0{,}94979$. Erit autem nunc

$$\frac{m}{w^3} = \frac{m}{(1+aa)^{\frac{3}{2}}}(1 - n\cos\eta)^{-\frac{3}{2}}$$

sive, si brevitatis gratia ponatur $\frac{m}{(1+aa)^{\frac{3}{2}}} = \mu$, erit

$$\frac{m}{w^3} = \mu(1 - n\cos\eta)^{-\frac{3}{2}}\ ,$$

ubi notetur esse[14] $\mu = 0{,}000000532$.

14 Editio princeps: $\mu = 0{,}0000015\phi$.

6. Alio autem loco hanc formulam irrationalem pro hoc ipso casu iam evolvi[15], atque inveni esse

$$(1-n\cos\eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \text{etc.}\ ,$$

et pro his litteris A, B, C etc. sequentes exactissimos methodo prorsus singulari adeptus sum valores:

$$\begin{aligned} A &= 9{,}39852\,, & B &= 16{,}68153\,, & C &= 13{,}87191\,,\\ D &= 11{,}17685\,, & E &= 8{,}80776\,, & F &= 6{,}85206\,,\\ G &= 5{,}26990\,, & H &= 4{,}04433\,, & I &= 3{,}08789\,. \end{aligned}$$

Horum autem valorum numericorum loco in calculo retineamus litteras A, B, C etc.

7. Quoniam igitur in nostra priore aequatione continetur membrum

$$\frac{ma\sin\eta}{w^3} = \mu a\sin\eta(A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \text{etc.})\ ,$$

facta evolutione hoc membrum ita erit expressum:

$$\mu a\begin{pmatrix} \phantom{-\tfrac{1}{2}C\sin\eta}A\sin\eta + \tfrac{1}{2}B\sin 2\eta + \tfrac{1}{2}C\sin 3\eta + \tfrac{1}{2}D\sin 4\eta + \text{etc.}\\ -\tfrac{1}{2}C\sin\eta - \tfrac{1}{2}D\sin 2\eta - \tfrac{1}{2}E\sin 3\eta - \tfrac{1}{2}F\sin 4\eta - \text{etc.} \end{pmatrix}\ .$$

Pro alterius vero aequationis membro dextro erit primo

$$\frac{ma\cos\eta}{w^3} = \mu a\cos\eta(A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \text{etc.})$$

sive facta evolutione

$$\frac{ma\cos\eta}{w^3} = \mu a\begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}B + A\cos\eta \ + \tfrac{1}{2}B\cos 2\eta + \tfrac{1}{2}C\cos 3\eta + \text{etc.}\\ + \tfrac{1}{2}C\cos\eta + \tfrac{1}{2}D\cos 2\eta + \tfrac{1}{2}E\cos 3\eta + \text{etc.} \end{pmatrix}\ .$$

Pro altera vero eiusdem membri parte, quae est $-\frac{mv}{w^3}$, tuto assumere licet $v = 1$, quoniam supponimus, actione Veneris sublata, Terram in circulo esse progressuram; sicque ista pars dabit

$$-\mu(A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \text{etc.})\ .$$

Hanc ob rem, si pro utraque parte iunctim sumta ponamus hanc seriem:

$$\mu(A' + B'\cos\eta + C'\cos 2\eta + D'\cos 3\eta + \text{etc.})\ ,$$

15 Cf. [E 120], §§ 24–30.

erit

$$A' = \frac{1}{2}aB - A\,,$$

$$B' = \frac{1}{2}a(2A + C) - B\,,$$

$$C' = \frac{1}{2}a(B + D) - C\,,$$

$$D' = \frac{1}{2}a(C + E) - D\,,$$

$$E' = \frac{1}{2}a(D + F) - E\,,\ \text{etc.}$$

cui ergo expressioni $\mu(A' + B'\cos\eta + C'\cos 2\eta + \text{etc.})$ aequale esse debet membrum sinistrum

$$\frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} + \frac{m\cos\eta}{aa}\,.$$

8. Incipiamus nunc ab evolutione primae aequationis, et quoniam assumimus Terram sine actione Veneris in circulo motu uniformi esse processuram in distantia media $= 1$, ita ut etiam foret $\phi = \theta$, ideoque $\frac{d\phi}{d\theta} = 1$, nunc accedente actione Veneris hae quantitates quasi infinite parum immutabuntur. Statuamus ergo tum fore

$$v = 1 + \mu p \qquad \text{ac} \qquad \frac{d\phi}{d\theta} = 1 + \mu q\,,$$

unde in compositione membra, quae continerent μ^2, tuto omitti poterunt. Cum igitur sit

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\mu\,dp}{d\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{dd\phi}{d\theta^2} = \frac{\mu\,dq}{d\theta}\,,$$

oritur hinc sequens aequatio:

$$\frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} + \frac{m}{aa}\sin\eta = \frac{2\mu\,dp + \mu\,dq}{d\theta} + \frac{m}{aa}\sin\eta = \frac{ma}{w^3}\sin\eta\,.$$

Pro cuius parte dextra scribamus hanc seriem:

$$\mu(\mathfrak{B}\sin\eta + \mathfrak{C}\sin 2\eta + \mathfrak{D}\sin 3\eta + \mathfrak{E}\sin 4\eta + \text{etc.})\,,$$

ita ut ob resolutionem huius membri iam supra traditam sit

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}a(2A - C)\,,$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}a(B - D)\,,$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}a(C - E)\,,$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}a(D-F)\ ,$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}a(E-G)\ ,\ \text{etc.}$$

atque hinc aequatio resolvenda erit

$$\frac{2\,dp+dq}{d\theta} + \frac{m}{\mu aa}\sin\eta = \mathfrak{B}\sin\eta + \mathfrak{C}\sin 2\eta + \mathfrak{D}\sin 3\eta + \text{etc.}\ ,$$

ubi notetur esse $\frac{m}{\mu aa} = \frac{(1+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$, quem numerum brevitatis gratia per litteram k designemus, ita ut sit[16] $k = 3{,}592536$, et nostra aequatio nunc erit

$$\frac{2\,dp+dq}{d\theta} + k\sin\eta = \mathfrak{B}\sin\eta + \mathfrak{C}\sin 2\eta + \mathfrak{D}\sin 3\eta + \text{etc.}\ ,$$

quam igitur integrari oportet.

9. Quoniam hic duo anguli η et θ insunt, nosse oportet relationem $d\eta$ et $d\theta$. Erat autem $\eta = \psi - \phi$, unde fit

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d\phi}{d\theta}\ .$$

Hoc autem loco utrumque motum Terrae ac Veneris ut uniformem spectare licet, ita ut sit $\frac{d\phi}{d\theta} = 1$. Pro Venere autem eius motus diurnus in tabulis exhibetur $= 1^\circ\, 36'\, 9'' = 5769''$, dum pro Terra est $59'\, 8'' = 3548''$. Quocirca habemus

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{5769}{3548}\ , \qquad \text{unde fit} \qquad \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{2221}{3548}\ .$$

Ponamus autem $d\theta = i\,d\eta$, eritque

$$i = \frac{3548}{2221} = 1{,}597479\ .$$

Nunc igitur manifestum est aequationem nostram, per $d\theta = i\,d\eta$ multiplicatam, evadere integrabilem; reperietur enim

$$2p + q - ik\cos\eta = \Delta - i\,\mathfrak{B}\cos\eta - \frac{1}{2}\,i\,\mathfrak{C}\cos 2\eta - \frac{1}{3}\,i\,\mathfrak{D}\cos 3\eta - \text{etc.}\ ,$$

ex qua propterea fit

$$q = \Delta - 2p + i(k-\mathfrak{B})\cos\eta - \frac{1}{2}\,i\mathfrak{C}\cos 2\eta - \frac{1}{3}\,i\mathfrak{D}\cos 3\eta - \text{etc.}$$

16 Editio princeps: $k = 3{,}592551$.

10. Aggrediamur iam posteriorem aequationem, pro qua notetur fore

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{\mu\, ddp}{d\theta^2}\,,$$

tum vero

$$\frac{v\,d\phi^2}{d\theta^2} = 1 + \mu(2q + p) \qquad \text{et} \qquad \frac{1+m}{vv} = \frac{1+m}{1+2\mu p}$$

sive supra et infra per $1 - 2\mu p$ multiplicando erit

$$\frac{1+m}{vv} = 1 + m - 2\mu p\,,$$

quibus valoribus substitutis aequationis nostrae membrum sinistrum erit

$$\frac{\mu\, ddp}{d\theta^2} - \mu(3p + 2q) + m + \frac{m \cos\eta}{aa}\,.$$

Quodsi iam per μ dividamus et loco[17] $\frac{m}{\mu aa} = 3{,}592536$ scribamus k, loco[18] $\frac{m}{\mu} = 1{,}880209$ vero scribamus l, posterior aequatio hanc induet formam:

$$\frac{ddp}{d\theta^2} - 3p - 2q + l + k\cos\eta = A' + B'\cos\eta + C'\cos 2\eta + D'\cos 3\eta + \text{etc.}\,,$$

in qua, si loco q valor ante inventus substituatur, fiet[19]

$$\begin{aligned}\frac{ddp}{d\theta^2} &- 3p + l + k\cos\eta \\ &= A' + B'\cos\eta + C'\cos 2\eta + D'\cos 3\eta + \text{etc.} \\ &\qquad - 4p + 2\Delta + 2i\,(k - \mathfrak{B})\cos\eta - \frac{2}{2}\,i\,\mathfrak{C}\cos 2\eta - \frac{2}{3}\,i\,\mathfrak{D}\cos 3\eta - \text{etc.}\end{aligned}$$

sive[20]

$$\begin{aligned}\frac{ddp}{d\theta^2} + p = 2\Delta - l + A' + (2i\,(k - \mathfrak{B}) - k + B')\cos\eta + \left(C' - \frac{2}{2}\,i\,\mathfrak{C}\right)\cos 2\eta \\ + \left(D' - \frac{2}{3}\,i\,\mathfrak{D}\right)\cos 2\eta + \left(E' - \frac{2}{4}\,i\,\mathfrak{E}\right)\cos 3\eta + \text{etc.}\,,\end{aligned}$$

cuius loco brevitatis gratia scribamus

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'\cos\eta + \mathfrak{C}'\cos 2\eta + \mathfrak{D}'\cos 3\eta + \text{etc.}\,,$$

17 Editio princeps: $\frac{m}{\mu aa} = 3{,}592551$.
18 Editio princeps: $\frac{m}{\mu} = 1{,}880217$.
19 Editio princeps: $+4p - 2\Delta$ loco $-4p + 2\Delta$; $\frac{1}{2}\,i\,\mathfrak{C}\cos 2\eta$ loco $\frac{2}{2}\,i\,\mathfrak{C}\cos 2\eta$.
20 Editio princeps: $\frac{1}{2}\,i\,\mathfrak{C}$ loco $\frac{2}{2}\,i\,\mathfrak{C}$.

ita ut sit

$$\mathfrak{A}' = 2\Delta - l + A', \quad \mathfrak{B}' = 2i(k - \mathfrak{B}) - k + B', \quad \mathfrak{C}' = C' - i\,\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{D}' = D' - \tfrac{2}{3}i\,\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{E}' = E' - \tfrac{2}{4}i\,\mathfrak{E}, \text{ etc.}$$

11. Manifestum autem est huic aequationi satisfieri statuendo

$$p = \alpha + \beta\cos\eta + \gamma\cos 2\eta + \delta\cos 3\eta + \text{etc.},$$

unde ob $\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{i}$ membrum sinistrum resolvitur in has duas series:

$$\begin{aligned} \frac{ddp}{d\theta^2} &= \quad -\frac{\beta}{ii}\cos\eta - \frac{4\gamma}{ii}\cos 2\eta - \frac{9\delta}{ii}\cos 3\eta - \frac{16\varepsilon}{ii}\cos 4\eta - \text{etc.} \\ p &= \alpha \; + \beta\cos\eta \; + \gamma\cos 2\eta \; + \delta\cos 3\eta \; + \varepsilon\cos 4\eta + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ita ut, singulis ambarum partium membris seorsim aequatis, se prodeant sponte sequentes determinationes:

$$\alpha = \mathfrak{A}', \quad \beta\left(1 - \frac{1}{ii}\right) = \mathfrak{B}', \quad \gamma\left(1 - \frac{4}{ii}\right) = \mathfrak{C}', \quad \delta\left(1 - \frac{9}{ii}\right) = \mathfrak{D}', \quad \text{etc.}$$

ideoque

$$\alpha = \mathfrak{A}', \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1 - \frac{1}{ii}}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{C}'}{1 - \frac{4}{ii}}, \quad \delta = \frac{\mathfrak{D}'}{1 - \frac{9}{ii}}, \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{E}'}{1 - \frac{16}{ii}}.$$

12. Cum igitur ex valoribus litterarum A, B, C, D, etc. supra § 6 inventis facile colligi queant valores derivati A', B', C', D' etc., tum vero $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ac denique $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ etc., ex iis iam deduci possunt α, β, γ, δ etc., unde porro innotescunt valores p et q, quarum prior praebet exiguam illam mutationem, quam actio Veneris in distantia Terrae et Sole producit, cum sit $v = 1 + \mu p$. Denique ex valore p derivatur valor ipsius q, quem brevitatis gratia statuamus:

$$q = \alpha' + \beta'\cos\eta + \gamma'\cos 2\eta + \delta'\cos 3\eta + \text{etc.},$$

ita ut sit

$$\alpha' = \Delta - 2\alpha, \quad \beta' = i(k - \mathfrak{B}) - 2\beta,$$
$$\gamma' = -2\gamma - \frac{1}{2}i\,\mathfrak{C}, \quad \delta' = -2\delta - \frac{1}{3}i\,\mathfrak{D}, \quad \varepsilon' = -2\varepsilon - \frac{1}{4}i\,\mathfrak{E}, \text{ etc.}$$

Invento autem valore q inde colligitur series

$$\frac{d\phi}{d\theta} = 1 + \mu\alpha' + \mu\beta'\cos\eta + \mu\gamma'\cos 2\eta + \text{etc.},$$

ex qua pro quovis tempore vera Solis longitudo concluditur fore

$$\phi = (1 + \mu\alpha')\theta + \mu i\beta' \sin\eta + \frac{1}{2}\,\mu i\gamma' \sin 2\eta + \frac{1}{3}\,\mu i\delta' \sin 3\eta + \text{etc.}\,,$$

ubi pars prima $(1 + \mu\alpha')\theta$ exhibet longitudinem mediam Terrae, quam quia supponimus esse exacte $= \theta$, sequitur esse debere $\alpha' = 0$. Reliquae autem partes continent inaequalitates motus periodici, quae ergo pendent a sinibus angulorum η, 2η, 3η, 4η etc. Hoc modo sequens tabula perturbationum est facta.

Tabula Perturbationum in distantia et motu Terrae,
ab actione Veneris, in eam agente, ortarum

Argumentum. Elongatio Veneris a Terra

Signa	0.		I.		II.		III.		IV.		V.		Signa
	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	
Grad.	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	+	Grad.
0	0,0	20	4,0	5	0,3	14	6,9	16	11,1	1	8,4	18	30
1	0,2	20	4,0	4	0,1	14	7,1	16	11,1	0	8,1	19	29
2	0,4	20	4,0	4	+0,1	14	7,4	15	11,2	0	7,9	19	28
3	0,6	20	4,0	3	0,3	15	7,6	15	11,2	+1	7,7	20	27
4	0,8	20	3,9	2	0,5	15	7,8	15	11,2	2	7,5	20	26
5	1,1	20	3,9	1	0,8	15	8,0	14	11,2	2	7,2	21	25
6	1,3	20	3,8	1	1,0	16	8,2	14	11,2	3	7,0	21	24
7	1,5	19	3,8	0	1,3	16	8,4	14	11,1	4	6,7	22	23
8	1,7	19	3,7	−1	1,5	16	8,6	13	11,1	4	6,5	22	22
9	1,8	19	3,6	2	1,7	16	8,8	13	11,1	5	6,2	23	21
10	2,0	18	3,6	2	2,0	17	9,0	12	11,0	6	6,0	23	20
11	2,2	18	3,5	3	2,2	17	9,1	12	11,0	6	5,7	23	19
12	2,4	17	3,4	4	2,5	17	9,3	11	10,9	7	5,4	24	18
13	2,5	17	3,2	4	2,7	17	9,5	11	10,8	8	5,1	24	17
14	2,7	16	3,1	5	3,0	17	9,6	10	10,8	8	4,9	24	16
15	2,9	16	3,0	6	3,2	17	9,8	10	10,7	9	4,6	25	15
16	3,0	15	2,9	6	3,5	17	9,9	9	10,6	10	4,3	25	14
17	3,1	15	2,7	7	3,7	17	10,0	9	10,5	10	4,0	25	13
18	3,3	14	2,6	8	4,0	17	10,2	8	10,3	11	3,7	26	12
19	3,4	13	2,4	8	4,2	17	10,3	8	10,2	12	3,4	26	11
20	3,5	13	2,3	9	4,5	17	10,4	7	10,1	12	3,1	26	10
21	3,6	12	2,1	9	4,7	17	10,5	7	10,0	13	2,8	26	9
22	3,7	11	1,9	10	5,0	17	10,6	6	9,8	14	2,5	26	8
23	3,7	11	1,7	10	5,2	17	10,7	5	9,7	14	2,2	27	7
24	3,8	10	1,6	11	5,5	17	10,8	5	9,5	15	1,9	27	6
25	3,9	9	1,4	11	5,7	17	10,9	4	9,3	16	1,6	27	5
26	3,9	8	1,2	12	6,0	17	10,9	4	9,1	16	1,3	27	4
27	4,0	8	1,0	12	6,2	17	11,0	3	9,0	17	0,9	27	3
28	4,0	7	0,8	13	6,5	16	11,0	2	8,8	17	0,6	27	2
29	4,0	6	0,6	13	6,7	16	11,1	2	8,6	18	0,3	27	1
30	4,0	5	0,3	14	6,9	16	11,1	1	8,4	18	0,0	27	0
Grad.	+	−	+	+	−	+	−	+	−	−	−	−	Grad.
	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	
Signa	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		Signa

DE VARIIS MOTUUM GENERIBUS, QUI IN SATELLITIBUS PLANETARUM LOCUM HABERE POSSUNT

Commentatio 548 indicis Enestroemiani
Acta academiae scientiarum Petropolitanae [4:I] (1780:I), 1783, p. 255–279
(Kommentar zu E 548)

1. Quamquam nunc quidem tabulae lunares[1] non ultra unum minutum primum a veritate aberrare perhibentur, tamen, quantum adhuc in ipsa theoria sit desiderandum, exinde intelligi potest, quod, si orbitae lunaris excentricitas multo maior existeret, vel etiam sub maiore angulo ad eclipticam inclinaretur, cognitio motus Lunae etiamnunc fere penitus lateret, ita ut in computo eclipsium fortasse adhuc pluribus horis essemus aberraturi. Cum enim in praesenti statu determinatio loci Lunae circiter 30 correctiones exigat, pro maiori excentricitate et inclinatione forsitan centum correctiones vel adeo ne mille quidem sufficerent. Ob tantum autem correctionum numerum, etiamsi singulae essent exactae, enormes errores plane evitari non possent.

2. Multo maior vero incertitudo esset metuenda, si Luna ad multo maiorem distantiam a Terra fuisset remota, quippe quo casu omnes correctiones nunc quidem adhiberi solitae nullum amplius locum invenire possent, propterea quod hoc casu mox incertum esset futurum, utrum talem Lunam ad ordinem satellitum potius referri conveniat, quam ad planetas primarios, sicque hoc casu omnia subsidia, quibus Astronomi hactenus usi sunt, omni usu essent caritura, et nos adhuc in crassissima ignoratione talis motus versaremur. Ex quo abunde intelligere licet nostram theoriam motuum coelestium adhuc maximo defectu laborare et, nisi insignia incrementa in Analysi detegantur, meliorem successum nullo modo sperari posse.

3. His igitur summis difficultatibus perpensis nulla alia via patere videtur hanc scientiam ad maiorem perfectionis gradum evehendi, nisi ut plures huiusmodi motus omni studio perpendantur, atque tales casus fingantur, qui continuo propius ad eiusmodi motus nobis adhuc penitus absconditos accedant. Hunc in finem utique a casibus simplicioribus inchoari conveniet, dum scilicet omnes circumstantiae, quibus difficultates multiplicantur, quantum fieri potest, removeantur. Quemadmodum enim in Geometria, ante quam problemata difficillima solvenda suscipiuntur, plura alia simpliciora praemitti solent, quae continuo propius ad illa perducant, ita etiam in Astronomia simili methodo versari conveniet.

4. Ut igitur in omnes motus, qui in Lunam cadere possunt, feliciori successu inquiramus, primo Lunam in ipso plano eclipticae circumferri assumemus, deinde

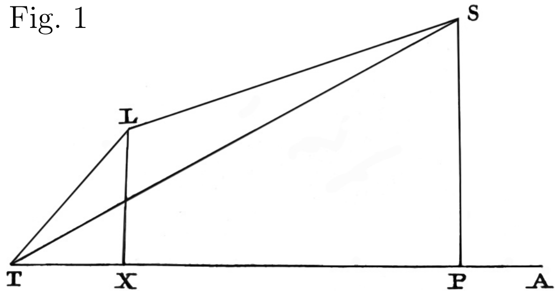
1 Cf. [E 418], Cap. II; [E 418A].

quoque ipsam Terram motu uniformi circa Solem in circulo revolvi statuemus. Praeterea vero, ne actio Lunae Terram afficere queat, massam Lunae tanquam minimam spectabimus, unde haec quaestio nobis evolvenda proponatur:

PROBLEMA

Si, dum Terra motu aequabili in circulo circa Solem promovetur, corpori cuipiam, quasi Lunae, extra Terram in ipso plano eclipticae posito, motus quicunque imprimatur, investigare motum, quo hoc corpus, ex centro Terrae spectatum, progredi videbitur.

Fig. 1



5. Quoniam motus (Fig. 1), qualis ex centro Terrae spectabitur, desideratur, ipsam Terram tanquam quiescentem et fixam in T spectabimus, unde in ipso plano eclipticae rectam pariter fixam TA ducamus, a qua ad quodvis tempus elongationem nostri corporis, seu Lunae, assignari oporteat. Elapso igitur quocunque tempore reperiatur Sol in S, Luna vero in L, et quia nunc Sol circa Terram uniformiter in circulo promoveri videbitur, eius distantiam a Terra TS unitate designabimus. Praeterea vero, quia motus Solis est uniformis, ipse angulus ATS, quem vocemus $= \theta$, commodissimam mensuram temporis nobis suppeditabit. Pro Luna autem ponamus eius distantiam a Terra $TL = v$, eiusque longitudinem, a directione TA computatam, seu angulum $ATL = \phi$. Tum vero statuamus brevitatis gratia angulum $STL = \phi - \theta = \eta$, eritque recta $SL = \surd(1 - 2v\cos\eta + vv)$, quam brevitatis gratia designemus per u. Praeterea ex punctis L et S ad rectam TA demittantur perpendicula LX et SP, et pro puncto L vocatis coordinatis $TX = x$ et $XL = y$ erit $x = v\cos\phi$ et $y = v\sin\phi$, pro Sole autem erit $TP = \cos\theta$ et $SP = \sin\theta$.

6. Nunc ut principia motus huc applicemus, primo ipse angulus $ATS = \theta$ nobis exprimat mensuram temporis, ita ut elementum temporis sit $d\theta$; deinde ipsam Solis massam pariter unitate designemus, cuius respectu sit massa Terrae $= m$, cuius valor ex vera parallaxi Solis deducitur $m = \frac{3}{1000000}$, Lunae autem massam, ut iam notavimus, nullam statuamus. His positis Luna primo sollicitabitur ad Terram vi $= \dfrac{m}{vv}$, in directione LT; secundo autem ad Solem trahitur vi $= \dfrac{1}{uu}$, in directione LS. Tertio vero, quia Terram in quiete spectamus, vires,

quibus Terra sollicitatur, contrarie Lunae applicari oportet, unde cum Sol Terram attrahat vi $= 1$, in directione TS, eadem vis $= 1$ Lunae applicata est intelligenda secundum directionem ST.

7. Nunc singulas has vires secundum binas directiones coordinatarum x et y resolvi oportet, unde prima vis $= \frac{m}{vv}$ secundum LT per resolutionem dabit

$$\begin{aligned} &\text{pro directione} \quad XT \quad \text{vim} = \frac{mx}{v^3} = \frac{m\cos\phi}{vv} \quad \text{et} \\ &\text{pro directione} \quad LX \quad \text{vim} = \frac{my}{v^3} = \frac{m\sin\phi}{vv}\,. \end{aligned}$$

Secunda vis secundum LS, quae est $\frac{1}{uu}$, dabit

$$\begin{aligned} &\text{pro directione} \quad TX \quad \text{vim} = \frac{\cos\theta - x}{u^3} = \frac{\cos\theta - v\cos\phi}{u^3} \quad \text{et} \\ &\text{pro directione} \quad XL \quad \text{vim} = \frac{\sin\theta - y}{u^3} = \frac{\sin\theta - v\sin\phi}{u^3}\,. \end{aligned}$$

Denique tertia vis $= 1$, in directione ST agens, praebet

$$\begin{aligned} &\text{pro directione} \quad XT \quad \text{vim} = \cos\theta \quad \text{et} \\ &\text{pro directione} \quad LX \quad \text{vim} = \sin\theta\,; \end{aligned}$$

unde colligendo tota vis in directione XT urgens erit[2]

$$\frac{m\cos\phi}{vv} - \frac{\cos\theta + v\cos\phi}{u^3} + \cos\theta\,,$$

tota autem vis in directione LX urgens erit

$$\frac{m\sin\phi}{vv} - \frac{\sin\theta + v\sin\phi}{u^3} + \sin\theta\,.$$

8. Iam per principia motus his viribus proportionales esse debent accelerationes corporis L secundum easdem directiones, quae cum sint $\frac{ddx}{d\theta^2}$ et $\frac{ddy}{d\theta^2}$, sumto temporis elemento $d\theta$ constante, constituta massarum et temporis ratione ut fecimus, istae accelerationes per $1+m$ multiplicari debent, ut viribus illis evadant aequales, quae cum coordinatas x et y diminuere tendant, binae aequationes motum corporis L determinantes erunt

$$\begin{aligned} &1^{\circ}. \quad (1+m)\frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{m\cos\phi}{vv} + \frac{\cos\theta - v\cos\phi}{u^3} - \cos\theta \quad \text{et} \\ &2^{\circ}. \quad (1+m)\frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{m\sin\phi}{vv} + \frac{\sin\theta - v\sin\phi}{u^3} - \sin\theta\,. \end{aligned}$$

2 Editio princeps: v^3 loco u^3

Ubi loco $1+m$ tuto scribere licet 1, non solum quia massa m tam est parva, scilicet $\frac{3}{1000000}$, sed etiam quia nobis massas corporum coelestium tam accurate nosse non conceditur.

9. Quo has aequationes propius ad usum nostrum accommodemus, notasse iuvabit esse

$$x\cos\phi + y\sin\phi = v \quad \text{et} \quad y\cos\phi - x\sin\phi = 0\,.$$

Hinc differentiando habebimus

$$dx\cos\phi + dy\sin\phi = dv \quad \text{et} \quad dy\cos\phi - dx\sin\phi = v\,d\phi\,;$$

porro igitur differentiando reperietur

$$\begin{aligned} ddx\cos\phi + ddy\sin\phi &= ddv - v\,d\phi^2 \quad \text{et} \\ ddy\cos\phi - ddx\sin\phi &= 2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi\,. \end{aligned}$$

Quodsi nunc loco ddx et ddy valores supra dati substituantur, prodibunt sequentes novae aequationes:

$$\begin{aligned} &1^{\text{o}}. \quad \frac{(1+m)(ddv - v\,d\phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{\cos\eta}{u^3} - \frac{v}{u^3} - \cos\eta\,, \\ &2^{\text{o}}. \quad \frac{(1+m)(2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi)}{d\theta^2} = -\frac{\sin\eta}{u^3} + \sin\eta\,. \end{aligned}$$

Hoc scilicet modo non solum coordinatas x et y, sed etiam angulorum ϕ et θ tam sinus quam cosinus ex calculo expulimus; interim tamen hi ambo anguli in angulo η continentur, siquidem est $\eta = \phi - \theta$.

10. Quoniam in his duabus formulis innumerae diversae motuum species continentur, videamus ante omnia, utrum inter eas eiusmodi detur species, qua Luna circa Terram uniformiter in circulo revolvi queat, nec ne? Hunc in finem ponamus distantiam Lunae a Terra, quae debet esse constans[3], $v = a$, et cum eius celeritas angularis sit $= \frac{d\phi}{d\theta}$, faciamus $\frac{d\phi}{d\theta} = n$, ita ut sit $d\phi = n\,d\theta$ et $dd\phi = 0$. His autem valoribus introductis ambae nostrae aequationes evadent:

$$\begin{aligned} &1^{\text{o}}. \quad -ann(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{\cos\eta}{u^3} - \frac{a}{u^3} - \cos\eta \quad \text{et} \\ &2^{\text{o}}. \quad 0 = -\frac{\sin\eta}{u^3} + \sin\eta\,, \end{aligned}$$

ubi erit

$$u = \sqrt{(1 - 2a\cos\eta + aa)}\,.$$

11. Ex secunda aequatione statim patet eam subsistere non posse, nisi sit vel $\sin\eta = 0$ vel $u = 1$. At vero posterius fieri nequit, nisi angulus η sit constans,

3 Editio princeps: $v = x$ loco $v = a$.

propterea quod esse deberet $\cos\eta = \frac{1}{2}a$. Quia vero est $d\phi = n\,d\theta$, ideoque $\phi = n\theta$, erit $\eta = (n-1)\theta$, qui angulus constans esse nequit, nisi $n = 1$. Hic autem casus iam in priore continetur, quo esse debet $\sin\eta = 0$, id quod duplici modo fieri potest, vel sumendo $\eta = 0$ vel $\eta = 180^\circ$. Quare cum sit $\eta = (n-1)\theta$, priore casu debet esse $n = 1$. Pro altero vero casu, quo $\eta = 180^\circ$, ex valore differentiali $d\phi = n\,d\theta$ fit

$$\phi = n\theta + \alpha\ , \quad \text{ideoque} \quad \eta = (n-1)\theta + \alpha = 180^\circ\ ,$$

quod fieri nequit, nisi sit $n = 1$ et $\alpha = 180^\circ$, sicque duos habebimus casus evolvendos, alterum quo $\eta = 0$, alterum vero quo $\eta = 180^\circ$. Utrumque ergo seorsim evolvamus.

12. Sit igitur primo $\eta = 0$, ideoque $\sin\eta = 0$ et $\cos\eta = 1$, unde fiet $u = 1 - a$. Quare cum posteriori aequationi iam est satisfactum sumendo $n = 1$, prior aequatio hanc praebet conditionem:

$$-a(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{(1-a)^2} - 1\ ,$$

quae unicam tantum continet incognitam a, cuius ergo valorem hinc determinari oportet. Reducitur autem ista aequatio ad hanc formam:

$$0 = a^3(1-a)^2(1+m) - m(1-a)^2 + a^3(2-a)\ ,$$

quae aequatio ad quinque dimensiones exsurgit. Quia autem m est fractio quam minima, haec aequatio subsistere nequit, nisi ipsa quantitas a sit quam minima; tum autem loco $(1-a)^2$ scribere licebit 1, quo facto habebimus

$$a^3(1+m) - m + 2a^3 = 0\ ,$$

unde colligitur

$$a^3 = \frac{m}{3+m}\ ,$$

ideoque

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{3+m}} = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}\ .$$

13. Sin autem sit $\eta = 180^\circ$ et $\cos\eta = -1$, ob $n = 1$ et $u = 1 + a$ prior aequatio dabit[4]

$$0 = a(1+m) - \frac{m}{aa} - \frac{1}{(1-a)^2} + 1\ ;$$

ubi etiam facile patet a esse debere minimum, atque adeo, facta evolutione et neglectis terminis minimis, prorsus ut ante prodibit $a^3 = \frac{m}{3+m}$. Hi autem valores proxime tantum sunt veri, et aliquod discrimen prodiret, si approximationem ulterius prosequi vellemus, quod autem operae pretium non videtur, cum sufficiat istum valorem ipsius a proxime nosse.

4 Editio princeps: $(1+a^2)$ loco $(1-a^2)$

Evolutio casus, quo Luna motu uniformi in circulo circa Terram revolvi possit

14. Iam ostendimus hoc fieri non posse, nisi angulus $STL = \eta = \phi - \theta$ fuerit vel nullus vel 180 graduum. Priore igitur casu Luna perpetuo Soli maneret coniuncta, seu in perpetua coniunctione cum Sole cerneretur; posteriori vero casu perpetuo in oppositione Solis versaretur, ideoque pleno lumine luceret. Utroque ergo casu talis Luna revolutiones suas singulis annis absolveret, et tempus menstruum exacte cum duratione anni conveniret.

15. Deinde etiam vidimus distantiam talis Lunae a Terra esse $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$. Cum igitur sit $m = \frac{3}{1000000}$, erit $a = \frac{1}{100}$, sive haec distantia aequabitur centesimae parti distantiae Solis a Terra. Quare cum distantia media verae Lunae a Terra sit quasi $\frac{1}{400}$ distantiae Solis, talis Luna quadruplo longius a Terra distaret quam vera Luna, ideoque in semidiametris Terrae eius distantia foret circiter 240 semidiametrorum terrestrium. Unde patet, quantopere tempus periodicum talis Lunae a regula KEPLERI esset discrepaturum, quoniam secundum hanc regulam tempus periodicum talis Lunae se habere deberet ad tempus menstruum ut $8:1$, vel talis Luna octo mensibus suos circuitus absolvere deberet, cum tamen integrum annum postulet, ratio autem manifesto sita est in eo, quod vis centripeta Terrae in maioribus distantiis continuo magis a vi Solis diminuitur.

16. Quoniam porro talis Luna etiam a Sole perpetuo eandem distantiam servaret, dum scilicet priori casu, quo $\eta = 0$, eius distantia a Sole perpetuo foret $= 1 - a$, posteriori vero casu, quo $\eta = 180°$, ea foret $= 1 + a$, talis Luna ex Sole spectata etiam circulum describere cerneretur, idque motu uniformi, quandoquidem perpetuo Terrae coniuncta maneret, eodemque tempore suas revolutiones perageret; perpetuo enim vel in coniunctione inferiore, vel in superiore versaretur.

17. Maxime notatu dignus est iste casus, quo existere posset corpus coeleste, quod tam circa Terram quam circa Solem circulum describere cerneretur, quatenus enim circa Terram in circulo revolvitur, eatenus rite tanquam satelles Terrae spectari potest, quatenus autem circa Solem in circulo revolvitur, eatenus pro planeta primario haberi potest. Quare cum distantia a Terra sit $a = \frac{1}{100}$, ad hanc usque distantiam sphaera lunaris extendenda merito videtur, ita ut omnia corpora, quae intra hoc spatium circa Terram volvuntur, ad classem satellitum merito referri queant; quae autem extra hoc spatium cursum suum absolvunt, ea ad classem planetarum principalium numerari debeant.

18. Quemadmodum autem Terrae suam sphaeram lunarem assignavimus, ita etiam reliquis planetis suae sphaerae satellitiae constitui poterunt. Formulae enim supra datae ad planetam Iovem transferentur, si distantia media Iovis a Sole unitate designetur, littera vero m massam Iovis denotet, quae cum sit circiter $\frac{1}{1125}$, radius sphaerae satellitiae Iovis reperietur $a = \sqrt[3]{\frac{1}{3 \cdot 1125}} = \frac{1}{15}$. Ex quo sequitur,

quaecunque corpora circa Iovem intra hanc distantiam revolvuntur, ea inter eius satellites esse numeranda, dum contra omnia, quae extra motus suos peragunt, in ordinem planetarum principalium redigi debeant. Simili modo sphaera satellitia Saturni ad distantiam $\frac{1}{21}$ suae distantiae a Sole extendenda reperietur.

Propior applicatio superiorum formularum ad motus lunares

19. Quoniam igitur ad genus lunare alia corpora referri non convenit, nisi quorum distantia a Terra non excedit partem centesimam distantiae Solis a Terra, in formulis nostris distantia $TL = v$ semper minor spectari poterit quam $\frac{1}{100}$, unde cum ista distantia sit valde exigua, valorem litterae $u = \sqrt{(1-2v\cos\eta+vv)}$ satis commode vero proxime exprimere licebit; erit enim

$$\frac{1}{u^3} = (1-2v\cos\eta+vv)^{-\frac{3}{2}}\ ;$$

unde si altiores ipsius v potestates negligere velimus, erit

$$\frac{1}{u^3} = 1+3v\cos\eta\ ;$$

sin autem etiam potestatem secundam vv admittere vellemus, foret

$$\frac{1}{u^3} = 1+3v\cos\eta-\frac{3}{2}vv+\frac{15}{2}vv\cos\eta^2\ .$$

Verum quia v semper minus est quam $\frac{1}{100}$, hos postremos terminos facile negligere licebit, ita ut sufficiat sumsisse

$$\frac{1}{u^3} = 1+3v\cos\eta\ .$$

20. Hoc autem valore introducto binae aequationes motum determinantes supra § 9 inventae erunt:

$$1^{\text{o}}.\qquad \frac{ddv-v\,d\phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv}-v(1-3\cos\eta^2)$$

$$2^{\text{o}}.\qquad \frac{2\,dv\,d\phi+v\,dd\phi}{d\theta^2} = -3v\cos\eta\sin\eta\ .$$

Cum igitur sit

$$\cos\eta^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\eta \quad \text{et} \quad \cos\eta\sin\eta = \frac{1}{2}\sin 2\eta\ ,$$

hae aequationes induent sequentes formas:

$$1^{\text{o}}.\qquad \frac{ddv-v\,d\phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv}+\frac{1}{2}v(1+3\cos 2\eta)$$

$$2^{\text{o}}.\qquad \frac{2\,dv\,d\phi+v\,dd\phi}{d\theta^2} = -\frac{3}{2}v\sin 2\eta\ .$$

Hinc iam multo facilius casus derivari potest, quo corpus circulum motu uniformi describit. Posito enim $v = a$ et $d\phi = n\,d\theta$, hae aequationes dabunt:

$$1^\circ. \quad -ann = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{2}a(1 + 3\cos 2\eta)$$

$$2^\circ. \quad 0 = -\frac{3}{2}a\sin 2\eta\ ,$$

ubi ut ante esse debet vel $\eta = 0$ vel $\eta = 180^\circ$, tum vero $n = 1$. Pro priore casu autem utrinque erit $\cos 2\eta = 1$, unde ista aequatio fiet $3a^3 = m$, ideoque $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$, ut ante.

21. Caeterum hinc videri posset etiam sumi posse $\eta = 90^\circ$. Quoniam enim hoc modo posteriori aequationi satisfit, tum autem ob $d\phi = n\,d\theta$ est angulus $\phi = n\theta + \alpha$, ideoque $\eta = (n-1)\theta + \alpha = 90^\circ$, foret utique $\alpha = 90^\circ$ et $n = 1$. At vero pro priore aequatione habebitur $\cos 2\eta = -1$, unde prodiret $0 = -\frac{m}{aa}$, qui ergo casus manifesto locum habere nequit. Quemadmodum autem hinc casum elicuimus, quo motus corporis fit circularis, etiam operae pretium erit in eos casus inquirere, ubi motus tantum quam minime, seu infinite parum a circulari discrepat.

Investigatio casuum, quibus motus Lunae infinite parum a circulari esset discrepaturus

22. Quia motus proxime in circulo absolvi debet, distantia v semper quam minime a constante discrepare debet. Ponatur igitur $v = a(1 + \alpha\cos 2\eta)$, ubi α fractionem prae unitate quam minimam denotet, ita ut eius potestates tuto negligi queant. Ex ipsa enim aequationum forma facile intelligitur partem istam minimam involvere debere cosinum anguli 2η. Deinde quia etiam motus proxime debet esse uniformis, statuatur simili modo

$$\frac{d\phi}{d\theta} = n(1 + \beta\cos 2\eta)\ ,$$

ita ut etiam β sit fractio quam minima. Hinc cum sit $d\eta = d\phi - d\theta$, erit

$$\frac{d\eta}{d\theta} = n(1 + \beta\cos 2\eta) - 1\ , \quad \text{sive} \quad \frac{d\eta}{d\theta} = n - 1\ ,$$

ob β fractionem minimam. His positis erit

$$\frac{dv}{d\theta} = -2a\alpha(n-1)\sin 2\eta$$

et

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4a\alpha(n-1)^2\cos 2\eta\ ,$$

tum vero habebitur

$$\frac{dd\phi}{d\theta^2} = -2n\beta(n-1)\sin 2\eta\ .$$

23. His iam valoribus introductis pro aequatione posteriore habebimus

$$\frac{v\,dd\phi}{d\theta^2} = -2an\beta(n-1)\sin 2\eta$$

et

$$\frac{2\,dv\,d\phi}{d\theta^2} = -4na\alpha(n-1)\sin 2\eta\ .$$

His porro valoribus introductis aequatio posterior erit

$$-2an\beta(n-1)\sin 2\eta - 4an\alpha(n-1)\sin 2\eta = -\frac{3}{2}a\sin 2\eta\ ,$$

neglecta in parte dextra particula infinite parva. Hinc per $a\sin 2\eta$ dividendo habebimus

$$4n(n-1)(\beta+2\alpha) = 3\ , \quad \text{ideoque} \quad \beta+2\alpha = \frac{3}{4n(n-1)}\ .$$

Unde iam patet, quia α et β debent esse fractiones quam minimae, hunc casum locum habere non posse, nisi fuerit numerus n satis notabilis, hoc est nisi Luna admodum celeriter circa Terram revolvatur.

24. Expediamus nunc etiam priorem aequationem, pro qua erit primo

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4a\alpha(n-1)^2\cos 2\eta\ ,$$

deinde vero erit

$$\frac{v\,d\phi^2}{d\theta^2} = ann(1+(\alpha+2\beta)\cos 2\eta)\ .$$

Porro pro parte dextra habebitur

$$\frac{m}{vv} = \frac{m}{aa}(1+\alpha\cos 2\eta)^{-2} = \frac{m}{aa}(1-2\alpha\cos 2\eta)\ ,$$

ac denique

$$\frac{1}{2}v(1+3\cos 2\eta) = \frac{1}{2}a(1+(\alpha+3)\cos 2\eta) = \frac{1}{2}a(1+3\cos 2\eta)\ ,$$

ob α minimum. Ex his igitur prior aequatio colligitur fore

$$\begin{aligned} &-4a\alpha(n-1)^2\cos 2\eta - ann(1+(\alpha+2\beta)\cos 2\eta) \\ &\quad = -\frac{m}{aa}(1-2\alpha\cos 2\eta) + \frac{1}{2}a(1+3\cos 2\eta)\ . \end{aligned}$$

In qua aequatione duplicis generis termini occurrunt: alteri absoluti, alteri vero per $\cos 2\eta$ affecti, quos ergo seorsim inter se aequari convenit. Ex terminis igitur absolutis orietur

$$-ann = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{2}a\ , \quad \text{sive} \quad nn = \frac{m}{a^3} - \frac{1}{2}\ ,$$

unde fit $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$; at alteri termini, per $\cos 2\eta$ divisi, praebent

$$-4a\alpha(n-1)^2 - ann(\alpha + 2\beta) = \frac{2m\alpha}{aa} + \frac{3}{2}a\ ,$$

sive

$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \frac{3}{2} = -\frac{2m\alpha}{a^3}\ .$$

25. Tres igitur adepti sumus conditiones, quas adimpleri oportet, ex quarum secunda $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$ statim deduci potest distantia $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$. Quodsi porro in tertia aequatione loco $\frac{m}{a^3}$ scribatur valor $nn + \frac{1}{2}$, ea erit

$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \frac{3}{2} = -2\alpha nn - \alpha\ ,$$

sive

$$4\alpha(n-1)^2 + 3\alpha nn + 2\beta nn + \alpha + \frac{3}{2} = 0\ .$$

Prima vero conditio dederat $\beta + 2\alpha = \frac{3}{4n(n-1)}$, unde fit

$$\beta = \frac{3}{4n(n-1)} - 2\alpha\ ,$$

qui valor in illa aequatione substitutus producit

$$4\alpha(n-1)^2 + \frac{3n}{2(n-1)} - \alpha nn + \alpha + \frac{3}{2} = 0\ ,$$

sive

$$\alpha(3nn - 8n + 5) = -\frac{3n}{2(n-1)} - \frac{3}{2} = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)}\ ,$$

unde elicitur

$$\alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}\ ,$$

hincque

$$\beta = \frac{3(11nn - 12n + 5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}\ .$$

Pro distantia autem a invenimus $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$.

26. Hic autem probe notandum est hos valores locum habere non posse, nisi numeri α et β fuerint valde exigui, ut earum quadrata et producta tuto negligi queant; unde statim patet id fieri non posse, nisi numerus n accipiatur praegrandis. Ad hunc limitem aestimandum, quoniam posuimus

$$v = a(1+\alpha\cos 2\eta) \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{d\theta} = n(1+\beta\cos 2\eta)\ ,$$

hinc quaeramus ipsum angulum ϕ, qui erit

$$\phi = n\theta + \beta n \int d\theta \cos 2\eta\ ,$$

ubi, quia est

$$d\eta = d\phi - d\theta = (n-1)\, d\theta\ ,$$

erit

$$d\theta = \frac{d\eta}{n-1}\ ;$$

unde fit

$$\int d\theta \cos 2\eta = \int \frac{d\eta \cos 2\eta}{n-1} = \frac{\sin 2\eta}{2(n-1)}\ ,$$

quamobrem habebimus

$$\phi = n\theta + \frac{\beta n \sin 2\eta}{2(n-1)}\ ;$$

ex qua forma facile intelligitur, dummodo posterior pars non superet aliquot minuta prima, terminos neglectos tuto omitti posse. At vero unum minutum primum in partibus radii est 0,00029, unde si sumamus $n = 100$, valor formulae $\frac{\beta n}{2(n-1)}$ producit tantum 0,000143, ideoque semi-minutum primum. Ex quo tuto concludere licet limitem, quem numerus n superare debet, satis tuto constitui posse $n = 50$. Posito autem $n = 50$ fit

$$\beta = \frac{3\cdot 26905}{200\cdot 49^2\cdot 145} = 0{,}001159\ , \quad \text{hincque} \quad \frac{n\beta}{2(n-1)} = \frac{50\cdot\beta}{98} = 0{,}00059\ ,$$

quae fractio valet satis exacte duo minuta prima; quamobrem statui posse videtur, quamdiu numerus n maior fuerit quam 50, formulas inventas tam exacte cum veritate consentire, ut error prorsus sentiri nequeat; contra vero, quo minor numerus n accipiatur quam 50, tum formulas nostras continuo magis a veritate esse aberraturas, propterea quod his casibus terminos, quos neglximus, non amplius omittere licet.

27. Consideremus igitur propius casum quo $n = 50$, et quoniam iam invenimus esse $\beta = 0{,}001159$, quaeramus etiam valorem ipsius

$$\alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}\ ,$$

qui reperitur $\alpha = -0{,}000427$. Pro distantia autem a invenienda, quia invenimus $a^3 = \frac{2m}{2nn+1}$, erit

$$\frac{1}{a^3} = \frac{2nn+1}{2m} = \frac{1000000(2nn+1)}{6}, \quad \text{ob} \quad m = \frac{3}{1000000}.$$

Cum igitur sit $2nn + 1 = 5001$, erit[5] $l\frac{1}{a^3} = 8{,}9209056$, ideoque $l\frac{1}{a} = 2{,}9736352$, consequenter $\frac{1}{a} = 941$, ideoque $a = \frac{1}{941}$. Quare cum distantia Solis, quam hic unitate designamus, contineat satis exacte 24000 semidiametros Terrae, distantia huius Lunae a Terra erit quasi 25 semidiametrorum terrestrium, ideoque plus quam duplo minor, quam distantia Lunae verae. Hinc autem motus talis Lunae per sequentes duas aequationes exprimetur:

$$1^\circ. \quad v = a(1 - 0{,}000427\cos 2\eta)$$
$$2^\circ. \quad \phi = 50\,\theta + 0{,}00059\sin 2\eta$$

sive in minutis secundis $\phi = 50\,\theta + 122''\sin 2\eta$.

28. Talis igitur Luna in distantia a Terra 25 semidiametrorum terrestrium propemodum circulum motu uniformi esset descriptura, eiusque tempus periodicum praecise foret pars quinquagesima unius anni, ideoque suas revolutiones perageret tempore $7^d\,7^h$. Interim tamen in eius motu quaedam exiguae inaequalitates deprehendentur ab elongatione huius Lunae a Sole pendentes, quas ergo, uti in vera Luna fieri solet, variationem appellare liceat, quibus tam distantia a Terra quam locus medius, in formula $50\,\theta$ contentus, afficietur; has ergo pro praecipuis angulis η hic ob oculos ponamus:

	$\eta = 0$ vel $= 180^\circ$	$\eta = 45^\circ$ vel $= 225^\circ$
Variatio distantiae	$-0{,}000427\,a$	0
Longitudo	0	$122''$

	$\eta = 90^\circ$ vel $= 270^\circ$	$\eta = 135^\circ$ vel $= 315^\circ$
Variatio distantiae	$0{,}000427\,a$	0
Longitudo	0	$-122''$

Scilicet in coniunctionibus et oppositionibus distantiam mediam a diminui oportet particula $\frac{a}{2344}$, quae tantum facit partem nonagesimam quartam semidiametri Terrae, sive circiter 9 milliaria Germanica; tum vero longitudo nulla eget correctione. Contra vero in quadraturis distantiam Lunae augeri oportet particula $\frac{a}{94}$, longitudo autem pariter nulla correctione indiget. At vero in octantibus, ubi

$$\eta = \begin{cases} 45^\circ \\ 225^\circ \end{cases} \quad \text{vel} \quad \eta = \begin{cases} 135^\circ \\ 315^\circ \end{cases},$$

5 l denotat logarithmum.

distantia nullam correctionem postulat, longitudinem vero ϕ priori casu augeri, posteriori vero diminui oportet quantitate $122''$, hoc est $2'2''$. Multo minus autem motus talis Lunae a circulari uniformi foret discrepaturus, si eius distantia minor esset quam 25 semidiametrorum Terrae.

29. Quodsi velimus, ut talis Luna in ipsa superficie Terrae revolvatur, ita ut sit $a = \frac{1}{24000}$, hinc primo computari debet valor numeri n, qui indicat, quot revolutiones talis Luna intervallo unius anni circa Terram esset peractura. Cum igitur invenerimus $nn + \frac{1}{2} = \frac{m}{a^3}$, erit

$$nn + \frac{1}{2} = 3 \cdot 240^3 \quad \text{ideoque} \quad n = \sqrt{(3 \cdot 240^3)}\ ,$$

ex quo reperitur $n = 6440$. Toties scilicet talis Luna uno anno revolveretur, qui numerus per 365 divisus ostendet, quoties talis Luna tempore 24 horarum circumferetur, scilicet $17\frac{2}{3}$, quod satis egregie convenit cum calculo HUGENII[6]. Evidens autem est valores α et β hoc casu prorsus evanescere.

30. Quanquam autem his casibus, quibus distantia a non ultra 25 semidiametros terrestres exsurgit, eius distantia a Terra exiguam variationem patitur, ita ut orbita non perfecte sit circularis, tamen tali orbitae ab Astronomis nulla excentricitas tribui solet, propterea quod inaequalitates a solo angulo η pendent, dum effectus excentricitatis ab Anomalia pendet, cuius hic nullum vestigium apparet. Quemadmodum etiam distantiae verae Lunae a Terra haud exiguam variationem paterentur, etiamsi eius excentricitas evanesceret.

31. Cum determinationes hactenus inventae tanquam exactissimae spectari queant, dummodo distantia talium Lunarum non notabiliter 25 semidiametros terrestres superet, hoc intelligi oportet, quando orbitae omni excentricitate carent, ita ut omnes inaequalitates tam in distantia, quam motus celeritate a sola elongatione Solis sive angulo η pendeant, ad cuiusmodi motum producendum manifestum est tali Lunae initio certum motum imprimi debuisse. Sin autem motus impressus tantillo fuerit maior vel minor, inde statim orietur quaepiam excentricitas, quae, dummodo fuerit satis parva, sequenti modo definiri poterit.

Investigatio motuum, qui oriuntur, si in casibus praecedentibus praeter variationem etiam quam minima excentricitas accesserit

32. Quoniam pro effectu ab excentricitate oriundo certus quidam angulus in computum trahi debet, qui Anomalia vocari solet, designemus istum angulum littera ζ, pro quo ponamus $d\zeta = i\, d\theta$, quem numerum i ex ipsis formulis nostris determinari oportet. Simili igitur modo, quo supra angulum η in calculum

6 Cf. [Huygens 1690], pp. 143, 146.

introduximus, nunc quoque angulum ζ introducamus, ideoque ponamus

$$v = a(1 + \alpha\cos 2\eta + \gamma\cos\zeta)\,,$$
$$\frac{d\phi}{d\theta} = n(1 + \beta\cos 2\eta + \delta\cos\zeta)\,,$$

ubi pariter supponimus coefficientes γ et δ esse quam minimos, ita ut earum combinationes tam inter se quam cum litteris α et β negligi queant. Hinc igitur similis calculus institui debebit, ut ante, et quoniam litterae α et β iam sunt inventae, hic tantum habebimus has formulas:

$$v = a(1 + \gamma\cos\zeta) \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{d\theta} = n(1 + \delta\cos\zeta)\,.$$

Praeterea cum per litteras α et β omnes termini angulum η vel 2η involventes iam ex aequationibus principalibus sint sublati, nunc sufficiet has aequationes considerasse:

$$1^{\text{o}}. \qquad \frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v$$
$$2^{\text{o}}. \qquad \frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} = 0\,.$$

33. His observatis, cum sit $d\zeta = i\,d\theta$, per differentiationem nanciscemur

$$\frac{dv}{d\theta} = -ia\gamma\sin\zeta \quad \text{et} \quad \frac{ddv}{d\theta^2} = -iia\gamma\cos\zeta\,;$$

tum vero $\frac{dd\phi}{d\theta^2} = -in\delta\sin\zeta$. Praeterea vero habebimus

$$\frac{1}{vv} = \frac{1}{aa}(1 + \gamma\cos\zeta) = \frac{1}{aa}(1 - 2\gamma\cos\zeta)\,.$$

Hinc igitur posterior aequatio induet hanc formam:

$$-2ina\gamma\sin\zeta - ian\delta\sin\zeta = 0\,,$$

unde oritur $\gamma = -\frac{1}{2}\delta$. Prior autem aequatio facta substitutione induet hanc formam:

$$-iia\gamma\cos\zeta - ann - ann(2\delta + \gamma)\cos\zeta = -\frac{m}{aa} + \frac{2m\gamma}{aa}\cos\zeta + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\gamma\cos\zeta\,;$$

hinc termini absoluti praebent, ut iam supra invenimus,

$$\frac{m}{aa} = a\left(nn + \frac{1}{2}\right)\,,$$

reliqui vero per $a\cos\zeta$ divisi dant

$$-ii\gamma - nn(2\delta+\gamma) = \frac{2m\gamma}{a^3} + \frac{1}{2}\gamma = \left(2nn + \frac{3}{2}\right)\gamma\,.$$

Ante autem invenimus $\delta = -2\gamma$, unde fit

$$-ii + 3nn = 2nn + \frac{3}{2}\,, \quad \text{ideoque} \quad ii = nn - \frac{3}{2} \quad \text{sive} \quad i = \sqrt{\left(nn - \frac{3}{2}\right)}\,.$$

Ipsa autem quantitas γ hinc non definitur, sed arbitrio nostro relinquitur; tam parvus autem valor ipsi tribui debet, ut hypothesis consistere possit.

34. Hic quantitas ista γ idem denotat, quod vulgo excentricitas vocari solet, at vero angulus ζ est anomalia media et tempori θ ita proportionalis, ut sit

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = i = \sqrt{\left(nn - \frac{3}{2}\right)}\;;$$

ubi notetur, si esset $i = n$, tum anomaliam $\zeta = n\theta$ ipsi motui medio fore aequalem, ideoque lineam absidum quiescere. Quia autem hinc valor ipsius i tantillo fit minor, scilicet $i = n - \frac{3}{4n}$, motus anomaliae aliquanto tardior erit, ideoque linea absidum aliquantillum progreditur; tum vero formulae motum determinantes erunt

$$v = a(1 + \alpha\cos 2\eta + \gamma\cos\zeta)$$

et

$$\frac{d\phi}{d\theta} = n(1 + \beta\cos 2\eta + \delta\cos\zeta)\,.$$

Ex posteriore colligitur

$$\phi = n\theta + \frac{\beta n}{2(n-1)}\sin 2\eta - \frac{2n\gamma\sin\zeta}{i}\;;$$

ubi meminisse convenit esse, uti supra invenimus[7],

$$a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}\,,$$

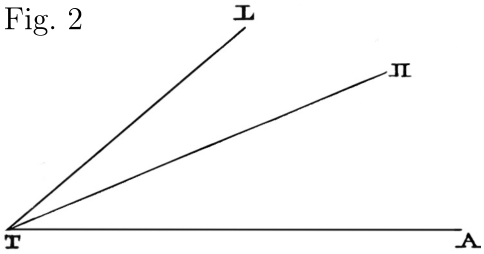
$$\alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{3(11nn-12n+5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}\,,$$

quibus ergo motus talis Lunae accurate exprimitur, si modo fuerit $n > 50$, sive $a < 25$ semidiametrorum terrestrium, ipsa autem excentricitas γ tam parva,

7 Editio princeps: $a = \sqrt{\frac{2m}{2nn+1}}$.

ut inaequalitas inde in motu orta, scilicet $\frac{2n\gamma}{i}$, in angulum conversa, non ultra aliquot minuta prima ascendat; quod ob $i = n$ proxime evenit, si γ non superet 0,00029, qui est valor unius minuti primi. Ex his enim formulis ad quodvis tempus tam distantiam talis Lunae a Terra, quam eius veram longitudinem assignare licebit. Quod autem ad ipsum motum absidum attinet, quoniam tempore unius anni n revolutiones peraguntur a termino fixo, at vero, revolutiones a linea absidum computando, pauciores revolutiones, scilicet $i = n - \frac{3}{4n}$, absolvuntur, linea absidum interea processisse censenda est per $\frac{3}{4n} \cdot 360° = \frac{270°}{n}$. Unde si $n = 50$, motus annuus apogaei erit $\frac{27°}{5} = 5°24'$; quo maior autem fuerit numerus n, eo tardior erit iste motus.

Fig. 2



35. Ut iste motus lineae absidum clarius percipiatur, sit (Fig. 2) $T\Pi$ recta ad apogaeum Π ducta, voceturque angulus $AT\Pi = \pi$, Luna autem versetur in L, ita ut sit angulus $ATL = \phi$ et anomalia $\Pi TL = \zeta$, eritque $\phi = \pi + \zeta$. Cum iam secundum motum medium sit $d\phi = n\,d\theta$ et $d\zeta = i\,d\theta$, erit[8] $d\pi = (n - i)\,d\theta$, ubi $\frac{d\pi}{d\theta}$ denotat celeritatem lineae absidum, unde, tempore per angulum θ expresso, linea absidum promovebitur per angulum[9] $(n-i)\theta$, ideoque tempore unius anni, quo fit $\theta = 360°$, linea absidum progredietur per angulum[10] $(n-i)360°$. Ex quo patet, si esset $i = n$, tum lineam absidum perfecte quiescere. In casu vero oblato vidimus esse

$$i = \sqrt{\left(nn - \frac{3}{2}\right)} = n - \frac{3}{4n}\,;$$

unde sequitur intervallo unius anni apogaeum Lunae promoveri per angulum $\frac{270°}{n}$, sicque quo maior fuerit numerus n, hoc est, quo minor fuerit distantia a, eo tardiorem fore motum apogaei; contra vero eo celeriorem, quo minor fuerit n. Hoc autem tantum intelligi debet, quando $n > 50$ et $a < 25$ semidiametrorum terrestrium; pro maioribus distantiis autem, ubi motus magis erit perturbatus, promotio lineae absidum aliam sequetur rationem, namque pro Luna vera est pro-

8 Editio princeps: $(n-1)$ loco $(n-i)$.
9 Idem.
10 Idem.

pemodum $n = 13$, unde pro motu annuo apogaei ista formula tantum praeberet $\frac{10}{13} \cdot 20°$, qui tamen revera propemodum duplo est maior.

36. In casibus igitur hactenus tractatis, quibus $n > 50$ et excentricitas γ tam exigua uti supponimus, determinatio loci talis Lunae duas tantum correctiones postulat, quarum altera ab angulo 2η pendet, quae variatio vocatur, altera vero ab angulo ζ, quo anomalia designatur. Quando autem excentricitas γ notabiliter maior est quam 0,00029, hoc est quam $\frac{3}{10000}$, tum insuper in calculum introduci necesse est terminos, qui oriuntur ex combinatione binorum terminorum, qui iam angulos 2η et ζ continent, unde nascuntur novi anguli, scilicet 2ζ, atque adeo porro 3ζ, 4ζ etc., ac praeterea etiam anguli $2\eta \pm \zeta$, imo etiam porro $2\eta \pm 2\zeta$, $2\eta \pm 3\zeta$ etc. Ex quo intelligitur, quo maior fuerit excentricitas γ, eo pluribus opus esse correctionibus ad locum talis Lunae determinandum.

37. Haec ita se habent, quando numerus revolutionum quotannis peractarum non notabiliter minor est quam 50, sive distantia media non multum superat 25 semidiametros terrestres. Consideremus nunc etiam casus, quibus distantia a multum superat hunc limitem. Ac primo quidem omnem excentricitatem removeamus, ita ut omnes inaequalitates a solo angulo η pendeant, et quoniam tum binos pluresve huiusmodi angulos invicem combinari oportet, praeter angulum 2η etiam eius multipla in computum ingredientur, scilicet 4η, 6η etc.; tum vero, aucta distantia a vel v, series pro $\dfrac{1}{u^3}$ inventa usque ad tertium terminum extendi debebit, unde in nostras aequationes etiam anguli η et 3η ingredientur, a quibus eae correctiones pendent, quae parallacticae vocari solent, quoniam a vera distantia Solis a Terra pendent.

38. Quodsi iam praeterea excentricitas quam minima accedat, cui respondeat anomalia ζ, praeter angulos ante memoratos insuper introducentur anguli $2\eta \pm \zeta$, $4\eta \pm \zeta$, ac fortasse etiam $6\eta \pm \zeta$, tum vero etiam ex parallacticis natae $\eta \pm \zeta$ et $3\eta \pm \zeta$. Sin autem excentricitas maior evadat, ut etiam angulorum 2ζ, 3ζ, 4ζ etc. ratio haberi debeat, per combinationem insuper accedent anguli $2\eta \pm 2\zeta$, $4\eta \pm 2\zeta$, $6\eta \pm 2\zeta$ etc., itemque porro anguli $2\eta \pm 3\zeta$, $4\eta \pm 3\zeta$ etc., quin etiam $\eta \pm 2\zeta$, $3\eta \pm 2\zeta$. Unde patet, quo maior fuerit distantia Lunae a Terra simulque excentricitas, numerum angulorum, a quibus omnes correctiones pendent, continuo magis increscere, atque adeo tandem tam magnum evadere posse, ut ob ipsam multitudinem determinatio fiat incerta, praeterquam quod labor omnes istas correctiones per calculum definiendi mox vires Analyseos esset superaturus.

39. Haec clariora reddentur, si tabulas pro motu verae Lunae determinando contemplemur, quae primo manifesto involvunt angulos 2η, 4η, item 3η, ex quibus coniunctis variatio Lunae emergit; deinde secundo angulos ζ, 2ζ, 3ζ et 4ζ, qui coniunctim exhibent aequationem centri; tertio vero insuper accedunt anguli per combinationem orti, scilicet:

$$2\eta \pm \zeta\ ,\ 4\eta \pm \zeta\ ,\ 2\eta \pm 2\zeta\ ,\ 4\eta \pm 2\zeta\ ,\ 2\eta \pm 3\zeta\ ,$$

tum vero etiam $\eta \pm \zeta$, $3\eta \pm \zeta$. Hae scilicet correctiones solae sufficerent, si Terra circa Solem uniformiter in circulo revolveretur, simulque tota Lunae orbita in eclipticam incideret; verum ob motum Solis inaequabilem, anomalia etiam Solis et, ob inclinationem orbitae Lunaris, etiam argumentum latitudinis in computum ingrediuntur, quos duos novos angulos cum singulis praecedentium combinari oportet, unde tantus correctionum numerus originem traxit.

40. His perpensis abunde intelligitur, si daretur eiusmodi Luna, quae in multo maiori distantia circa Terram revolveretur, tum numerum omnium correctionum tantopere multiplicatum iri, ut motus plane non amplius per huiusmodi tabulas repraesentari posset, ideoque nobis etiamnunc foret inperscrutabilis; quamobrem summopere necesse erit in alium modum maxime diversum huiusmodi Lunae motum repraesentandi inquirere, cuius quidem adhuc ne vel minimam notionem nobis formare valemus. Hae autem difficultates eo magis increscent, quo propius orbita talis Lunae ad limitem sphaerae lunaris supra fixum, scilicet $a = \frac{1}{100}$, accesserit. Ac si talis Luna existeret, fateri cogeremur nos nullam prorsus ideam eius motus ne mente quidem concipere posse, talemque motum prorsus fore inextricabilem, nisi forte nostra scientia analytica insignibus incrementis fuerit locupletata.

41. Cum igitur, quo propius distantia talis Lunae ad limitem supra definitum $a = \frac{1}{100}$ appropinquaverit, eius motus continuo magis fiat irregularis, atque adeo vires nostri ingenii superet, eo magis est mirandum, quod in ipso limite $a = \frac{1}{100}$ contingere posset, ut Luna motu adeo uniformi in circulo circumferretur. Verum istum casum comparari conveniet cum eiusmodi statu aequilibrii, qui labilis seu caducus appellari solet. Veluti quando acus cuspide insistit: simul ac enim quam minime ab hoc statu fuerit aberratus, tota machina in ruinam delabitur. Simili modo, si motus huiusmodi Lunae quam minime a motu illo regulari deficiat, subito maxime evadet irregularis, neque ullis regulis vel tabulis comprehendi poterit.

DE MOTIBUS MAXIME IRREGULARIBUS, QUI IN SYSTEMATE MUNDANO LOCUM HABERE POSSENT, UNA CUM METHODO HUIUSMODI MOTUS PER TEMPORIS SPATIUM QUANTUMVIS MAGNUM PROSEQUENDI

Commentatio 549 indicis Enestroemiani
Acta academiae scientiarum Petropolitanae [4:I] (1780:I), 1783, p. 280–302
(Kommentar zu E 549)

1. In praecedente dissertatione[1] nobis licuit limites naturales definire, quos inter planetas primarios et secundarios stabilire convenit. Ostendimus enim sphaeram lunarem a centro Terrae usque ad partem centesimam distantiae Solis extendi, quandoquidem in hac distantia evenire posset, ut corpus certo modo proiectum, tam circa Terram quam circa Solem, circulum motu uniformi describeret; similique modo sphaeram satellitiam Iovis circiter ad partem decimam quintam eius distantiae a Sole, Saturni autem ad partem vicesimam circiter distantiae a Sole porrigi observavimus. Quibus limitibus constitutis omnia corpora, quae intra eos revolutiones suas peragunt, ad classem satellitum, quae autem extra eos motum suum absolvunt, inter planetas principales referri conveniet.

2. Quanquam autem in ipsis his limitibus motus existere potest maxime regularis, quippe qui in circulo uniformiter perageretur, tamen hic se maximum paradoxon obtulit, in hoc consistens, quod si motus vel minime ab ista regularitate discrepaverit, in eo statim maximae perturbationes se admisceant, quas nullo adhuc modo in Astronomia usitato ad certam legem revocare liceat. Neque enim his casibus tales perturbationes more solito per certas tabulas aequationum, proxime saltem, repraesentari poterunt, quaecunque etiam talium tabularum argumenta in subsidium vocentur; atque hae perturbationes eo erunt maiores, quo propius huiusmodi motus ad ipsos limites designatos accesserint.

3. Hinc intelligitur tria genera huiusmodi motuum maxime perturbatorum constitui debere, quorum primum ea complectatur corpora, quae totum suum motum intra limites designatos circa planetam primarium absolvant, quae ergo ad classem Lunarum seu satellitum referri oportet. Quae autem corpora extra sphaeram lunarem seu satellitiam non procul a limitibus motum suum circa Solem absolvunt, ea sine dubio planetis principalibus annumerari debebunt, etiamsi

1 [E 548].

eorum motus tantopere perturbetur, ut nullis plane aequationibus ad certam legem reduci queat. Tertium denique genus eiusmodi comprehendet corpora, quae ita oblique moveantur, ut modo ex sphaera lunari egrediantur, modo se iterum in eam immergant; talia enim corpora alio tempore tanquam satellites, alio vero tanquam planetae principales spectari debebunt, cuiusmodi motus quemadmodum saltem menti vero tantum proxime repraesentari queat, nequaquam adhuc intelligere licet. Si enim talia corpora in systemate nostro solari occurrerent, eorum motus nobis adhuc penitus foret ignotus, ita ut eorum[2] loca in coelo nunquam sine crassissimo errore praedicere valeremus.

4. His summis difficultatibus perpensis, quilibet facile agnoscet, quamdiu in tanta ignoratione circa huiusmodi motus versabimur, nos nullo modo sperare posse, ut unquam ad accuratam cognitionem omnium perturbationum, quibus vel planetae primarii vel satellites revera premuntur, pertingere valeamus. Quamdiu enim nobis impossibile manebit motum alius Lunae, quae ad distantiam vel duplo, vel triplo, vel adeo quadruplo maiorem circa Terram revolveretur, perscrutari, nullo modo perfectam cognitionem omnium inaequalitatum verae Lunae assequi poterimus. Simili modo quoniam, si inter orbitas Iovis et Saturni existeret planeta primarius, eius motus nobis plane futurus esset imperscrutabilis, hinc manifesto sequitur etiam nullam perfectam cognitionem omnium perturbationum, quae in motu Saturni observantur, exspectari posse.

5. Haec autem tanta impedimenta nullo modo superari poterunt, nisi maxima incrementa in scientiam nostram analyticam inferantur. Cum enim omnes motus, quantumvis fuerint perturbati, nunc quidem sine ulla difficultate aequationibus analyticis comprehendi queant, totum negotium ad idoneam harum aequationum resolutionem revolvitur. Ad hoc autem tanta incrementa desiderantur, qualia vix adhuc, vel ne vix quidem, sperari posse videntur. Interim tamen nullum est dubium, si talis motus revera in mundo existeret, quem per longum temporis spatium nobis observare licuisset, quin Astronomi in eiusmodi artificia incidissent, quibus vero saltem proxime talem motum ad certam legem quodammodo revocare potuissent. Hanc ob rem, si satis longam seriem talium observationum, quales eiusmodi corpus suppeditaret, ob oculos exponere possemus, earum contemplatio usu certe non esset caritura, eaque fortasse tutissimam viam nobis aperiret ad pleniorem cognitionem huiusmodi motuum appropinquandi.

6. Quanquam autem vix ulla spes superest aequationes analyticas, quibus tales motus continentur, perfecte resolvendi, tamen iam pridem eiusmodi methodum proposui,[3] cuius beneficio huiusmodi motus quantumvis irregulares quasi gradatim ita prosequi licet, ut si modo pro certo quodam tempore talis corporis tam locum quam motum noverimus, inde ad quaevis temporum intervalla sequentia verus locus satis exacte determinari queat. Haec igitur methodus nobis istum eximium usum praestare potest, ut, si talis motus existeret, longissimam seriem

2 Editio princeps: eius.
3 [E 398].

observationum exhibere valeamus, quibus per longum temporis spatium vera loca talis corporis in coelo definiantur, quarum ergo contemplatio nos ad pleniorem cognitionem manuducere poterit.

7. Ut igitur hanc viam ineamus et impedimenta minoris momenti removeamus, fingamus Terram in plano eclipticae motu uniformi circa Solem in circulo revolvi, cuius radium unitate exprimamus, eiusque motus commodissimam temporis mensuram suppeditabit. Deinde massam Solis pariter unitate designemus, cuius respectu massa Terrae sit $= m$, existente $m = \frac{3}{1000000}$. Iam in ipso plano (Fig. 1) eclipticae moveatur tale corpus lunare, cuius motum scrutamur, atque

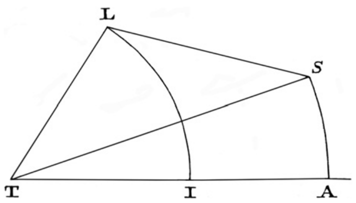


Fig. 1

ad certum quodpiam tempus, dum Terram in T quiescentem spectamus, sit centrum Solis in S, existente $TS = 1$, Luna autem, quam consideramus in L, cuius distantiam a Terra vocemus $TL = v$, et angulus $ATL = \phi$, pro Sole vero ponatur angulus $ATS = \theta$, qui ergo nobis mensuram temporis praebebit, cuius elementum $d\theta$ in sequentibus aequationibus constans est assumtum. Praeterea vero ponamus brevitatis gratia angulum $STL = \phi - \theta = \eta$ et distantiam Lunae a Sole $LS = u$, ita ut sit

$$u = \sqrt{(1 - 2v\cos\eta + vv)} \ ,$$

quibus positis motus quaesitus istius Lunae L binis sequentibus aequationibus exprimetur[4]:

$$1^{\circ}. \quad \frac{(1+m)(ddv - v\,d\phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} - \cos\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{v}{u^3}$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{(1+m)(2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi)}{d\theta^2} = \sin\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) \ ,$$

uti scilicet in praecedente dissertatione ostendimus[5].

8. Hae aequationes tam sunt generales, ut aeque pateant ad omnia corpora, quae tam intra sphaeram lunarem quam extra in plano eclipticae revolvuntur. Quoniam autem hic nobis potissimum est propositum in motus lunares inquirere, ita ut distantia v nunquam superet partem centesimam distantiae Solis, sive $\frac{1}{100}$, satis exacte statuere licebit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3v\cos\eta$, et quoniam fractio $m = \frac{3}{1000000}$

4 Editio princeps: $\frac{m}{vv}$ loco $-\frac{m}{vv}$.
5 Cf. [E 548], § 9.

est quasi evanescens, loco $1+m$ tuto scribere licebit 1, unde binae aequationes modo traditae sequentes formas adipiscentur[6]:

$$\text{I.}\qquad \frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1+3\cos 2\eta)$$
$$\text{II.}\qquad \frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} = -\frac{3}{2}v\sin 2\eta\ ,$$

ex quibus quemadmodum motum istius Lunae gradatim prosequi queamus, ut ad quodvis tempus, postquam fuerit in L, eius locus innotescat, hic imprimis explicemus.

9. Sumamus igitur pro certa epocha istam Lunam fuisse in L, cuius tam distantia a Terra $TL = v$ quam angulus $ATL = \phi$ fuerit cognitus, perinde ac locus Solis, seu angulus $ATS = \theta$, quo simul tempus istius epochae definiatur, si quidem ponamus ipso motus initio Solem fuisse in A, Lunam vero in I. Hinc igitur pro epocha assumta etiam datus erit angulus $STL = \eta = \phi - \theta$. Praeterea, quia etiam motus huius Lunae in L ut cognitus spectatur, etiam dabitur tam eius motus, quo a Terra recedit, cuius celeritas est $\frac{dv}{d\theta}$, quam eius motus angularis, cuius celeritas est $\frac{d\phi}{d\theta}$; quae binae celeritates cum sint cognitae, ponamus $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\phi}{d\theta} = q$, et cum hinc sit

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{dp}{d\theta} \quad \text{et} \quad \frac{dd\phi}{d\theta^2} = \frac{dq}{d\theta}\ ,$$

his valoribus substitutis nostrae ambae aequationes erunt:

$$\text{I.}\qquad \frac{dp}{d\theta} - qqv = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1+3\cos 2\eta)$$
$$\text{II.}\qquad 2pq + \frac{v\,dq}{d\theta} = -\frac{3}{2}v\sin 2\eta\ .$$

Hinc iam cognoscimus mutationes momentaneas, quas litterae p et q accipiunt; erit enim

$$\frac{dp}{d\theta} = qqv - \frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1+3\cos 2\eta)$$

et

$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \frac{3}{2}\sin 2\eta\ ,$$

dum ipsarum quantitatum v et ϕ mutationes momentaneae sunt $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\phi}{d\theta} = q$.

6 Cf. [E 548], § 20.

10. Ex cognitis autem his mutationibus, seu differentialibus primis, etiam differentialia altiora elici poterunt. Cum enim sit $d\eta = d\phi - d\theta$, erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, unde differentiando reperiemus:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \frac{ddp}{d\theta^2} = pqq + 2qv\frac{dq}{d\theta} + \frac{2mp}{v^3} + \frac{1}{2}p(1 + 3\cos 2\eta) - 3v(q-1)\sin 2\eta \\
&\text{II.} \quad \frac{ddq}{d\theta^2} = -\frac{2q}{v}\frac{dp}{d\theta} - \frac{2p}{v}\frac{dq}{d\theta} + \frac{2ppq}{vv} - 3(q-1)\cos 2\eta\,,
\end{aligned}$$

quae expressiones reducuntur ad sequentes:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \frac{ddp}{d\theta^2} = -3pqq + \frac{2mp}{v^3} + \frac{1}{2}p(1 + 3\cos 2\eta) - 3v(2q-1)\sin 2\eta \\
&\text{II.} \quad \frac{ddq}{d\theta^2} = -q(2qq+1) + \frac{2mq}{v^3} + \frac{6ppq}{vv} + \frac{3p\sin 2\eta}{v} - 3(2q-1)\cos 2\eta\,.
\end{aligned}$$

Similique modo etiam altiora differentialia, si opus fuerit, definiri poterunt.

11. His autem differentialibus inventis, tam situs quam motus nostrae Lunae, quae nunc erat in L, ad datum quodvis tempus hinc elapsum, quod sit $= \omega$, assignari poterit. Si enim pro tempore ab initio elapso $\theta + \omega$, quod designemus per θ', quatuor quantitates situm et motum continentes ponantur p', q', v' et ϕ', eas tales functiones ipsius $\theta + \omega$ esse oportet, quales ipsae quantitates primitivae p, q, v et ϕ erant functiones ipsius θ tantum, unde ex principiis calculi differentialis constat fore:

$$v' = v + \omega\frac{dv}{d\theta} + \frac{\omega^2\, ddv}{1\cdot 2\cdot\, d\theta^2} + \frac{\omega^3\, d^3v}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\, d\theta^3} + \frac{\omega^4\, d^4v}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\, d\theta^4} + \text{etc.}$$

Hinc igitur, si loco $\frac{dv}{d\theta}$ scribatur p, habebitur:

$$v' = v + \omega p + \frac{\omega^2\, dp}{2\, d\theta} + \frac{\omega^3\, ddp}{6\, d\theta^2} + \frac{\omega^4\, d^3p}{24\, d\theta^3} + \text{etc.}$$

atque eodem modo tres reliquae quantitates definientur:

$$\begin{aligned}
\phi' &= \phi + \omega q + \frac{\omega^2\, dq}{2\, d\theta} + \frac{\omega^3\, ddq}{6\, d\theta^2} + \frac{\omega^4\, d^3q}{24\, d\theta^3} + \text{etc.} \\
p' &= p + \frac{\omega\, dp}{d\theta} + \frac{\omega^2\, ddp}{2\, d\theta^2} + \frac{\omega^3\, d^3p}{6\, d\theta^3} + \text{etc.} \\
q' &= q + \frac{\omega\, dq}{d\theta} + \frac{\omega^2\, ddq}{2\, d\theta^2} + \frac{\omega^3\, d^3q}{6\, d\theta^3} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

12. Si has series in infinitum extendere vellemus ad quodvis tempus ω, post epocham elapsum, quantumvis fuerit magnum, tam situm quam motum Lunae assignare valeremus, quod quidem laborem infinitum exigeret. Verum etiam ma-

nifestum est has series eo promtius convergere, quo minus accipiatur intervallum temporis ω; quam ob causam ipsi maiorem valorem tribui non conveniet, quam ut sufficiat, tres tantum, vel ad summum quatuor terminos illarum serierum sumsisse; tum quovis casu haud difficulter dividicabitur, quousque hoc temporis intervallum ω augere liceat, ne error sensibilis sit metuendus. Postquam autem hoc modo ad tempus $\theta + \omega$ fuerit perventum, in eo constituatur nova epocha, a qua pari modo ulterius per simile tempus ω progredi licebit; haecque operationes, quoties lubuerit, repeti poterunt. Unde perspicuum est hac ratione plurima Lunae loca per satis magnum temporis intervallum assignari ac talem observationum seriem pro lubitu ulterius continuari posse.

13. Quoniam investigatio altiorum differentialium binarum quantitatum p et q satis molestum calculum postulat et mox ad enormem terminorum numerum excrescit; hoc labore facile supersedere poterimus, si modo intervallo temporis ω aliquanto minorem valorem tribuamus; tum autem istas operationes pluries repetere oportebit. Neque vero etiam necesse erit in his determinationibus summum rigorem observare, quasi talis motus in coelo revera existeret; sed quoniam nostrum institutum eo tantum dirigitur, ut ex contemplatione satis longae seriei huiusmodi observationum certum quendam ordinem et legem, quasi divinando eliciamus, parum referet, utrum loca assignata summo rigore fuerint computata, sive parumper a veritate discrepaverint. Qui ergo talem laborem suscipere voluerit, haud exiguum fructum in Astronomiam attulisse erit censendus.

EXEMPLUM

[*Epocha prima*]

14. Ponamus primo initio, cum Sol versaretur in A, corpus nostrum lunare in ipso plano eclipticae ad distantiam a Terra $TI = 0{,}008$ ita normaliter ad directionem TA fuisse proiectum, ut eius motus angularis circa Terram duplo rapidior fuerit quam motus Solis, atque ex hac determinatione status naturalis investigabimus motum, quo hoc corpus deinceps est progressurum. In hoc igitur tempore primam epocham constituamus, pro qua propterea habebimus sequentes conditiones:

1°. Longitudinem Solis $\theta = 0$, eius distantia a Terra perpetuo manente $= 1$.

2°. Longitudinem Lunae $\phi = 0$, ideoque etiam $\eta = 0$.

3°. Distantiam Lunae a Terra $v = 0{,}008$, ideoque[7] $l\,v = 7{,}9030900$.

4°. Quia prima motus directio in puncto I erat ad rectam TA normalis, habebimus $\frac{dv}{d\theta} = p = 0$.

7 l denotat logarithmum.

5°. Quia motum angularem Lunae impressum duplo celeriorem statuimus quam motum Solis, erit $\frac{d\phi}{d\theta} = q = 2$.

15. His iam pro prima epocha constitutis, ex formulis nostris supra inventis erit:

$$1^\circ.\quad \frac{dp}{d\theta} = 4 \cdot 0{,}008 - \frac{m}{vv} + 2v\,, \qquad 2^\circ.\quad \frac{dq}{d\theta} = 0\,.$$

Pro priore autem formula erit $4v = 0{,}032$; deinde ob $m = \frac{3}{1000000}$, ideoque $l\,m = 4{,}4771213$, erit

$$\frac{m}{vv} = 0{,}046875 \quad \text{et} \quad 2v = 0{,}016\,,$$

unde habebimus $\frac{dp}{d\theta} = 0{,}001125$. Simili modo pro differentialibus secundis ipsarum p et q habebimus

$$3pqq = 0\,,\ \frac{2mp}{v^3} = 0\,,\ \frac{1}{2}p(1 + 3\cos 2\eta) = 0\,,\ 3v(2q - 1)\sin 2\eta = 0\,,$$

ideoque[8]

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = 0\,.$$

Tum vero ob

$$-q(2qq + 1) = -18\,,\ \frac{2mq}{v^3} = 23{,}43750\,,\ \frac{6ppq}{vv} = 0\,,$$

$$\frac{3p\sin 2\eta}{v} = 0\,,\ -3(2q - 1)\cos 2\eta = -9\,,$$

erit

$$\frac{ddq}{d\theta^2} = -3{,}5625\,.$$

16. Hinc iam, postquam elapsum fuerit tempus $= \omega$, pro statu corporis lunaris habebimus sequentes determinationes:

$$1^\circ.\quad \theta' = \omega\,,$$

$$2^\circ.\quad v' = 0{,}008 + \omega \cdot 0 + \omega^2 \cdot 0{,}000563 + \frac{1}{6}\omega^3 \cdot 0\,,$$

$$3^\circ.\quad \phi' = 0 + 2\omega + \frac{1}{2}\omega^2 \cdot 0 - \omega^3 \cdot 0{,}59375\,,$$

$$4^\circ.\quad p' = 0 + \omega \cdot 0{,}001125 + \frac{1}{2}\omega^2 \cdot 0\,,$$

$$5^\circ.\quad q' = 2 + \omega \cdot 0 - \omega^2 \cdot 1{,}78125\,.$$

8 Editio princeps: $\frac{ddp}{d\theta} = 0$.

Ubi iam pro ω quaevis tempora, dummodo satis fuerint exigua, assumere licebit. Quia autem tempora per ipsum motum Solis, seu angulum θ exhibere instituimus, per singulos gradus progrediemus, ponendo successive $\omega = 1^\circ$, $\omega = 2^\circ$, $\omega = 3^\circ$, etc., ubi notetur tempus uni gradui respondens fore $= 1^d\,0^h\,21'$. In subsidium autem calculi apponamus valores ipsius ω in partibus radii, simulque logarithmos adiungamus:

	$\omega = 1^\circ$	$\omega = 2^\circ$	$\omega = 3^\circ$	$\omega = 4^\circ$	$\omega = 5^\circ$
ω	0,017453	0,034907	0,052360	0,069813	0,087266
$l\,\omega$	8,241877	8,542907	8,718999	8,843937	8,940847
$l\,\omega^2$	6,483755	7,085815	7,437997	7,687875	7,881695
$l\,\omega^3$	4,725632	5,628722	6,156996	6,531812	6,822542

17. His praemissis facile erit ad singula tempora per 1°, 2°, 3°, 4°, etc. expressa et ab epocha elapsa statum nostrae Lunae assignare; ubi tantum notetur, quoniam longitudo ϕ in gradibus et minutis exprimi debet, formulam inventam in genere ita esse repraesentandam:

$$\phi' = \phi + \omega\left(q + \frac{1}{2}\omega \cdot \frac{dq}{d\theta} + \frac{1}{6}\omega^2 \cdot \frac{ddq}{d\theta^2} + \text{etc.}\right) ,$$

atque in membro posteriore factorem ω in gradibus, alterum vero factorem uncinulis inclusum in partibus radii exprimi debere. Quo observato ab ipsa epocha per singulos gradus progrediamus, ac statum nostrae Lunae in sequenti tabula repraesentemus:

	$\omega = 1^\circ$	$\omega = 2^\circ$	$\omega = 3^\circ$	$\omega = 4^\circ$	$\omega = 5^\circ$
θ'	$1^\circ\,0'$	$2^\circ\,0'$	$3^\circ\,0'$	$4^\circ\,0'$	$5^\circ\,0'$
ϕ'	$2^\circ\,0'$	$4^\circ\,0'$	$6^\circ\,0'$	$7^\circ\,59'$	$9^\circ\,59'$
η'	$1^\circ\,0'$	$2^\circ\,0'$	$3^\circ\,0'$	$3^\circ\,59'$	$4^\circ\,59'$
v'	0,008000	0,008001	0,008002	0,008003	0,008004
p'	0,000020	0,000039	0,000059	0,000079	0,000098
q'	1,999457	1,997830	1,995117	1,991318	1,986435

Videtur igitur in hac epocha prima satis tuto ad tempus $\omega = 5^\circ$ progredi licere, neque a terminis neglectis, seu altioribus potestatibus ipsius ω ullum notabilem errorem esse metuendum; hanc ob rem, cum primam epocham ad tempus $\theta = 0$ constituerimus, sequentes epochas ad tempora $\theta = 5^\circ$, $\theta = 10^\circ$, etc. constituamus.

Epocha secunda

18. Secunda igitur epocha constituatur ad tempus $\theta = 5^\circ$, pro qua ergo elementa nostra erunt:

$$\begin{array}{r|r|r}
\theta = 5^\circ\,0' & v = 0{,}008004 & l\,v = 7{,}903322 \\
\phi = 9^\circ\,59' & p = 0{,}000098 & l\,p = 5{,}992000 \\
\eta = 4^\circ\,59' & q = 1{,}986435 & l\,q = 0{,}298074 \\
2\eta = 9^\circ\,57' & &
\end{array}$$

Nunc pro differentialibus primis dp et dq quaerantur sequentes valores:

$$\begin{array}{r|r}
qqv = 0{,}031584 & \frac{2pq}{v} = 0{,}048728 \\
\frac{m}{vv} = 0{,}046825 & \frac{3}{2}\sin 2\eta = 0{,}259306 \\
\frac{1}{2}v = 0{,}004002 & \frac{3}{2}v\cos 2\eta = 0{,}011826
\end{array}$$

unde colligitur fore

$$\frac{dp}{d\theta} = 0{,}000587 \quad \text{et} \quad \frac{dq}{d\theta} = -0{,}308035\,.$$

Pro differentialibus autem secundis quaeri oportet sequentes valores:

$$\begin{array}{r|r}
3pqq = 0{,}001162 & q(2qq+1) = 17{,}663078 \\
\dfrac{2mp}{v^3} = 0{,}001149 & \dfrac{2mq}{v^3} = 23{,}24118 \\
\dfrac{1}{2}p = 0{,}000049 & \dfrac{6ppq}{vv} = 0{,}001793 \\
\dfrac{3}{2}p\cos 2\eta = 0{,}000145 & \dfrac{3p\sin 2\eta}{v} = 0{,}006361 \\
6vq\sin 2\eta = 0{,}016492 & 3(2q-1)\cos 2\eta = 8{,}78434 \\
3v\sin 2\eta = 0{,}004151 &
\end{array}$$

unde colligitur

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = -0{,}012160 \quad \text{et} \quad \frac{ddq}{d\theta^2} = -3{,}198079\,.$$

Quodsi iam iterum successive pro ω scribamus 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, prodit sequens tabella:

	$\omega = 1^\circ$	$\omega = 2^\circ$	$\omega = 3^\circ$	$\omega = 4^\circ$	$\omega = 5^\circ$
ϕ'	$11^\circ\,58'$	$13^\circ\,56'$	$15^\circ\,54'$	$17^\circ\,52'$	$19^\circ\,49'$
θ'	$6^\circ\,0'$	$7^\circ\,0'$	$8^\circ\,0'$	$9^\circ\,0'$	$10^\circ\,0'$
η'	$5^\circ\,58'$	$6^\circ\,56'$	$7^\circ\,54'$	$8^\circ\,52'$	$9^\circ\,49'$
v'	0,008006	0,008008	0,008010	0,008012	0,008014
p'	0,000107	0,000111	0,000112	0,000110	0,000103
q'	1,980572	1,973734	1,965922	1,957137	1,947377

19. Si hos calculos attentius consideremus, deprehendimus valores ex formulis differentialibus secundis $\frac{ddp}{d\theta^2}$ et $\frac{ddq}{d\theta^2}$ oriundos tum demum notabiles evasisse,

ubi sumsimus $\omega = 5°$, quippe qui pro $\omega = 3°$ tam parvi prodierunt, ut tuto negligi potuerint. Quamobrem, si intervalla non ultra $\omega = 3°$ constituere velimus, formulas differentiales secundi gradus sine errore praetermittere licebit, unde totus calculus mirifice contrahetur. Nam quoniam investigatio istarum formularum haud parum prolixum calculum postulat, hoc modo labor magnopere sublevabitur; quamquam enim tum numerus epocharum multiplicari debet, tamen totum negotium multo minori opera confici poterit.

20. Quodsi ergo pro initio cuiuspiam epochae habeantur primo anguli θ et ϕ, unde prodit $\eta = \phi - \theta$, una cum quantitatibus v, p et q, inde statim colligantur valores[9]:

$$\frac{dp}{d\theta} = qqv - \frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1 + 3\cos 2\eta)$$

et

$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \frac{3}{2}\sin 2\eta\ ,$$

quibus inventis erit pro sequente epocha, ubi $\theta' = \theta + \omega$,

$$\begin{aligned}
&1^{\text{o}}.\quad \phi' = \phi + \omega\left(q + \frac{1}{2}\omega \cdot \frac{dq}{d\theta}\right),\\
&2^{\text{o}}.\quad v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \frac{dp}{d\theta}\ ,\\
&3^{\text{o}}.\quad p' = p + \omega\,\frac{dp}{d\theta}\ ,\\
&4^{\text{o}}.\quad q' = q + \omega\,\frac{dq}{d\theta}\ ,
\end{aligned}$$

unde si statim statuamus $\omega = 3°$, erit pro evolutione harum formularum:

$$l\,\omega = 8{,}718999 \quad \text{et} \quad l\,\omega^2 = 7{,}437997\ ,$$

unde calculum ut supra pro epocha sequente $\theta = 10°$ expediamus.

Epocha tertia, qua $\theta = 10°$

21. Hic ergo ex iam inventis erit:

$\phi = 19°\,49'$	$v = 0{,}008014$	$l\,v = 7{,}903835$
$\theta = 10°\,0'$	$p = 0{,}000103$	$l\,p = 6{,}013344$
$\eta = 9°\,49'$	$q = 1{,}947377$	$l\,q = 0{,}289450$
$2\eta = 19°\,39'$		

Hinc iam calculos in extenso hic apponamus:

9 Editio princeps: $\frac{dp}{dv}$ loco $\frac{dp}{d\theta}$.

Pro $\frac{dp}{d\theta}$	Pro $\frac{dq}{d\theta}$
$l\,qq = 0{,}578900$	$l\,p = 6{,}013344$
$l\,v = 7{,}903835$	$l\,q = 0{,}289450$
$l\,qqv = 8{,}499471$	$l\,pq = 6{,}302794$
I. $qqv = 0{,}031584$	$l\,v = 7{,}903835$
$l\,m = 4{,}477121$	$l\,\frac{pq}{v} = 8{,}386752$
$l\,vv = 5{,}807671$	$\frac{pq}{v} = 0{,}024364$
$l\,\frac{m}{vv} = 8{,}670476$	I. $\frac{2pq}{v} = 0{,}048728$
II. $\frac{m}{vv} = 0{,}046825$	II. $\frac{3}{2}\sin 2\eta = 0{,}504266$
III. $\frac{1}{2}v = 0{,}004002$	hinc $\frac{dq}{d\theta} = -0{,}554383$
$l\,\frac{3}{2} = 0{,}176091$	$l\,\frac{dq}{d\theta} = (-)9{,}743810$
$l\,v = 7{,}903835$	$l\,\omega = 8{,}718999$
$l\,\frac{3}{2}v = 8{,}079927$	$l\,\frac{\omega\,dq}{d\theta} = (-)8{,}462809$
$l\,\cos 2\eta = 9{,}973958$	ergo $\frac{\omega\,dq}{d\theta} = -0{,}029027$
$l\,\frac{3}{2}v\cos 2\eta = 8{,}053885$	
IV. $\frac{3}{2}v\cos 2\eta = 0{,}011321$	
Hinc sequitur	
$\frac{dp}{d\theta} = -0{,}000996$	
$l\,\frac{dp}{d\theta} = (-)6{,}998355$	
$l\,\omega = 8{,}718999$	
$l\,\omega^2 = 7{,}437997$	
$l\,\frac{\omega\,dp}{d\theta} = (-)5{,}717354$	
$l\,\frac{\omega^2\,dp}{d\theta} = (-)4{,}436352$	
ergo $\frac{\omega\,dp}{d\theta} = -0{,}0000522$	
$\frac{\omega^2\,dp}{d\theta} = -0{,}0000027$	

Cum nunc ob $\omega = 3^\circ$ sit $\phi' = 19^\circ\,49' + 3\Big(q + \frac{1}{2}\omega \cdot \frac{dq}{d\theta}\Big)$ erit $\phi' = 25^\circ\,37'$. Deinde reperitur $q' = 1{,}918349$. Praeterea erit $v' = 0{,}008018$ et $p' = 0{,}000051$.

Quocirca in fine huius epochae, pro quo est $\theta = 13^\circ$, reliqua elementa ita se habent:

$$\phi' = 25^\circ\,37'\,,\ p' = 0{,}000051\,,\ v' = 0{,}008018\,,\ q' = 1{,}918349\,.$$

Quarta epocha, ubi $\theta = 13^\circ$

22. Elementa pro initio huius epochae ita se habebunt:

$\phi = 25^\circ\,37'$	$v = 0{,}008018$	$l\,v = 7{,}904054$
$\theta = 13^\circ\,0'$	$p = 0{,}000051$	$l\,p = 5{,}707216$
$\eta = 12^\circ\,37'$	$q = 1{,}918349$	$l\,q = 0{,}282928$
$2\eta = 25^\circ\,14'$		

Hinc iam calculus, ut supra factum est, evolvatur, iterumque sumatur $\omega = 3°$, et valores pro fine huius epochae $\theta = 16°$ ita se habebunt:

$$\phi' = 31°\,19',\ p' = -0{,}000068,\ v' = 0{,}008017,\ q' = 1{,}883580\,.$$

Quinta epocha, ubi $\theta = 16°$

23. Elementa pro initio huius epochae sunt sequentia:

$\phi = 31°\,19'$	$v = 0{,}008017$	$l\,v = 7{,}904029$
$\theta = 16°\,0'$	$p = -0{,}000068$	$l\,p = (-)5{,}833280$
$\eta = 15°\,19'$	$q = 1{,}883580$	$l\,q = 0{,}274984$
$2\eta = 30°\,39'$		

Hinc iam pro fine huius epochae sequentes prodierunt valores:

$$\phi' = 36°\,55',\ p' = -0{,}000271',\ v' = 0{,}008008',\ q' = 1{,}845221\,.$$

Sexta epocha, ubi $\theta = 19°$

24. Elementa pro initio huius epochae ita se habebunt:

$\phi = 36°\,55'$	$v = 0{,}008008$	$l\,v = 7{,}903548$
$\theta = 19°\,0'$	$p = -0{,}000271$	$l\,p = (-)6{,}432848$
$\eta = 17°\,55'$	$q = 1{,}845221$	$l\,q = 0{,}266048$
$2\eta = 35°\,50'$		

Hinc iam pro fine huius epochae valores ita se habebunt:

$$\phi' = 42°\,24',\ p' = -0{,}000573,\ v' = 0{,}007986,\ q' = 1{,}805778\,,$$

hocque modo, quousque lubuerit, progredi licebit.

25. Quae hactenus computavimus, in sequenti tabella coniunctim repraesentemus, quo facilius progressio talis motus perspici queat, ubi distantiam Solis a Terra loco unitatis per 1000000 exprimemus.

θ	ϕ	η	v	p	q
$0°\,0'$	$0°\ \ 0'$	$0°\ \ 0'$	8000	0	2,000
$1°\,0'$	$2°\ \ 0'$	$1°\ \ 0'$	8000	20	1,999
$2°\,0'$	$4°\ \ 0'$	$2°\ \ 0'$	8001	39	1,998
$3°\,0'$	$6°\ \ 0'$	$3°\ \ 0'$	8002	59	1,995
$4°\,0'$	$7°\,59'$	$3°\,59'$	8003	79	1,991
$5°\,0'$	$9°\,59'$	$4°\,59'$	8004	98	1,986
$6°\,0'$	$11°\,58'$	$5°\,58'$	8006	107	1,981
$7°\,0'$	$13°\,56'$	$6°\,56'$	8008	111	1,974
$8°\,0'$	$15°\,54'$	$7°\,54'$	8010	112	1,966
$9°\,0'$	$17°\,52'$	$8°\,52'$	8012	110	1,957
$10°\,0'$	$19°\,49'$	$9°\,49'$	8014	102	1,947
$11°\,0'$	$21°\,46'$	$10°\,46'$	8015	86	1,938
$12°\,0'$	$23°\,42'$	$11°\,42'$	8017	68	1,928
$13°\,0'$	$25°\,37'$	$12°\,37'$	8018	51	1,918
$14°\,0'$	$27°\,32'$	$13°\,32'$	8018	11	1,908
$15°\,0'$	$29°\,26'$	$14°\,26'$	8018	−28	1,895
$16°\,0'$	$31°\,19'$	$15°\,19'$	8017	−68	1,884
$17°\,0'$	$33°\,12'$	$16°\,12'$	8016	−136	1,871
$18°\,0'$	$35°\ \ 4'$	$17°\ \ 4'$	8013	−203	1,858
$19°\,0'$	$36°\,55'$	$17°\,55'$	8008	−271	1,845
$20°\,0'$	$38°\,45'$	$18°\,45'$	8003	−372	1,832
$21°\,0'$	$40°\,35'$	$19°\,35'$	7995	−472	1,819
$22°\,0'$	$42°\,24'$	$20°\,24'$	7986	−573	1,806
$23°\,0'$	$44°\,12'$	$21°\,12'$	7975	−711	1,793
$24°\,0'$	$45°\,59'$	$21°\,59'$	7962	−850	1,781
$25°\,0'$	$47°\,45'$	$22°\,45'$	7945	−988	1,768
$26°\,0'$	$49°\,31'$	$23°\,31'$	7927	−1169	1,757
$27°\,0'$	$51°\,16'$	$24°\,16'$	7905	−1350	1,746
$28°\,0'$	$53°\ \ 1'$	$25°\ \ 1'$	7880	−1530	1,735
$29°\,0'$	$54°\,44'$	$25°\,44'$	7851	−1758	1,727
$30°\,0'$	$56°\,28'$	$26°\,28'$	7818	−1986	1,718

Hunc calculum tantum speciminis loco hic apposuimus. Optandum autem foret, ut quis laborem susciperet hanc seriem maiori cura multo longius usque ad integram revolutionem atque adeo duas pluresve prosequendi; tum enim facilius iudicari poterit, utrum certus ordo in progressione horum numerorum detegi queat, nec ne.

26. Quanquam in hoc exemplo distantia v ab initio crescere incepit, tamen mox maximum valorem assequitur, a quo deinceps iterum decrescit; sicque nullum est dubium, quin tale corpus totum suum motum intra sphaeram lunarem sit peracturum. Sin autem hoc corpus ab initio in I oblique fuisset proiectum, tum evidens est id mox e sphaera lunari egressurum et in regionem planetarum

primariorum transiturum fuisse; hoc igitur modo tandem ad tantam distantiam a Terra removebitur, ut ea non amplius respectu distantiae Solis tanquam infinite parva spectari queat, unde etiam eius distantia a Sole, quam posuimus $= u = (1 - 2v\cos 2\eta)$, non amplius per formulam $1 + v\cos\eta$ exprimi poterit, sed ad plures terminos progredi oportebit. Quin etiam fieri poterit, ut hoc corpus ad tantam distantiam a Terra recedat, ut ista formula non amplius per seriem convergentem exhiberi queat, sicque necesse erit ipsam litteram ω in calculo retinere, id quod semper continget, quando corpus motum suum extra sphaeram lunarem absolvit. Quemadmodum igitur his casibus motum prosequi conveniat, in sequenti problemate doceamus.

PROBLEMA

Si daretur corpus coeleste, quod non procul extra sphaeram lunarem fuisset proiectum, eius motum continuo prosequendo investigare.

SOLUTIO

27. Cum igitur tale corpus non amplius tanquam satelles Terrae considerari posset, eius motum potius ad Solem referri conveniet. Constituto (Fig. 2) igitur

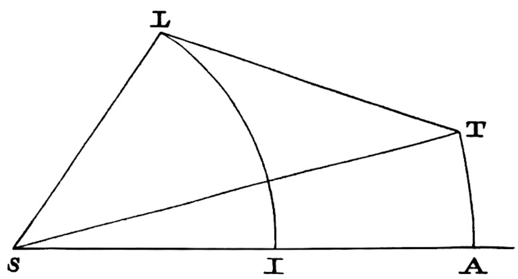


Fig. 2

centro Solis in puncto fixo S, assumamus iterum Terram circa Solem motu uniformi in circulo AT revolvi, cuius radium $SA = ST$ unitate designemus, atque hic iterum angulum $AST = \theta$, quem quovis tempore descripserit, ut ante pro mensura temporis accipiamus, maneatque pariter ut ante massa Solis $= 1$, cuius respectu vocetur massa Terrae $= m$, sicque hoc casu in formulis supra datis has duas massas 1 et m inter se permutari oportebit.

28. Ponamus nunc, dum Terra egrediebatur ex puncto A, corpus quodpiam coeleste in I fuisse quomodocunque proiectum, ita ut distantia SI non multo fuerit minor maiorve quam distantia $SA = 1$, ubi tamen assumimus distantiam AI maiorem fuisse radio sphaerae lunaris, quem censere possumus $= \frac{1}{100}$; tum vero, elapso tempore quo Terra angulum $TSA = \theta$ confecerit, istud corpus in ipso plano eclipticae pervenerit in L, voceturque nunc eius distantia a Sole $SL = v$ eiusque longitudo seu angulus $ASL = \phi$, sitque ut ante brevitatis gratia angulus $TSL = \phi - \theta = \eta$; at vero distantiam a Terra vocemus nunc $LT = u$, ita ut sit

$u = \surd(1 - 2v\cos\eta + vv)$, ubi cum distantia v non multum discrepet a distantia $= 1$, evolutio huius formulae in seriem non amplius locum habere poterit, quippe quae non amplius foret convergens. Quod quo clarius appareat, haec formula ita repraesentetur:

$$u = \surd(1 + vv)\sqrt{\left(1 - \frac{2v\cos\eta}{1 + vv}\right)},$$

ubi cum coefficiens $\frac{2v}{1+vv}$ non multum discrepet ab 1, notum est talem formulam $\surd(1 \pm n\cos\eta)$, in qua propemodum sit $n = 1$, nullo modo in eiusmodi seriem converti posse, quae pro omnibus angulis η convergat.

29. Quoniam igitur hic ipsam quantitatem u in calculo retinere coacti sumus, formulae § 7 pro motu determinando ad hunc casum accomodabuntur, si modo ambae massae 1 et m inter se permutentur. Hinc igitur binae aequationes motum quaesitum definientes ita se habebunt:

$$\text{I}^{\text{o}}. \quad \frac{(1+m)(ddv - v\,d\phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} - m\cos\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3}$$

$$\text{II}^{\text{o}}. \quad \frac{(1+m)(2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi)}{d\theta^2} = m\sin\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

ubi cum sit $m = \frac{3}{1000000}$, loco $1 + m$ tuto scribi poterit 1. Verum ut hae formulae etiam valere queant, si loco Terrae substituatur alius planeta primarius, veluti Jupiter, cuius massa multo est maior, retinebimus multiplicatorem $(1 + m)$. Calculus enim perpetuo eodem modo institui debebit pro quovis alio planeta loco Terrae assumto, si modo eius motum tanquam circularem et uniformem spectare velimus.

30. Quodsi iam motum corporis L per intervalla satis exigua, ut ante fecimus, prosequi velimus, pro eius loco quocunque L quantitates v et ϕ cum angulo θ pro cognitis habebimus, unde simul erit $\eta = \phi - \theta$. Praeterea vero, quia etiam motum corporis in L ut cognitum spectamus, statuamus ut ante $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\phi}{d\theta} = q$, unde erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, quibus positis ambae nostrae aequationes erunt:

$$\text{I}^{\text{o}}. \quad (1+m)\left(\frac{dp}{d\theta} - vqq\right) = -\frac{1}{vv} - m\cos\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3}$$

$$\text{II}^{\text{o}}. \quad (1+m)\left(2pq + \frac{v\,dq}{d\theta}\right) = m\sin\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

unde valores binarum formularum differentialium $\frac{dp}{d\theta}$ et $\frac{dq}{d\theta}$ definiri poterunt.

31. His autem valoribus inventis, quoniam praesens tempus per angulum θ exprimimus, postquam hinc elapsum fuerit tempus $= \omega$, pro tempore $\theta + \omega$ valores eorundem elementorum, quos per v', θ', ϕ', p' et q' designemus, sequenti

modo determinabuntur:

$$\theta' = \theta + \omega\ ,$$
$$\phi' = \phi + \omega q + \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \frac{dq}{d\theta}\ ,$$
$$\eta' = \phi' - \theta'\ .$$

Simili modo erit

$$v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \frac{dp}{d\theta}\ ,$$

ac denique etiam

$$p' = p + \frac{\omega\, dp}{d\theta} \quad \text{et} \quad q' = q + \frac{\omega\, dq}{d\theta}\ ,$$

si modo intervallum ω non nimis magnum accipiatur, cuius limitem quovis casu facile diiudicare licebit, quem ut vidimus plerumque usque ad 3° augere licebit. Imprimis autem hinc necesse erit valorem u' colligere, quippe qui sequente intervallo erit

$$u' = \surd(1 - 2v' \cos\eta' + v'v')\ ,$$

quibus observatis motum talis corporis quousque lubuerit prosequi licebit; calculus autem ob formulam irrationalem u aliquanto molestior evadet quam supra. Facile autem intelligitur hinc motus maxime intricatos resultare posse, quos nullo plane modo adhuc cognito saltem vero proxime ad ordinem quendam revocare licebit.

DE PERTURBATIONE MOTUS PLANETARUM ET COMETARUM

Commentatio 578 indicis Enestroemiani
Acta academiae scientiarum Petropolitanae [5:I], (1781:I), 1784, p. 297–340
(Kommentar zu E 578)

PRAENOTANDA

1. *Vis acceleratrix*, qua corpus coeleste, cuius massa $= M$, aliud corpus ad distantiam $= v$ remotum, ad se attrahit, tali formula $\frac{M}{vv}$ exprimi solet, quandoquidem omnia corpora coelestia in ratione composita ex directa massarum et reciproca duplicata distantiarum agere observantur. Ut nunc hanc formulam ad mensuras determinatas atque adeo valores numericos revocemus, in sequentibus perpetuo massam Solis unitate designabimus. Deinde vero distantia media Terrae a Sole pariter unitate definiatur. Hoc enim modo formula $\frac{M}{vv}$ omnibus casibus certo numero repraesentabitur.

2. Quod deinde ad *mensuram temporis* attinet, eam quoque ex motu Terrae medio ita perpetuo exhibebimus, ut omnia tempora per angulos, quos Terra interea secundum motum medium circa Solem describit, exprimamus. Ita mensura unius diei nobis erit angulus $= 59' \, 8''$; integri autem anni tropici mensura erit $360°$.

3. His mensuris stabilitis, si corpus quodpiam coeleste quiescens aliud corpus secundum lineam rectam ad se attrahat, eiusque distantia quodam tempore indefinito, quod sit $= \theta$, ponatur $= v$, eius motus hac aequatione differentio-differentiali determinabitur:

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -\frac{M}{vv} \,,$$

ubi elementum temporis $d\theta$ constans est assumtum.

4. Quoniam hic de perturbationibus motus tam planetarum quam cometarum potissimum erit sermo, vis principalis, qua haec corpora sollicitantur, erit ea, qua a Sole attrahuntur; unde si talis corporis a Sole distantia fuerit $= v$, ista vis erit $= \frac{1}{vv}$. Reliquas autem vires omnes, quibus haec corpora forte urgentur, nomine *virium perturbatricium* denotabimus, quas plerumque tanquam valde parvas respectu vis ad Solem tendentis spectare licebit, quandoquidem, si maiores essent, nulla adhuc methodus est inventa tales motus ad calculum revocandi.

5. Quia porro loca talium corporum ad quodvis tempus respectu Solis definiri debent, ipsum Solem in perpetua quiete considerari convenit; quamobrem

secundum principia mechanica omnes vires acceleratrices, quae in Solem agunt, secundum directiones contrarias in ipsum corpus, cuius motus quaeritur, transferri oportet, quibus hoc corpus perinde sollicitari erit censendum, atque ab illis viribus, quarum actioni immediate subiicitur.

6. Cum igitur (Fig. 1) centrum Solis tanquam punctum fixum in coelo simus contemplaturi, quod sit in O, per id ternos axes fixos OA, OB, OC ductos

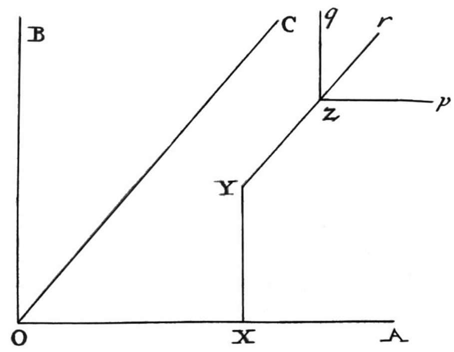


Fig. 1

concipiamus, qui inter se sint normales. Iis igitur tria plana principalia determinabuntur, scilicet AOB, AOC, BOC, pariter inter se normalia; quorum primum AOB planum nobis eclipticae repraesentet, quandoquidem omnia loca tam planetarum quam cometarum ad eclipticam referre solemus.

7. Iam postquam a certa epocha elapsum fuerit tempus $= \theta$, modo supra assignato exprimendum, reperiatur planeta sive cometa, cuius motus quaeritur, in loco quocunque Z; hincque primo ad planum AOB demittatur perpendiculum ZY; tum vero ex Y ad axem OA agatur normalis YX, ita ut locus Z determinetur per ternas coordinatas tribus axibus modo stabilitis parallelas, quas vocemus $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$. Praeterea vero quoque ducamus ad centrum Solis rectam ZO, quae vocetur $= v$, ita ut sit $vv = xx + yy + zz$. Quodsi porro spatiolum tempusculo $d\theta$ percursum brevitatis gratia vocetur $= ds$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

8. A quibuscunque nunc viribus acceleratricibus corpus in loco Z sollicitetur, cum iis primo coniungantur secundum directiones contrarias omnes vires ipsum Solem sollicitantes; tum vero omnes istae vires resolvantur secundum ternas illas directiones ZP, ZQ et ZR ipsis axibus OA, OB, OC parallelas, easque hoc modo denominemus: vim $ZP = p$, vim $ZQ = q$ et vim $ZR = r$; quae ergo litterae p, q, r omnes exhibent vires perturbatrices nostrum corpus sollicitantes, dum vis principalis ad Solem directa secundum ZO est $= \frac{1}{vv}$.

9. Iam quicunque fuerit corporis motus, is pariter more solito secundum ternas directiones ZP, ZQ et ZR resolvatur. Deinde vero etiam ipsa vis Solis

secundum easdem directiones resoluta dabit:

$$\text{vim secundum } PZ = \frac{x}{v^3}\,,$$
$$\text{vim secundum } QZ = \frac{y}{v^3}\,,$$
$$\text{vim secundum } RZ = \frac{z}{v^3}\,.$$

Hinc si triplex corporis motus secundum praecepta mechanica tractetur, inde tres sequentes aequationes differentiales secundi gradus nascentur:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{x}{v^3} + p\,,$$
$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{y}{v^3} + q\,,$$
$$\text{III.}\quad \frac{ddz}{d\theta^2} = -\frac{z}{v^3} + r\,,$$

ex quibus aequationibus totus corporis motus debet determinari.

Evolutio trium aequationum inventarum

10. Cum istae aequationes sint differentiales secundi gradus, ante omnia in id est incumbendum, ut ex iis per integrationem aequationes differentiales primi gradus derivemus, in quo quidem negotio ad quantitates p, q, r respici nequit, quibus igitur signum integrationis praefigemus, easdemque operationes instituemus, quasi hae quantitates plane abessent. Statim autem ob elementum $d\theta$ constans istae tres combinationes[1]:

$$\mathrm{II}\cdot x - \mathrm{I}\cdot y\,, \quad \mathrm{III}\cdot y - \mathrm{II}\cdot z\,, \quad \mathrm{I}\cdot z - \mathrm{III}\cdot x\,,$$

nobis praebebunt sequentes aequationes integrabiles:

$$1.\quad \frac{x\,ddy - y\,ddx}{d\theta^2} = qx - py\,,$$
$$2.\quad \frac{y\,ddz - z\,ddy}{d\theta^2} = ry - qz\,,$$
$$3.\quad \frac{z\,ddx - x\,ddz}{d\theta^2} = pz - rx\,.$$

11. Quanquam autem hoc modo tres novas nacti sumus aequationes; tamen eae inter se ita cohaerent, ut binae quaevis tertiam in se involvant. Si enim earum prima ducatur in z, secunda vero in x, producta in unam summam collecta dabunt hanc aequationem:

$$\frac{xy\,ddz - zy\,ddx}{d\theta^2} = y(rx - pz)\,,$$

1 Editio princeps: $\mathrm{III}\cdot y - \mathrm{II}\cdot x$ loco $\mathrm{III}\cdot y - \mathrm{II}\cdot z$.

quae per $-y$ divisa ipsam tertiam aequationem manifesto producit, ita ut, uti iam annotavimus, quaelibet in binis reliquis iam contineatur; unde etiam hae tres aequationes duas tantum determinationes suppeditabunt.

12. Ante autem quam has aequationes integremus, plurimum intererit observare formulas $qx-py$, $ry-qz$, $pz-rx$ certa momenta virium p, q, r exprimere. In prima enim eorum productum qx exprimit momentum vis q respectu axis[2] Z in sensum AB; alterum vero productum py momentum vis p respectu eiusdem axis Z, at in sensum contrarium BA. Quare cum tertia vis r huic axi Z sit parallela, ab ea nullum momentum respectu istius axis oritur; unde momentum ab omnibus istis viribus, axis X respectu, in sensum AB tendens erit $qx-py$. Simili modo ab iisdem viribus nascetur momentum respectu axis OA, in sensum $BC = ry - qz$. Ac denique momentum ab iisdem viribus ortum respectu axis OB in sensum CA erit $= pz - rx$.

13. Quoniam haec momenta maxime sunt notatu digna, ea merentur in calculum introduci. Designemus igitur ea litteris maiusculis C, A, B, quae ab axibus ipsis, ad quos referuntur, sunt desumta; ideoque ponamus $qx - py = C$, $ry - qz = A$, $pz - rx = B$, ubi cavendum erit, ne istae litterae pro constantibus habeantur. Hinc igitur ternae aequationes integrandae erunt:

$$1. \quad \frac{x\,ddy - y\,ddx}{d\theta^2} = C\,,$$
$$2. \quad \frac{y\,ddz - z\,ddy}{d\theta^2} = A\,,$$
$$3. \quad \frac{z\,ddx - x\,ddz}{d\theta^2} = B\,,$$

quae ductae in $d\theta$ et integratae dabunt:

$$1. \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{d\theta} = \int C\,d\theta\,,$$
$$2. \quad \frac{y\,dz - z\,dy}{d\theta} = \int A\,d\theta\,,$$
$$3. \quad \frac{z\,dx - x\,dz}{d\theta} = \int B\,d\theta\,,$$

ubi vero etiam probe tenendum est binas harum aequationum iam tertiam involvere. At vero sequens combinatio[3]

$$1. \cdot z + 2. \cdot x + 3. \cdot y$$

praebet

$$0 = z\int C\,d\theta + x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta\,,$$

2 Editio princeps: axis X.

3 Editio princeps: $\mathrm{I} \cdot x + \mathrm{II} \cdot y + \mathrm{III} \cdot z$.

quae aequatio quidem pro identica est habenda; interim tamen egregiam proprietatem nobis cognoscendam praebet, praecipue si cum ea combinetur, qua modo ante vidimus esse $Cz + Ax + By = 0$, quae revera est identica.

14. Antequam ulterius progrediamur, consideremus casum, quo vires perturbatrices evanescunt et formulae integrales in quantitates constantes abeunt, quae sint secundum ordinem $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, ex quibus valoribus ultima aequatio nobis praebebit $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$; quae aequatio nobis statim indicat totam orbitam a corpore Z descriptam ita per ternas coordinatas x, y, z definiri, ut perpetuo sit $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$; quae aequatio est pro superficie plana, ita ut iam certi simus hoc casu corpus totum suum motum in eodem plano fore absoluturum. Unde iam intelligere licet, quomodo motus corporis ob vires perturbatrices a plano discrepare queat.

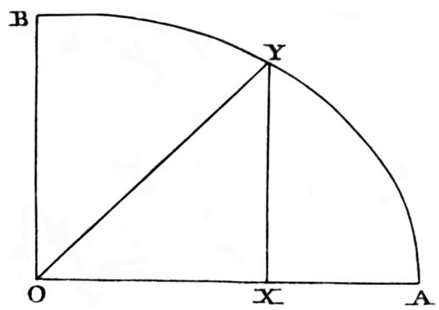
15. Porro vero etiam formulae differentiales per integrationem inventae, scilicet:

$$x\,dy - y\,dx\,, \quad y\,dz - z\,dy\,, \quad z\,dx - x\,dz\,,$$

peculiari attentione sunt digna, cum referantur ad proiectiones orbitae descriptae in terna plana principalia factas. Si enim orbita in planum AOB proiiciatur, pro qua x et y erunt binae coordinatae, tum elementum areae circa punctum O descriptae erit $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$, in sensum AB. Simili modo $\frac{1}{2}(y\,dz - z\,dy)$ erit elementum proiectionis in planum BOC factae, idque in sensum BC. Denique $\frac{1}{2}(z\,dx - x\,dz)$ erit elementum areae proiectionis in planum COA facta, idque in sensum CA. Unde patet, quam egregie descriptio harum arearum a momentis virium respectu axium respondentium pendeat. Si enim vires p, q, r evanescerent, haec arearum elementa tempusculo $d\theta$ forent proportionalia, uti ex primis elementis iam constat. Quatenus igitur vires perturbatrices adsunt, eatenus descriptio arearum non amplius erit tempori proportionalis.

16. Quo iste pulcherrimus nexus inter descriptiones arearum et momenta virium clarius perspiciatur, sit (Fig. 2) AYB proiectio orbitae a corpore Z descriptae in planum AOB facta, in qua punctum Y respondet loco corporis Z, pro quo erunt coordinatae $OX = x$, $XY = y$. Iam ducta recta OY sector AOY exhibebit aream in hac proiectione descriptam, quam ergo vocemus $= S$; quae, quia constat ex triangulo OXY et area AXY, vocemus $AX = t$, ut obtineatur

Fig. 2



ista area $AXY = \int y\,dt$, eritque

$$S = \frac{1}{2}xy + \int y\,dt\,,$$

unde differentiando, ob $x + t = OA$ ideoque constans, erit $dt = -dx$; hincque colligitur elementum areae $dS = \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx$, unde patet fore $x\,dy - y\,dx = 2\,dS$.

17. Pro hac igitur proiectione habebimus

$$\frac{2\,dS}{d\theta} = \int C\,d\theta\,,$$

ubi C denotat momentum virium sollicitantium respectu axis OC plano AOB perpendiculariter insistentis, ideoque formula integralis $\int C\,d\theta$ summam omnium horum momentorum per tempus θ collectorum denotabit; at formula $\frac{dS}{d\theta}$ repraesentabit celeritatem, qua area S describitur, unde eius differentiale per $d\theta$ divisum dabit accelerationem, quae ergo erit $\frac{ddS}{d\theta^2} = \frac{1}{2}C$. Sicque intelligitur accelerationem motus, quo area S describitur, ipsi momento virium C esse proportionalem. Quamdiu ergo hoc momentum C positivum tenet valorem, celeritas descriptionis continuo crescit; contra autem, quando momentum fit negativum, iterum decrescit. Haec etiam sunt intelligenda de binis reliquis proiectionibus.

Ulterior evolutio formularum integralium modo inventarum

18. Cum igitur deducti simus ad istas aequationes:

$$1.\quad \frac{x\,dy - y\,dx}{d\theta} = \int C\,d\theta\,,$$

$$2.\quad \frac{y\,dz - z\,dy}{d\theta} = \int A\,d\theta\,,$$

$$3.\quad \frac{z\,dx - x\,dz}{d\theta} = \int B\,d\theta\,,$$

existente $C = qx - py$, $A = ry - qz$, $B = pz - rx$, ideoque $Cz + Ax + By = 0$, vidimus praeterea semper fore

$$z\int C\,d\theta + x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta = 0\,,$$

qua aequatione utique certa relatio inter coordinatas x, y, z et elementum temporis $d\theta$ involvitur; eius vero differentiale, ob $Cz + Ax + By = 0$, nobis hanc novam relationem suppeditat:

$$dz\int C\,d\theta + dx\int A\,d\theta + dy\int B\,d\theta = 0\,,$$

quae pariter omni attentione est digna.

19. Quoniam tres aequationes inventae ad ternos nostros axes principales, sive potius ad terna plana principalia referuntur, sequenti modo ex iis formari poterit nova aequatio, in qua ad distinctionem horum planorum plane non respicitur; ita scilicet ut ternae coordinatae x, y, z penitus ex calculo elidantur, earumque loco sola distantia $OZ = v$ cum elemento curvae descriptae, quod vocavimus

$$ds = \surd(dx^2 + dy^2 + dz^2) \; ,$$

in calculo relinquatur. Obtinebitur hoc, si quadrata trium aequationum invicem addantur; quod quo facilius fieri poterit, ponamus brevitatis gratia

$$\int A\,d\theta = P \; , \quad \int B\,d\theta = Q \; , \quad \int C\,d\theta = R \; ,$$

et aequatio resultans erit

$$(x\,dy - y\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 = d\theta^2(P^2 + Q^2 + R^2) \; .$$

20. Quodsi nunc ista aequatio evolvatur, ob $xx + yy + zz = vv$ fit

$$xx + yy = vv - zz \; , \quad xx + zz = vv - yy \quad \text{et} \quad yy + zz = vv - xx \; ,$$

et hinc pervenietur ad istam aequationem:

$$vv(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = d\theta^2(P^2 + Q^2 + R^2) \; ,$$

ubi cum sit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \quad \text{et} \quad x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv \; ,$$

aequatio inventa hanc induet formam:

$$vv\,ds^2 - vv\,dv^2 = d\theta^2(P^2 + Q^2 + R^2) \; .$$

21. Quo indolem huius aequationis penitius perspiciamus, consideremus (Fig. 3) elementum a corpore tempusculo $d\theta$ descriptum, quod sit $Zz = ds$;

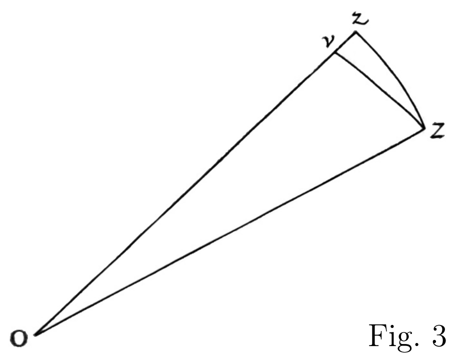


Fig. 3

unde ductis ad Solem rectis ZO et zO erit $OZ = v$ et $Oz = v + dv$. Hinc centro O ducto arculo Zv, ut sit $vz = dv$, erit utique $Zv^2 = ds^2 - dv^2$, hincque aequatio inventa erit

$$vv \cdot Zv^2 = d\theta^2(P^2 + Q^2 + R^2)\ .$$

Vocemus nunc angulum elementarem $ZOz = d\phi$, ita ut $d\phi$ denotet angulum a corpore Z tempusculo $d\theta$ circa Solem descriptum, quod est elementum in Astronomia maximi momenti, eritque $Zv = v\,d\phi$, unde nostra aequatio erit

$$v^4\,d\phi^2 = d\theta^2(P^2 + Q^2 + R^2)\ ,$$

at extracta radice

$$vv\,d\phi = d\theta\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}\ .$$

22. Evidens autem est hanc formulam $vv\,d\phi$ exprimere duplam aream sectoris elementaris ZOz, quae ergo, si ponatur $= dS$, habebitur elementum areae, quod corpus motu vero circa Solem tempusculo $d\theta$ describit, ita ut sit

$$2\,dS = d\theta\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}\ ;$$

quae aequatio si comparetur cum descriptione arearum in proiectionibus supra explicata, facile intelligitur, si momentum virium sollicitantium respectu axis ad planum ZOz perpendicularis ponatur $= M$, esse debere $2\,dS = \int M\,d\theta$, unde tuto concludimus fore

$$\int M\,d\theta = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}\ ,$$

cuius rei veritas infra clarius ostendetur. Aequatio ergo hinc eruta erit

$$vv\,d\phi = d\theta\int M\,d\theta\ .$$

23. Ad hoc autem utile erit relationem inter momenta virium A, B, C, ipsasque vires accuratius examinare; et quoniam, si momenta ut cognita spectare velimus, ex tribus aequationibus

$$A = ry - qz\ , \quad B = pz - rx \quad \text{et} \quad C = qx - py\ ,$$

ipsas vires p, q, r definire non licet, in subsidium vocemus novam quandam aequationem, quae sit

$$px + qy + rz = kv\ ,$$

ita ut $k = \frac{px + qy + rz}{v}$ exprimat vim ex viribus p, q, r secundum directionem Oz resultantem; unde cum ex priori superiorum aequationum sit $r = \frac{pz - B}{x}$, ex tertia vero $q = \frac{py + C}{x}$, hi valores in nova aequatione substituti praebent

$$p = \frac{kvx + Bz - Cy}{xx + yy + zz}\,, \quad \text{sive} \quad p = \frac{kvx + Bz - Cy}{vv}\,.$$

Hincque porro colligetur:

$$q = \frac{kvy + Cx - Az}{vv} \quad \text{et} \quad r = \frac{kvz + Ay - Bx}{vv}\,.$$

24. His valoribus inventis contemplemur etiam vim resultantem pro ipsa directione motus, quae vocari solet vis tangentialis. Sit igitur ea $= t$, eritque

$$t = \frac{p\,dx + q\,dy + r\,dz}{ds}\,,$$

ubi valores modo inventi, si substituantur, praebent

$$vvt\,ds = kv(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx)\,.$$

Cum nunc sit

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv\,,$$

tum vero

$$y\,dz - z\,dy = d\theta \int A\,d\theta\,,$$

$$z\,dx - x\,dz = d\theta \int B\,d\theta\,,$$

$$x\,dy - y\,dx = d\theta \int C\,d\theta\,,$$

his substitutis erit

$$vvt\,ds = kvv\,dv + A\,d\theta \int A\,d\theta + B\,d\theta \int B\,d\theta + C\,d\theta \int C\,d\theta\,,$$

ideoque

$$t\,ds = k\,dv + \frac{A\,d\theta \int A\,d\theta + B\,d\theta \int B\,d\theta + C\,d\theta \int C\,d\theta}{vv}\,.$$

25. Cum igitur supra posuerimus $\int A\,d\theta = P$, $\int B\,d\theta = Q$, $\int C\,d\theta = R$, his valoribus introductis habebimus

$$t\,ds = k\,dv + \frac{P\,dP + Q\,dQ + R\,dR}{vv}\,,$$

ita ut hinc sit

$$P\,dP + Q\,dQ + R\,dR = vvt\,ds - kvv\,dv\ ,$$

unde integrando colligitur

$$PP + QQ + RR = 2\int vv(t\,ds - k\,dv)\ .$$

Quae ergo supra de hac formula $PP + QQ + RR$ annotavimus, ubi littera M designavit momentum virium respectu axis ad orbitam normalis, nunc eo redeunt, ut sit

$$\left(\int M\,d\theta\right)^2 = 2\int vv(t\,ds - k\,dv)\ ,$$

unde differentiando discimus esse

$$M\,d\theta\int M\,d\theta = vv(t\,ds - k\,dv)\ ,$$

unde patet, quomodo istud momentum M tam a vi tangentiali t quam a vi centrali, sive ad O directa, quae erat $= k$, pendeat.

Investigatio aliarum aequationum integralium

26. Cum motus corporis quaesitus determinetur tribus aequationibus, integralia autem, quae hactenus invenimus, duas tantum determinationes complectantur, omnino necesse est, ut insuper una aequatio integralis ex ternis aequationibus initialibus eruatur. Talem autem nobis suppeditabit ista combinatio:

$$\mathrm{I}\cdot 2\,dx + \mathrm{II}\cdot 2\,dy + \mathrm{III}\cdot 2\,dz\ ,$$

sic enim prodibit

$$\frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy + 2\,dz\,ddz}{d\theta^2} = \frac{-2x\,dx - 2y\,dy - 2z\,dz}{v^3} + 2p\,dx + 2q\,dy + 2r\,dz\ ,$$

ubi cum sit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

et

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv\ ,$$

per integrationem impetrabimus hanc aequationem:

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = +\frac{2}{v} + 2\int(p\,dx + q\,dy + r\,dz)\ ,$$

ubi signum summationis iam constantem per integrationem ingressam involvit.

27. Modo ante autem vidimus, si vis tangentialis, secundum directionem motus Zz sollicitans, vocetur $= t$, fore $t\,ds = p\,dx + q\,dy + r\,dz$. Ex hac igitur vi tangentiali habebimus:

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int t\,ds\ ,$$

ubi $\frac{ds^2}{d\theta^2}$ exprimit quadratum celeritatis, qua corpus Z hoc tempore movetur. Hinc autem loco ipsius elementi ds introducamus potius angulum elementarem $d\phi$, per quem corpus interea circa Solem progreditur, et, quemadmodum iam supra vidimus, erit $ds^2 = dv^2 + vv\,d\phi^2$, quo valore substituto nostra aequatio fiet:

$$\frac{dv^2 + vv\,d\phi^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int t\,ds\ .$$

Haec itaque est tertia aequatio integralis, quae cum praecedentibus coniuncta universam problematis solutionem contineri est censenda.

28. Quodsi hanc aequationem cum ea, quam in articulo praecedente ultimo loco invenimus, qua erat $vv\,d\phi = d\theta \int M\,d\theta$, existente

$$\int M\,d\theta = \sqrt{2}\int vv(t\,ds - k\,dv)\ ,$$

coniungamus, duas habebimus aequationes inter ternas variabiles v, θ et ϕ, unde per quamlibet binas reliquas definire licebit. Si enim brevitatis gratia ponamus

$$vv\,d\phi = S\,d\theta$$

et

$$dv^2 + vv\,d\phi^2 = \frac{2\,d\theta^2}{v} + T\,d\theta^2\ ,$$

ita ut sit

$$S = \int M\,d\theta \quad \text{et} \quad T = 2\int t\,ds\ ,$$

ex priore habebimus $d\phi = \frac{S\,d\theta}{vv}$, qui valor in altera substitutus dat[4]

$$dv^2 + \frac{SS\,d\theta^2}{vv} = \frac{2\,d\theta^2}{v} + T\,d\theta^2\ ,$$

unde deducitur

$$d\theta = \frac{v\,dv}{\sqrt{(2v + Tvv - SS)}}\ ,$$

4 Editio princeps: $3\,d\theta^2$ loco $2\,d\theta^2$.

hincque

$$d\phi = \frac{S\,dv}{v\surd(2v + Tvv - SS)} \ .$$

29. Possumus autem insuper aliam aequationem integralem elicere, ope combinationis $\mathrm{I}\cdot x + \mathrm{II}\cdot y + \mathrm{III}\cdot z$, quippe quae dat

$$\frac{x\,ddx + y\,ddy + z\,ddz}{d\theta^2} = -\frac{1}{v} + px + qy + rz = -\frac{1}{v} + kv \ .$$

Huic addamus aequationem modo inventam (vide § 26), quae erat

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \frac{2}{v} + 2\int t\,ds \ ,$$

ac manifestum est prodituram esse hanc aequationem:

$$\frac{d\cdot(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{d\theta^2} = \frac{d\cdot v\,dv}{d\theta^2} = \frac{1}{v} + kv + 2\int t\,ds \ ,$$

quae aequatio tantum continet variabiles t et θ, et denuo integrabilis redditur multiplicando per $2v\,dv$, integrale enim erit:

$$\frac{vv\,dv^2}{d\theta^2} = 2v + 2\int kvv\,dv + 4\int v\,dv \int t\,ds \ ,$$

hincque elicitur

$$d\theta = \frac{v\,dv}{\surd(2v + 2\int kvv\,dv + 4\int v\,dv \ \int t\,ds)} \ ,$$

quae ergo formula cum superiore (§ 28) inventa congruere debet. Comparatione autem facta erit

$$Tvv - SS = 2\int kvv\,dv + 4\int v\,dv \int t\,ds \ ,$$

ubi, si differentietur et loco T et dT valor ante assumtus scribatur, prodibit

$$2kvv\,dv = 2vvt\,ds - d\cdot SS \ .$$

Vidimus autem esse

$$SS = \left(\int M\,d\theta\right)^2 = 2\int vv(t\,ds - k\,dv) \ ,$$

ideoque

$$d\cdot SS = 2vvt\,ds - 2kvv\,dv \ ,$$

quo substituto aequatio manifesto prodit identica.

Investigatio lineae nodorum et inclinationis orbitae ad eclipticam

30. Iam initio observavimus, si vires p, q, r evanescerent, tum totam corporis orbitam sitam fore in eodem plano. Ob actionem autem harum virium fieri poterit, ut orbita non amplius reperiatur in eodem plano, cuius variatio commodissime repraesentari solet tam per lineae nodorum quam inclinationis orbitae ad eclipticam positionem. Si enim haec duo elementa ad quodvis tempus assignari queant, perfectam notitiam habemus super continua orbitae variatione.

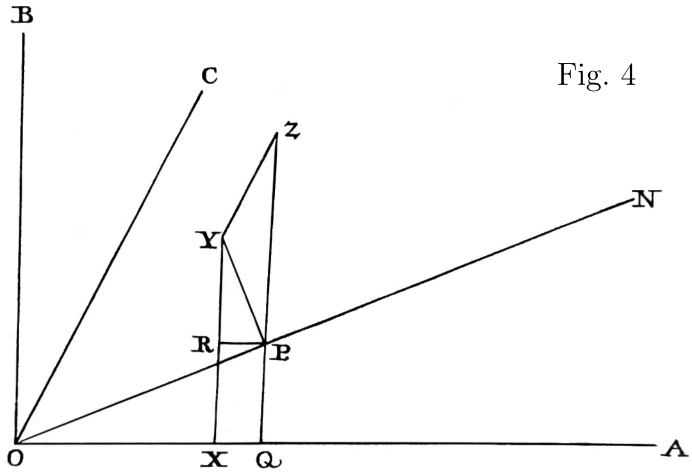


Fig. 4

31. Cum igitur (Fig. 4) Planeta vel Cometa nunc in Z reperiatur, et temporis elemento $d\theta$ percurrat elementum suae orbitae Zz, concipiatur planum, quod per puncta Z, z et O transeat, quandoquidem corpus interea in hoc plano movebitur. Sit igitur recta ON intersectio istius plani cum plano eclipticae AOB, quae recta vocari solet linea nodorum, pro cuius praesenti positione vocemus angulum $AON = \zeta$; praeterea vero vocetur inclinatio huius plani ad eclipticam $= \eta$, et statuatur angulus $NOZ = \psi$, qui vulgo vocari solet argumentum latitudinis; angulus vero elementaris ZOz maneat ut hactenus posuimus $= d\phi$, ita ut, si linea nodorum ON quiesceret, utique foret $d\phi = d\psi$. Quatenus autem haec linea ipsa movetur, haec aequalitas non amplius locum habet.

32. Ducatur nunc ex puncto Y ad lineam nodorum ON perpendiculum YP, iunctaque recta PZ angulus ZPY ipsi inclinationi orbitae est aequalis, ideoque $= \eta$. Cum iam in triangulo POZ habeatur latus $OZ = v$ cum angulo $NOZ = \psi$, erunt rectae

$$PZ = v \sin\psi \quad \text{et} \quad OP = v\cos\psi\,.$$

Dein vero ex triangulo ZPY nanciscimur

$$ZY = v\sin\eta\sin\psi \quad \text{et} \quad PY = v\cos\eta\sin\psi\,.$$

Porro ex P tam ad OA quam XY agantur normales PQ et PR, atque ex triangulo OPQ, ubi $OP = v\cos\psi$ et angulus $POQ = \zeta$, erit

$$PQ = v\cos\psi\sin\zeta \quad \text{et} \quad OQ = v\cos\psi\cos\zeta\,.$$

Denique in triangulo PYR datur latus $PY = v\sin\psi\cos\eta$ cum angulo $PYR = \zeta$, unde concluditur

$$PR = v\sin\psi\cos\eta\sin\zeta \quad \text{et} \quad YR = v\sin\psi\cos\eta\cos\zeta\ .$$

Ex his igitur elementis derivamus binas reliquas coordinatas X et Y: erit enim

$$\begin{aligned} OX = x = OQ - PR &= v\cos\psi\cos\zeta - v\sin\psi\cos\eta\sin\zeta \\ XY = y = PQ + YR &= v\cos\psi\sin\zeta + v\sin\psi\cos\eta\cos\zeta\ ; \end{aligned}$$

modo autem vidimus esse

$$YZ = z = v\sin\psi\sin\eta\ .$$

33. Cum punctum orbitae proximum z tam in praesenti plano NOZ quam in sequente reperiatur, ubi anguli ζ et η incrementa ceperunt $d\zeta$ et $d\eta$, duplici modo a Z ad z perveniri poterit. Priore scilicet modo eo pervenitur, dum linea nodorum cum inclinatione tanquam invariabilis accipitur, angulus autem $NOZ = \psi$ incrementum capere statuitur angulum $ZOz = d\psi$. Altero vero modo ad idem punctum z pervenietur, dum tam lineae nodorum quam inclinationi suae variatio tribuitur, ac praeterea angulus ψ differentiali suo naturali augetur. Quodsi igitur formulas pro x, y, z inventas hoc duplici modo differentiemus, ex utroque eosdem valores pro dx, dy et dz resultare necesse est.

34. Non solum autem ista convenientia ipsas coordinatas spectat, sed etiam quascunque formulas ex iis compositas; quo notato, ut rem ad nostras formulas integrales primo inventas accommodemus, consideremus has duas formulas $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, quarum formularum valores erunt

$$\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{\cot\psi\cos\zeta}{\sin\eta} - \cot\eta\sin\zeta\ , \\ \frac{y}{z} &= \frac{\cot\psi\sin\zeta}{\sin\eta} + \cot\eta\cos\zeta\ . \end{aligned}$$

Has iam formulas primo priori modo differentiemus, statuendo angulos ζ et η constantes, ac ponendo $d\psi = d\phi$, reperieturque

$$d\cdot\frac{x}{z} = -\frac{d\phi\cos\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2} \quad \text{et} \quad d\cdot\frac{y}{z} = -\frac{d\phi\sin\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ .$$

35. Eaedem autem formulae more solito differentiatae, sumendis omnibus quantitatibus variabilibus, praebent has aequationes:

$$\begin{aligned} d\cdot\frac{x}{z} = &-\frac{d\psi\cos\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}-\frac{d\zeta\sin\zeta\cot\psi}{\sin\eta}-d\zeta\cos\zeta\cot\eta\\ &-\frac{d\eta\cos\eta\cot\psi\cos\zeta}{\sin\eta^2}+\frac{d\eta\sin\zeta}{\sin\eta^2}\\ d\cdot\frac{y}{z} = &-\frac{d\psi\sin\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}+\frac{d\zeta\cos\zeta\cot\psi}{\sin\eta}-d\zeta\sin\zeta\cot\eta\\ &-\frac{d\eta\cos\eta\cot\psi\sin\zeta}{\sin\eta^2}-\frac{d\eta\cos\zeta}{\sin\eta^2}\ . \end{aligned}$$

His igitur binis valoribus inter se aequatis nanciscemur has duas aequationes differentiales:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad \frac{(d\psi-d\phi)\cos\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2} = &-\frac{d\zeta\sin\zeta\cot\psi}{\sin\eta}-d\zeta\cos\zeta\cot\eta\\ &-\frac{d\eta\cos\eta\cot\psi\cos\zeta}{\sin\eta^2}+\frac{d\eta\sin\zeta}{\sin\eta^2}\ ,\\ \text{II.}\quad \frac{(d\psi-d\phi)\sin\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2} = &+\frac{d\zeta\cos\zeta\cot\psi}{\sin\eta}-d\zeta\sin\zeta\cot\eta\\ &-\frac{d\eta\cos\eta\cot\psi\sin\zeta}{\sin\eta^2}-\frac{d\eta\cos\zeta}{\sin\eta^2}\ . \end{aligned}$$

36. Nunc ut elementa $d\phi$ et $d\psi$ eliminemus, utamur hac combinatione:

$$\text{I}\cdot\sin\zeta-\text{II}\cdot\cos\zeta\ ,$$

quae perducet ad hanc aequationem:

$$0=-\frac{d\zeta\cot\psi}{\sin\eta}+\frac{d\eta}{\sin\eta^2}\ ,$$

quae reducta dat

$$d\eta=d\zeta\cot\psi\sin\eta\ .$$

Sicque iam innotescit insignis relatio inter variationem lineae nodorum et inclinationis ad eclipticam, ita ut cognita alterutra altera inde semper tuto concludi possit. Hinc intelligitur, quando fuerit argumentum latitudinis $\psi=0$, tum lineam nodorum nullum incrementum capere posse, quia alioquin fieret $d\eta$ infinitum. Deinde vero, quoties fuerit $\psi=90^\circ$, inclinatio nullam mutationem accipere poterit.

37. Praeterea vero hinc etiam veram relationem inter elementa $d\phi$ et $d\psi$ assignare possumus, adhibentes hanc combinationem:

$$\text{I}\cdot\cos\zeta+\text{II}\cdot\sin\zeta\ .$$

Hinc enim obtinebimus

$$\frac{d\psi - d\phi}{\sin\eta\sin\psi^2} = -d\zeta\cot\eta - \frac{d\eta\cos\eta\cot\psi}{\sin\eta^2}\ ,$$

hincque

$$d\psi - d\phi = -d\zeta\cos\eta\sin\psi^2 - \frac{d\eta\cos\eta\cos\psi\sin\psi}{\sin\eta}\ ,$$

ubi, si loco $d\eta$ valor ante inventus substituatur, prodit

$$d\psi - d\phi = -d\zeta\cos\eta\ ,$$

ideoque

$$d\phi = d\psi + d\zeta\cos\eta\ .$$

38. Cum igitur per priorem operationem invenerimus

$$d\cdot\frac{x}{z} = -\frac{d\phi\cos\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ ,$$

erit

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{zz} = -\frac{d\phi\cos\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ .$$

At ex formulis initio integratis est

$$z\,dx - x\,dz = d\theta\int B\,d\theta = Q\,d\theta\ ,$$

quo valore substituto erit

$$\frac{Q\,d\theta}{zz} = -\frac{d\phi\cos\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ ;$$

quare, cum sit $z = v\sin\eta\sin\psi$, habebimus

$$Q\,d\theta = -vv\,d\phi\cos\zeta\sin\eta\ .$$

Deinde vero posuimus $vv\,d\phi = d\theta\int M\,d\theta$, existente

$$\int M\,d\theta = \surd(P^2 + Q^2 + R^2)\ ,$$

vel etiam

$$\int M\,d\theta = \surd 2\int vv(t\,ds - k\,dv)\ ,$$

quo valore substituto erit

$$Q = -\cos\zeta\sin\eta\int M\,d\theta\ ,$$

ideoque

$$\cos\zeta\sin\eta = -\frac{Q}{\int M\,d\theta} = -\frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}\ .$$

39. Simili modo cum fuerit

$$d\cdot\frac{y}{z} = -\frac{d\phi\sin\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ ,$$

erit

$$\frac{z\,dy - y\,dz}{zz} = -\frac{d\phi\sin\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ .$$

Per formulas autem integrales priores erat[5]

$$z\,dy - y\,dz = -d\theta\int A\,d\theta = -P\,d\theta\ ,$$

unde fit

$$\frac{P\,d\theta}{zz} = \frac{d\phi\sin\zeta}{\sin\eta\sin\psi^2}\ ,$$

hincque, ob $z = v\sin\eta\sin\psi$, erit

$$P\,d\theta = vv\,d\phi\sin\zeta\sin\eta\ ,$$

ex qua aequatione, ob $vv\,d\phi = d\theta\int M\,d\theta$, concluditur

$$\sin\zeta\sin\eta = \frac{P}{\int M\,d\theta} = \frac{P}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}\ .$$

Haec igitur aequatio per priorem divisa dabit

$$\tan\zeta = -\frac{P}{Q}\ ,$$

hincque porro

$$\sin\zeta = -\frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}} \qquad \text{et} \qquad \cos\zeta = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}}\ ,$$

ex quo deducitur

$$\sin\eta = -\sqrt{\frac{PP+QQ}{PP+QQ+RR}}\ .$$

40. Quoniam omnes perturbationes tanquam infinite parvae spectantur, descriptionem areae in ipsa orbita tempori proportionalem assumere licebit, ita ut

5 Editio princeps: $P\,d\theta$ loco $-P\,d\theta$.

sit $\int M\,d\theta$ quantitas constans, quae si igitur ponatur $=\mathfrak{C}$, aequationes modo inventae ita referri possunt:

$$\cos\zeta\sin\eta=-\frac{Q}{\mathfrak{C}}=-\frac{\int B\,d\theta}{\mathfrak{C}}\quad\text{et}\quad\sin\zeta\sin\eta=+\frac{P}{\mathfrak{C}}=+\frac{\int A\,d\theta}{\mathfrak{C}}\,,$$

ex quibus aequationibus differentiando colligitur:

$$\begin{aligned}-d\zeta\sin\zeta\sin\eta+d\eta\cos\eta\cos\zeta&=-\frac{B\,d\theta}{\mathfrak{C}}=-\frac{(pz-rx)\,d\theta}{\mathfrak{C}}\,,\\ +d\zeta\cos\zeta\sin\eta+d\eta\cos\eta\sin\zeta&=+\frac{A\,d\theta}{\mathfrak{C}}=+\frac{(ry-qz)\,d\theta}{\mathfrak{C}}\,,\end{aligned}$$

unde eliminando $d\eta$ fiet

$$d\zeta\sin\eta=\frac{(pz-rx)\,d\theta\sin\zeta+(ry-qz)\,d\theta\cos\zeta}{\mathfrak{C}}\,.$$

At vero eliminando $d\zeta$ erit

$$d\eta\cos\eta=\frac{-(pz-rx)\,d\theta\cos\zeta+(ry-qz)\,d\theta\sin\zeta}{\mathfrak{C}}\,.$$

41. Ante autem invenimus inter $d\zeta$ et $d\eta$ hanc rationem $d\eta=d\zeta\cot\psi\sin\eta$, quae relatio hic introducta praebet hanc aequationem:

$$\begin{aligned}&-(pz-rx)\cos\zeta+(ry-qz)\sin\zeta\\ &\qquad=(pz-rx)\sin\zeta\cos\eta\cot\psi+(ry-qz)\cos\zeta\cos\eta\cot\psi\,,\end{aligned}$$

quae evoluta hanc induit formam:

$$\begin{aligned}&-p(z\cos\zeta\sin\psi+z\sin\zeta\cos\eta\cos\psi)-q(z\sin\zeta\sin\psi-z\cos\zeta\cos\eta\cos\psi)\\ &\quad+r\big(x\cos\zeta\sin\psi+x\sin\zeta\cos\eta\cos\psi+y\sin\zeta\sin\psi-y\cos\zeta\cos\eta\cos\psi\big)\ [=0\,]\end{aligned}$$

sive concinnius

$$+(ry-qz)(\sin\zeta\sin\psi-\cos\zeta\cos\eta\cos\psi)-(pz-rx)(\cos\zeta\sin\psi+\sin\zeta\cos\eta\cos\psi)=0\,.$$

Haec autem relatio eatenus tantum valet, quatenus descriptio arearum seu formula $vv\,d\phi$ tempori est proportionalis.

42. Hactenus planum principale AOB in plano eclipticae assumsimus; pro instituto autem nostro magis conveniet hoc planum ita constituere, ut orbita planetae seu cometae ab eo perpetuo quam minime tantum discrepet. Teneat igitur hoc planum situm quendam medium inter omnes variationes, quas orbita quaesita subire potest. Hoc igitur notato, quoniam variationes assumi possunt

quam minimae, inclinatio orbitae ad hoc planum quasi infinite parva spectari poterit, ita ut angulus η pro evanescente haberi possit, unde erit

$$\sin\eta = \eta \quad \text{et} \quad \cos\eta = 1 ,$$

unde valor ipsius z prodibit $= v\eta\sin\psi$, qui perpetuo erit quam minimus; tum vero erit

$$x = v\cos(\psi + \zeta) \quad \text{et} \quad y = v\sin(\psi + \zeta) .$$

43. Hic primo observamus, si vis perturbans r abesset, tum corpus perpetuo in eodem plano AOB promoveri debere, ita ut aberratio ab isto plano a sola vi r proficisci sit censenda. Quoniam igitur quantitatem z ut evanescentem spectare licet, erit

$$A = ry \quad \text{et} \quad B = -rx ,$$

unde aequationes supra inventae erunt

$$\cos\zeta\sin\eta = \eta\cos\zeta = +\frac{\int rx\, d\theta}{\mathfrak{E}} \quad \text{et} \quad \sin\zeta\sin\eta = \eta\sin\zeta = \frac{\int ry\, d\theta}{\mathfrak{E}} ,$$

unde fit $\tan\zeta = \frac{\int ry\, d\theta}{\int rx\, d\theta}$, siquidem ponimus $\int M\, d\theta = \mathfrak{E}$.

44. Quia autem orbita quaesita in ipsum planum AOB incidit, formula $vv\, d\phi$ exhibet elementum areae in ipso plano AOB descriptae, seu aequabitur ipsi

$$x\, dy - y\, dx = d\theta \int C\, d\theta ,$$

sicque iam erit

$$vv\, d\phi = d\theta \int C\, d\theta = \theta \int d\theta\, (qx - py) ,$$

unde integrale $\int d\theta\, (qx - py)$ pro quantitate $\mathfrak{E}$ constante haberi poterit, si fuerit $qx - py$ quantitas quam minima; id quod semper supponere licet, idque eo magis, quando proxime fuerit $qx - py = 0$.

45. Nunc igitur differentiando pervenimus ad has formulas:

$$d\eta\cos\zeta - \eta\, d\zeta\sin\zeta = \frac{rx\, d\theta}{\mathfrak{E}} \quad \text{et} \quad d\eta\sin\zeta + \eta\, d\zeta\cos\zeta = \frac{ry\, d\theta}{\mathfrak{E}} ,$$

unde fit

$$d\eta = \frac{r\, d\theta(x\cos\zeta + y\sin\zeta)}{\mathfrak{E}} \quad \text{et} \quad \eta\, d\zeta = \frac{r\, d\theta(y\cos\zeta - x\sin\zeta)}{\mathfrak{E}} .$$

Cum igitur sit

$$x = v\cos(\zeta + \psi) \quad \text{et} \quad y = v\sin(\zeta + \psi) ,$$

prodibit

$$d\eta = \frac{rv\, d\theta\cos\psi}{\mathfrak{E}} \quad \text{et} \quad \eta\, d\zeta = \frac{rv\, d\theta\sin\psi}{\mathfrak{E}} ,$$

quorum valorum ille per hunc divisus dat $\frac{\eta\, d\zeta}{d\eta} = \tan\psi$, ideoque $d\eta = \frac{\eta\, d\zeta}{\tan\psi}$, quae est eadem relatio, quam supra inter $d\zeta$ et $d\eta$ invenimus. Ex his igitur formulis innotescit, quantas variationes quovis temporis momento tam positio lineae nodorum quam inclinatio patiatur, quae a sola vi r oriuntur; quae vis cum semper facile assignari queat, determinatio horum elementorum nulla prorsus laborat difficultate, sicque totum negotium reducitur ad resolutionem binarum aequationum inter quantitates θ, ϕ et v iam supra inventarum. Motus ergo quaesitus a solis viribus p et q pendebit et perinde erit comparatus, ac si fieret in ipso plano AOB.

Alia methodus mobilitatem orbitae determinandi

46. Supra iam innuimus aequationem

$$x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta + z\int C\,d\theta = 0\,,$$

ad quam primae aequationes nos perduxerunt, spectari posse tanquam aequationem localem pro superficie, in qua motus peragitur. Posuimus autem brevitatis gratia

$$\int A\,d\theta = P\,, \qquad \int B\,d\theta = Q\,, \qquad \int C\,d\theta = R\,,$$

ita ut sit $Px + Qy + Rz = 0$, quae aequatio, si quantitates P, Q et R essent constantes, certum quoddam planum definiret. Quare cum istae litterae per aliquod temporis spatium nullam sensibilem mutationem patiantur, si eae ut constantes spectentur, ex hac aequatione definiri poterit planum, in quo planeta sive cometa hoc saltem tempore movebitur.

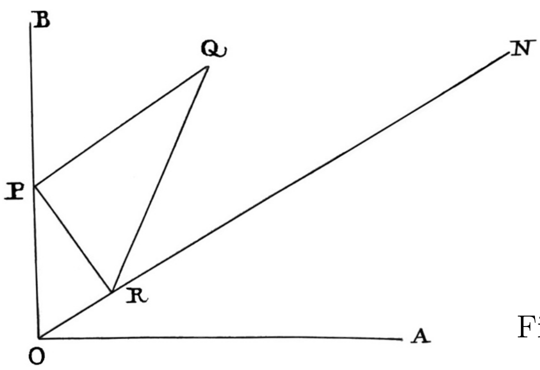


Fig. 5

47. Referat igitur (Fig. 5), ut initio, planum AOB eclipticam, sitque recta ON intersectio plani quaesiti cum ecliptica, pro qua ponamus angulum $AON = \zeta$. Cum igitur per totam hanc rectam ON sit $z = 0$, positio huius lineae hac aequatione $Px + Qy = 0$ exprimetur, unde fit $\frac{y}{x} = -\frac{P}{Q}$. Exprimit autem fractio

$\frac{y}{x}$ tangentem anguli ζ, unde statim colligimus esse $\tan\zeta = -\frac{P}{Q}$, prorsus ut ante per multas ambages invenimus.

48. Nunc pro inclinatione huius plani ad eclipticam invenienda, quam ante vocavimus $= \eta$, statuamus in nostra aequatione $x = 0$, ut sit $Qy + Rz = 0$, ex qua, si in axe OB capiatur $OP = y$, definietur longitudo perpendicularis PQ ad planum inclinatum pertingens; erit scilicet $PQ = z = -\frac{Qy}{R}$. Iam ex P ad lineam nodorum ON ducatur normalis PR, iungaturque recta QR, ut angulus PRQ exhibeat inclinationem planorum $= \eta$. Quia igitur angulus $PON = 90° - \zeta$, in triangulo POR erit $PR = y\cos\zeta$, unde ob $PQ = -\frac{Qy}{R}$ eruitur[6]

$$\tan PRQ = \tan\eta = -\frac{Q}{R\cos\zeta}\,.$$

49. Cum igitur invenerimus $\tan\zeta = -\frac{P}{Q}$, erit

$$\sin\zeta = -\frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}} \quad \text{et} \quad \cos\zeta = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}}\,,$$

sicque erit

$$\tan\eta = -\frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R}\,.$$

Hincque porro deducitur

$$\sin\eta = -\frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}\,,$$

qui valor prorsus cum superiori convenit, ubi notasse iuvabit fore

$$\cos\eta = \frac{R}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}\,.$$

Nunc autem, ut ante fecimus, in locum plani eclipticae AOB constituamus ipsum planum, in quo corpus certo quodam tempore, quod nobis certam epocham designet, movebatur. Valores autem nostrarum formularum integralium ponamus fuisse

$$P = \int A\,d\theta = \mathfrak{A}\,, \quad Q = \int B\,d\theta = \mathfrak{B}\,, \quad R = \int C\,d\theta = \mathfrak{C}\,,$$

unde, quia pro hac epocha erat $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z = 0$, ubique autem esse debet $z = 0$, evidens est valores $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ evanescere debere, ut fiat $\mathfrak{C}z = 0$.

6 Editio princeps: $\tan PQR$ loco $\tan PRQ$.

50. Iam postquam ab hac epocha elapsum fuerit tempus θ, valores quantitatum P, Q, R sequenti modo se habebunt:

$$\begin{aligned} P &= \mathfrak{A} + \int A\,d\theta = 0 + \int d\theta\,(ry - qz)\,, \\ Q &= \mathfrak{B} + \int B\,d\theta = 0 + \int d\theta\,(pz - rx)\,, \\ R &= \mathfrak{C} + \int C\,d\theta = \mathfrak{C} + \int d\theta\,(qx - py)\,. \end{aligned}$$

At vero quia declinatio orbitae praesentis a plano AOB est quam minima, ita ut sumi possit $z = 0$, pro hoc tempore erit

$$\begin{aligned} P &= \int ry\,d\theta\,, \\ Q &= -\int rx\,d\theta\,, \\ R &= \mathfrak{C} + \int d\theta\,(qx - py)\,, \end{aligned}$$

quae integralia ita capi oportet, ut in ipsa epocha, ubi $\theta = 0$, evanescant. Unde patet, quia ipsae vires perturbantes p, q, r sunt quasi infinite parvae, singulas has formulas integrales quantitates quam minimas exprimere.

51. Referat nunc recta ON pro tempore θ ab epocha elapso lineam nodorum, qua planum, in quo corpus nunc movetur, planum fixum AOB intersecat; atque posito angulo $AON = \zeta$ et mutua inclinatione $= \eta$, quam ut infinite parvam spectare licebit, formulae ante inventae pro hoc casu dabunt

$$\tan\zeta = \frac{\int ry\,d\theta}{\int rx\,d\theta} \quad \text{et} \quad \tan\eta = -\frac{\sqrt{\left((\int ry\,d\theta)^2 + (\int rx\,d\theta)^2\right)}}{\mathfrak{C} + \int d\theta\,(qx - py)}\,,$$

ubi, quia quaestio est de valore quam minimo $\tan\eta$, in denominatore pars integralis prae constante $\mathfrak{C}$ reiici potest, ita ut sit

$$\tan\eta = -\frac{\sqrt{\left((\int ry\,d\theta)^2 + (\int rx\,d\theta)^2\right)}}{\mathfrak{C}}\,.$$

Inde autem fit[7]

$$\sin\zeta = \frac{\int ry\,d\theta}{\sqrt{\left((\int ry\,d\theta)^2 + (\int rx\,d\theta)^2\right)}}\,,$$

7 Recte:

$$\sin\zeta = -\frac{\int ry\,d\theta}{\sqrt{\left((\int ry\,d\theta)^2 + (\int rx\,d\theta)^2\right)}}\,.$$

unde erit

$$\sin\zeta = -\frac{\int ry\,d\theta}{\mathfrak{C}\tan\eta}\,,$$

ita ut sit

$$\sin\zeta\tan\eta = \eta\sin\zeta = -\frac{\int ry\,d\theta}{\mathfrak{C}}\,,$$

ex quibus ergo formulis ad quodvis tempus tam positio lineae nodorum, seu angulus ζ, quam inclinatio infinite parva η determinari poterit.

52. Cum igitur mobilitas orbitae his duobus elementis contineatur, hinc manifestum est totam orbitae mobilitatem a sola vi perturbante r, cuius directio in planum AOB est perpendicularis, pendere, id quod etiam ex ipsa rei natura intelligitur. Si enim solae duae vires p et q adessent, quarum directio in ipsum planum AOB incidit, corpus perpetuo in eodem plano moveri pergeret. Eatenus igitur tantum ab hoc plano declinabitur, quatenus adest vis r in hoc planum normaliter agens, cuius ergo actio tota in hoc effectu consumetur; quemadmodum binae reliquae vires p et q perinde motum corporis afficient, ac si totus motus in plano AOB absolveretur.

53. Quo autem pateat, quamnam legem mutationes momentaneae angulorum ζ et η servent, cum formula postremo inventa

$$\eta\sin\zeta = -\frac{\int ry\,d\theta}{\mathfrak{C}}$$

combinemus eandem per $\tan\zeta$ divisam, quae erit

$$\eta\cos\zeta = -\frac{\int rx\,d\theta}{\mathfrak{C}}\,,$$

hincque differentiando nanciscemur

$$d\eta\sin\zeta + \eta\,d\zeta\cos\zeta = -\frac{ry\,d\theta}{\mathfrak{C}} \quad \text{et} \quad d\eta\cos\zeta - \eta\,d\zeta\sin\zeta = -\frac{rx\,d\theta}{\mathfrak{C}}\,,$$

unde combinando colligitur

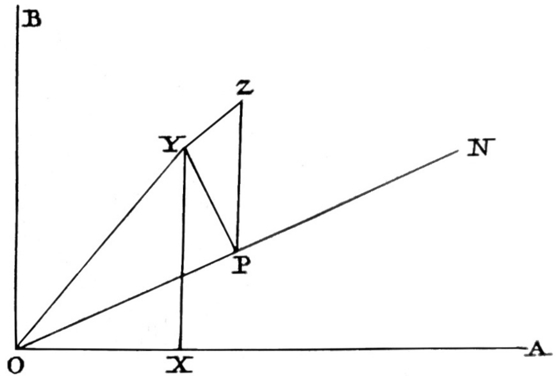
$$d\eta = -\frac{r\,d\theta\,(y\sin\zeta + x\cos\zeta)}{\mathfrak{C}} \quad \text{et} \quad \eta\,d\zeta = -\frac{r\,d\theta\,(y\cos\zeta - x\sin\zeta)}{\mathfrak{C}}\,.$$

Ad has aequationes evolvendas sit Z (Fig. 6) locus corporis infinite parum super plano AOB elevatus, ita ut cum puncto Y confundi possit; ductaque recta YP ad ON normali, facile patet fore

$$OP = y\sin\zeta + x\cos\zeta \quad \text{et} \quad YP = y\cos\zeta - x\sin\zeta\,.$$

Quare si argumentum latitudinis ut supra vocetur $NOZ = \psi$, ut ob $OY = v$ fiat $OP = v\cos\psi$ et $YP = v\sin\psi$, variationes momentaneae modo inventae ad has

Fig. 6



expressiones concinniores revocantur

$$d\eta = -\frac{rv\, d\theta \cos\psi}{\mathfrak{C}} \quad \text{et} \quad \eta\, d\zeta = -\frac{rv\, d\theta \sin\psi}{\mathfrak{C}} \,,$$

unde sequitur[8] relatio supra inventa

$$\frac{d\eta}{\eta\, d\zeta} = \cot\psi \,, \quad \text{sive} \quad d\eta = \eta\, d\zeta \cot\psi \,.$$

Investigatio inaequalitatum motus in ipsa orbita

54. Hic igitur totum corporis motum ita considerare licebit, quasi in ipso plano AOB perageretur, dum praeter vim ad Solem tendentem tantum a binis viribus p et q sollicitatur, quae si abessent, corpus motu regulari circa Solem in sectione conica circumferretur. Unde intelligitur, quoniam istae vires ut minimae spectantur, motum parumper tantum a regulari esse discrepaturum, eiusque aberrationem commodissime repraesentari posse, si ad quodvis tempus ea sectio conica investigetur, per quam eo saltem tempore moveatur, unde sequens problema praemittamus.

PROBLEMA

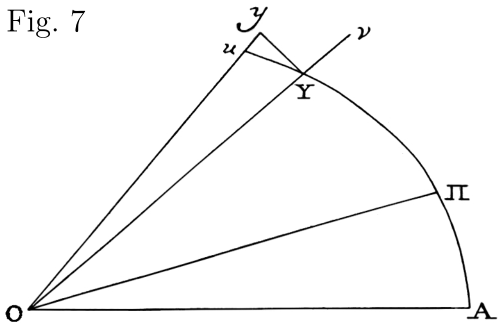
Cognito loco et motu corporis, quod a sola vi Solis attrahitur, invenire elementa orbitae ellipticae, in qua motum suum absolvet.

SOLUTIO

55. Quoniam primo (Fig. 7) locus corporis, qui sit in Y, datur, centro Solis existente in O, vocetur eius distantia $OY = v$, angulus vero $AOY = \phi$, quo scilicet a directione fixa OA iam est remotus. Deinde quicunque motus huic corpori

8 Haec relatio falso signo supra annotato non tangitur.

Fig. 7



fuerit impressus, quo in directione Yy procedit, resolvatur is secundum directionem Yv, quae cum distantia OY in directum iaceat, et secundum directionem Yu, illi normalem, eritque illius celeritas $\frac{dv}{d\theta}$, huius vero celeritas $\frac{v\,d\phi}{d\theta}$; quare, quia motus ut cognitus spectatur, ponatur $\frac{dv}{d\theta} = u$ et $\frac{d\phi}{d\theta} = \xi$, eruntque cognitae hae quatuor quantitates v, ϕ, u et ξ, ex quibus speciem sectionis conicae, in qua motus fiet, definiri oportet.

56. Primo igitur quaeri debet locus perihelii huius orbitae, qui sit in Π, pro quo ponatur angulus $AO\Pi = \pi$, ita ut sit angulus $\Pi OY = \phi - \pi$, qui vocatur anomalia vera, quam ponamus $\Pi OY = \omega$, ita ut sit $\phi = \omega + \pi$. Praeterea vero denotet f semiparametrum orbitae quaesitae, et excentricitas statuatur $= g$, ex quibus elementis distantia $OY = v$ ita determinatur, ut sit

$$v = \frac{f}{1 + g\cos\omega}\,.$$

Denique vero ex indole motus regularis constat, uti deinceps clarius patebit rationem temporis ita in calculum ingredi, ut sit

$$d\theta = \frac{vv\,d\phi}{\sqrt{f}}\,.$$

57. Cum igitur sit $\frac{d\phi}{d\theta} = \xi$, ultima conditio statim dat $\sqrt{f} = vv\xi$, unde ergo statim parameter orbitae innotescit, dum est $f = v^4\xi^2$. Hinc igitur erit

$$v = \frac{v^4\xi^2}{1 + g\cos\omega}\,,$$

ideoque

$$1 + g\cos\omega = v^3\xi^2\,.$$

Porro vero quia quantitates f et g sunt constantes, differentiatio formulae

$$v = \frac{f}{1 + g\cos\omega}$$

dabit

$$dv = \frac{fg\,d\omega \sin\omega}{(1+g\cos\omega)^2}\ ,$$

unde cum sit

$$d\theta = \frac{vv\,d\phi}{\surd f} = \frac{vv\,d\omega}{\surd f}\ ,$$

ob π constans, erit

$$\frac{dv}{d\theta} = u = \frac{g\sin\omega}{\surd f}\ ,$$

ubi loco $\surd f$ posito valore $vv\xi$ fiet

$$u = \frac{g\sin\omega}{vv\xi}\ .$$

Ante autem iam vidimus esse

$$1 + g\cos\omega = v^3\xi^2\ ,$$

ex quibus duabus aequationibus binae quantitates incognitae g et ω quaeri debent.

58. Cum igitur sit

$$g\sin\omega = uvv\xi \quad \text{et} \quad g\cos\omega = v^3\xi^2 - 1\ ,$$

colligitur fore

$$\tan\omega = \frac{uvv\xi}{v^3\xi^2 - 1}\ .$$

Sicque determinabitur anomalia vera ω, qua inventa pro loco perihelii habebitur $\pi = \phi - \omega$. Tum vero hinc etiam innotescit excentricitas $g = \frac{uvv\xi}{\sin\omega}$. Sicque omnia quatuor elementa, scilicet f, g, ω et π, sunt reperta, quibus orbita, quae quaeritur, perfecte determinatur.

59. Hoc problemate praemisso contemplemur casum, quo corpus (Fig. 8) in Y praeter vim solarem $= \frac{1}{vv}$, in directione YO agentem, sollicitatur a duabus viribus $Yp = p$ et $Yq = q$, quandoquidem effectus tertiae vis r iam est determinatus. Ponamus igitur ut supra binas coordinatas $OX = x$ et $XY = y$, ut sit $vv = xx + yy$, tum vero hic statim vocetur angulus $AOY = \phi$, eritque $x = v\cos\phi$ et $y = v\sin\phi$. Loco virium autem perturbantium p et q in calculum introducamus duas alias secundum directiones Ym et Yn agentes, quarum haec ad illam sit normalis, ac vocemus vim $Ym = m$ et $Yn = n$, atque ex istis viribus praecedentes p et q ita definientur, ut sit

$$p = m\cos\phi - n\sin\phi \quad \text{et} \quad q = m\sin\phi + n\cos\phi\ .$$

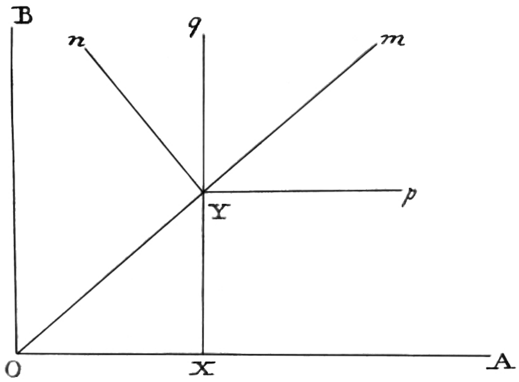


Fig. 8

60. Pro motu igitur ex his viribus oriundo principia mechanica suppeditant has duas aequationes:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{x}{v^3} + m\cos\phi - n\sin\phi\,,$$
$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{y}{v^3} + m\sin\phi + n\cos\phi\,,$$

et cum sit $x = v\cos\phi$ et $y = v\sin\phi$, hae aequationes erunt:

$$\frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{\cos\phi}{vv} + m\cos\phi - n\sin\phi\,,$$
$$\frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{\sin\phi}{vv} + m\sin\phi + n\cos\phi\,.$$

61. Introducamus autem porro loco ddx et ddy valores per v et ϕ expressos, ac primo quidem habebimus:

$$dx = dv\cos\phi - v\,d\phi\sin\phi \quad \text{et} \quad dy = dv\sin\phi + v\,d\phi\cos\phi\,,$$

hincque denuo differentiando:

$$\text{I.}\quad ddx = ddv\cos\phi - 2\,dv\,d\phi\sin\phi - v\,d\phi^2\cos\phi - v\,dd\phi\sin\phi\,,$$
$$\text{II.}\quad ddy = ddv\sin\phi + 2\,dv\,d\phi\cos\phi - v\,d\phi^2\sin\phi + v\,dd\phi\cos\phi\,,$$

qui valores in superioribus aequationibus substituti intelligantur.

62. Nunc primo faciamus hanc combinationem:

$$\text{I}\cdot\cos\phi + \text{II}\cdot\sin\phi\,,$$

quae deducet ad istam aequationem:

$$\frac{ddv - v\,d\phi^2}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} + m\,.$$

Deinde vero fiat haec combinatio:

$$\mathrm{II}\cdot\cos\phi - \mathrm{I}\cdot\sin\phi\ ,$$

quae dabit:

$$\frac{2\,dv\,d\phi + v\,dd\phi}{d\theta^2} = n\ .$$

Sicque tam sinus quam cosinus anguli ϕ ex calculo excesserunt, quod non contigisset, si vires p et q in calculo retinuissemus.

63. Quanquam hae aequationes sunt differentiales secundi gradus, tamen integratione penitus supersedere poterimus, quandoquidem ope problematis praemissi ad scopum optatum pertingere licebit. Quoniam igitur in illo problemate posuimus $\frac{dv}{d\theta} = u$ et $\frac{d\phi}{d\theta} = \xi$, ob elementum $d\theta$ constans assumtum erit

$$\frac{ddv}{d\theta} = du \quad \text{et} \quad \frac{dd\phi}{d\theta} = d\xi\ ,$$

quibus valoribus introductis binae aequationes inventae has induent formas:

$$\frac{du}{d\theta} - v\xi^2 = -\frac{1}{vv} + m \quad \text{et} \quad 2u\xi + \frac{v\,d\xi}{d\theta} = n\ .$$

Sicque hinc innotescunt novi valores differentiales $\frac{du}{d\theta}$ et $\frac{d\xi}{d\theta}$, quippe qui erunt:

$$\frac{du}{d\theta} = v\xi^2 - \frac{1}{vv} + m \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{n-2u\xi}{v}\ .$$

64. Quodsi iam assumamus (Fig. 7), tempore quo corpus erat in Y, eius motum ad talem sectionem conicam pertinuisse, pro qua fuerit perihelium in puncto Π, existente angulo $AO\Pi = \pi$; tum vero semiparameter fuerit $= f$, excentricitas $= q$ et anomalia vera $\Pi OY = \omega$, ita ut $\phi = \pi + \omega$, tum corpus hanc curvam describere esset perfecturum, si vires perturbantes m et n subito annihilarentur. Evidens autem est ob istas vires perturbantes elementa istius sectionis conicae continuo mutatum iri, ita ut elapso tempusculo $d\theta$ suis differentialibus increscant.

65. Ex motu autem, quem corpus in puncto Y habuit, elementa orbitae in praecedente problemate ita determinavimus, ut esset

$$\begin{array}{ll} 1. & \sqrt{f} = vv\xi\ , \\ 2. & g\sin\omega = uvv\xi\ , \\ 3. & g\cos\omega = v^3\xi^2 - 1\ , \\ 4. & \pi = \phi - \omega\ , \end{array}$$

unde differentiando incrementa horum elementorum, scilicet df, dg, $d\omega$ et $d\pi$, determinari poterunt, quibus inventis ad quodvis tempus eam sectionem conicam assignare poterimus, ad quam motum corporis eo saltem tempore referri oportet. Ipsum autem tempus θ hac formula continebitur:

$$d\theta = \frac{vv\,d\phi}{\sqrt{f}}\ .$$

66. Ut igitur has orbitae variationes eruamus, differentiemus primo aequationem primam, cuius differentiale per $d\theta$ divisum dabit:

$$\frac{df}{2\,d\theta\sqrt{f}} = \frac{2v\xi\,dv}{d\theta} + \frac{vv\,d\xi}{d\theta} = 2uv\xi + vv\cdot\frac{d\xi}{d\theta}\ .$$

Modo autem vidimus esse $\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{n-2u\xi}{v}$, quo valore substituto erit $\frac{df}{2\,d\theta\sqrt{f}} = nv$, unde incrementum semiparametri orbitae, quod tempusculo $d\theta$ nascitur, satis commode innotescit, cum sit $df = 2nv\,d\theta\sqrt{f} = 2nv^3\xi\,d\theta$. Unde patet, si vis perturbans n evanesceret, tum etiam parametrum orbitae nullam mutationem esse passurum.

67. Pro excentricitate g et anomalia vera ω coniunctim consideremus has formulas:

$$g\sin\omega = uvv\xi \quad \text{et} \quad g\cos\omega = v^3\xi^2 - 1\ ,$$

quarum differentialia per $d\theta$ divisa dabunt:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \frac{dg\sin\omega + g\,d\omega\cos\omega}{d\theta} = \frac{uvv\,d\xi}{d\theta} + \frac{2uv\xi\,dv}{d\theta} + \frac{vv\xi\,du}{d\theta}\ ,\\ &\text{II.} \quad \frac{dg\cos\omega - g\,d\omega\sin\omega}{d\theta} = \frac{2v^3\xi\,d\xi}{d\theta} + \frac{3vv\xi\xi\,dv}{d\theta}\ . \end{aligned}$$

Hic igitur loco $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{d\xi}{d\theta}$ et $\frac{dv}{d\theta}$, valores supra assignati substituantur, ac pervenietur ad has duas aequationes:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \frac{dg\sin\omega + g\,d\omega\cos\omega}{d\theta} = nuv + mvv\xi + v^3\xi^3 - \xi\ ,\\ &\text{II.} \quad \frac{dg\cos\omega - g\,d\omega\sin\omega}{d\theta} = 2nvv\xi - uvv\xi\xi\ , \end{aligned}$$

quae aequationes ob

$$v^3\xi^3 - \xi = g\xi\cos\omega \quad \text{et} \quad uvv\xi\xi = g\xi\sin\omega$$

abeunt in has:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \frac{dg\sin\omega + g\,d\omega\cos\omega}{d\theta} = nuv + mvv\xi + g\xi\cos\omega\ ,\\ &\text{II.} \quad \frac{dg\cos\omega - g\,d\omega\sin\omega}{d\theta} = 2nvv\xi - g\xi\sin\omega\ . \end{aligned}$$

68. Iam prior harum aequationum ducta in $\sin\omega$, posterior vero in $\cos\omega$ invicemque additae dabunt hanc aequationem:

$$\frac{dg}{d\theta} = mvv\xi\sin\omega + nv(u\sin\omega + 2v\xi\cos\omega)\ ,$$

unde iterum patet, si vires perturbatrices essent nullae, tum excentricitatem g manere constantem, prorsus uti rei natura postulat. Dein vero, si faciamus

$$\mathrm{I}\cdot\cos\omega - \mathrm{II}\cdot\sin\omega\ ,$$

prodibit

$$\frac{g\,d\omega}{d\theta} = mvv\xi\cos\omega + nv(u\cos\omega - 2v\xi\sin\omega) + g\xi\ ,$$

unde patet casu quo $m = 0$ et $n = 0$ fore $\frac{g\,d\omega}{d\theta} = g\xi$, ideoque ob $g\xi = \frac{g\,d\phi}{d\theta}$ erit $d\omega = d\phi$. Quoniam enim hoc casu linea absidum quiesceret, ob angulum π constantem utique foret $d\phi = d\omega$. Denique invento elemento $d\omega$, ob $d\pi = d\phi - d\omega$, ideoque $\frac{d\pi}{d\theta} = \xi - \frac{d\omega}{d\theta}$, reperietur pro motu lineae absidum[9]

$$\frac{d\pi}{d\theta} = -\frac{mvv\xi\cos\omega}{g} - \frac{nv(u\cos\omega - 2v\xi\sin\omega)}{g}\ ,$$

unde itidem patet casu $m = 0$ et $n = 0$ lineam absidum in eodem situ conservari.

69. Colligamus nunc, quae hactenus sunt eruta; ac si pro tempore quocunque θ fuerit locus perihelii in Π, existente angulo $AO\Pi = \pi$, tum vero orbitae ellipticae semiparameter fuerit $= f$, excentricitas g et anomalia vera $= \omega$, tum pro loco corporis habebitur angulus $AOY = \pi + \omega = \phi$, eiusque distantia a Sole

$$OY = v = \frac{f}{1 + g\cos\omega}\ ,$$

unde cum corpus per tempusculum $d\theta$ in hac ipsa orbita sit progressurum, erit $d\phi = d\omega$ et $vv\,d\omega = d\theta\sqrt{f}$, hincque porro

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\sqrt{f}}{vv} = \frac{(1 + g\cos\omega)^2}{f\sqrt{f}}\ ,$$

qui ergo erit valor ipsius $\xi = \frac{d\phi}{d\theta}$. Praeterea vero erit

$$dv = \frac{fg\,d\omega\sin\omega}{(1 + g\cos\omega)^2}\ ,$$

9 Editio princeps: $n\cos\omega$ loco $u\cos\omega$.

hincque

$$\frac{dv}{d\theta} = u = \frac{g\sin\omega}{\sqrt{f}}\ ,$$

unde variationes momentaneas supra inventas per ipsa orbitae elementa determinare licebit.

70. Elapso scilicet tempore $d\theta$, ob vires perturbatrices m et n, primo semiparameter orbitae, qui erat $= f$, augmentum accipiet df, ita ut sit

$$\frac{df}{2\,d\theta\sqrt{f}} = nv = \frac{nf}{1+g\cos\omega}\ .$$

Sicque erit

$$df = \frac{2nf\,d\theta\sqrt{f}}{1+g\cos\omega}\ ,$$

unde, postquam hinc elapsum fuerit tempus θ, habebitur integrando

$$\int\frac{df}{2f\sqrt{f}} = -\frac{1}{\sqrt{f}} = \int\frac{n\,d\theta}{1+g\cos\omega}\ ,$$

ubi notetur esse

$$d\theta = \frac{f\,d\omega\sqrt{f}}{(1+g\cos\omega)^2}\ ,$$

quo valore substituto prodit

$$\frac{df}{2f^3} = \frac{n\,d\omega}{(1+g\cos\omega)^3}\ ,$$

hincque integrando

$$-\frac{1}{4ff} = n\int\frac{d\omega}{(1+g\cos\omega)^3}\ .$$

Porro autem pro incremento excentricitatis orbitae, quod tempusculo $d\theta$ accipiet, erit

$$\frac{dg}{d\theta} = m\sqrt{f}\cdot\sin\omega + n\left(\frac{g\sin\omega}{1+g\cos\omega} + 2\cos\omega\right)\sqrt{f}\ ,$$

unde integrando ad quodvis aliud tempus excentricitas elici debebit.

71. Quaeramus nunc etiam incrementum anomaliae verae, seu anguli ω, quod tempusculo $d\theta$ accipit, et quod invenimus esse

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{mvv\xi\cos\omega}{g} + \frac{nv(u\cos\omega - 2v\xi\sin\omega)}{g} + \xi\ ,$$

quae expressio substitutis valoribus abit in hanc:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{m\cos\omega\sqrt{f}}{g} - \frac{n\sin\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2+g\cos\omega}{1+g\cos\omega}\right) + \frac{(1+g\cos\omega)^2}{f\sqrt{f}}\ ,$$

atque hinc cum sit
$$\frac{d\pi}{d\theta} = \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{d\omega}{d\theta} = \xi - \frac{d\omega}{d\theta}\,,$$
pro motu lineae absidum erit
$$\frac{d\pi}{d\theta} = -\frac{m\cos\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\sin\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2+g\cos\omega}{1+g\cos\omega}\right).$$

72. Hoc igitur modo omnia incrementa, quae cuncta elementa sectionis conicae tempusculo $d\theta$ a viribus perturbantibus m et n accipiunt, determinavimus. In praecedente vero articulo iam definivimus, quantum haec orbita a plano AOB dimoveatur a vi r in hoc planum perpendiculariter agente. Has igitur omnes operationes concinnitatis gratia in sequenti articulo colligamus.

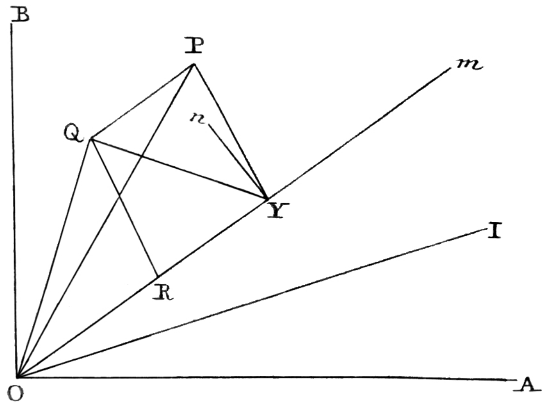
Praecepta pro determinandis perturbationibus, quas orbitae planetarum vel cometarum ab actione aliorum corporum coelestium perpetiuntur

73. Quoniam perturbationes quam minimae supponuntur, ita ut corpus per aliquod tempus motu regulari per orbitam ellipticam circumferri censeri possit, ponamus certo quodam tempore, quod tanquam epocham fixam spectemus, orbitam planetae sive cometae sitam fuisse in ipso plano AOB, eiusque perihelium fuisse in Π (Fig. 7) existente angulo $AO\Pi = \pi$, quo quasi longitudo perihelii a directione fixa OA designatur; tum vero fuerit eodem tempore semiparameter orbitae $= f$ et excentricitas $= g$. Hanc igitur orbitam (quatenus motus regulis KEPLERIANIS perfecte est conformis), in qua planeta sive cometa revera circumferretur, si nullae[10] vires perturbatrices adessent, orbitam fictam appellemus, ita ut nobis incumbat, pro quovis tempore ab epocha elapso variationes assignare, quibus vera orbita ab hac orbita ficta sit aberratura.

74. Primo igitur vires perturbatrices perpendamus, quae ab actione cuiusque corporis coelestis oriuntur. Elapso igitur ab epocha tempore quocunque $= \theta$, reperiatur (Fig. 9) planeta sive cometa in orbita ficta in Y, sitque eius anomalia vera, sive angulus $\Pi OY = \omega$, ideoque longitudo seu angulus $AOY = \pi + \omega$, unde eius distantia a Sole erit $OY = \frac{f}{1+g\cos\omega}$. Eodem autem tempore versetur corpus coeleste, a quo perturbatio producatur, supra hoc planum in puncto P, a quo ad planum AOB demittatur perpendiculum PQ iunganturque rectae ad solem ductae PO et QO, item recta ad Y ducta PY. Iam si massa corporis in P ponatur $= M$, dum massa Solis, uti supra assumsimus, unitate designatur, vis, qua hoc corpus in Solem aget, erit $\frac{M}{OP^2}$, unde haec vis in directione contraria

10 Editio princeps: multae loco nullae.

Fig. 9



PO ipsi planetae in Y applicata est concipienda. Praeterea vero planeta in Y immediate trahetur versus P in directione YP, vi $= \frac{M}{YP^2}$.

75. Primo igitur vis secundum directionem PO, quae est $\frac{M}{PO^2}$, resolvatur secundum directiones PQ et QO, eritque[11] vis secundum $PQ = \frac{M \cdot PQ}{PO^3}$ et vis secundum $QO = \frac{M \cdot QO}{PO^3}$. Simili modo, ducta recta QY, vis trahens secundum YP, quae est $\frac{M}{YP^2}$, resolvatur secundum directiones QP et YQ, eritque vis secundum $QP = \frac{M \cdot QP}{YP^3}$ et vis secundum $YQ = \frac{M \cdot YQ}{YP^3}$. Quoniam igitur ab hac vi posteriore punctum Y perpendiculariter sursum sollicitatur a vi $= \frac{M \cdot QP}{YP^3}$, a priore vero, quae erat $\frac{M \cdot PQ}{PO^3}$, deorsum, vis ad planum AOB normalis, quam supra designavimus littera r, erit

$$r = \frac{M \cdot QP}{YP^3} - \frac{M \cdot PQ}{PO^3} = M \cdot PQ \left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{PO^3} \right) .$$

Unde patet hanc vim sursum esse directam, quando fuerit $PO > YP$, contra vero deorsum, quando fuerit $PO < YP$, siquidem punctum P supra planum AOB versetur. Quodsi igitur eveniat, ut corporis P distantiae a Sole O et a puncto Y sint inter se aequales, tum vis r evanescet, et punctum Y neque sursum neque deorsum urgebitur.

76. Ut nunc etiam ambas vires, quas vocavimus m et n, quae in ipso plano AOB sunt positae, hinc definiamus, a puncto Q ad rectam OY normalem ducamus QR; ac primo quidem vis [secundum] $QO = \frac{M \cdot QO}{PO^3}$ dabit pro directione QR vim $\frac{M \cdot QR}{PO^3}$, et secundum OR vim $\frac{M \cdot RO}{PO^3}$. Simili modo vis secundum YQ, quae est $= \frac{M \cdot YQ}{YP^3}$, resoluta dat pro directione YR vim $= \frac{M \cdot YR}{YP^3}$, et pro directione

11 Editio princeps: $\frac{M \cdot PQ}{QO^3}$ loco $\frac{M \cdot PQ}{PO^3}$.

RQ vim $\frac{M \cdot RQ}{YP^3}$. Quare, cum posuerimus vim a Sole recedentem secundum $Ym = m$, vim vero ad hanc directionem normalem secundum $Yn = n$, habebimus:

$$m = -\frac{M \cdot YR}{YP^3} - \frac{M \cdot RO}{PO^3}$$

et

$$n = \frac{M \cdot RQ}{YP^3} - \frac{M \cdot QR}{PO^3} = M \cdot QR \left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{PO^3} \right) ,$$

ita ut haec vis n se habeat ad vim superiorem r ut QR ad PQ.

77. Quodsi punctum Y simul a pluribus aliis corporibus coelestibus sollicitetur, quae sint p', p'', p''', etc., ex singulis per formulas modo inventas ternas vires litteris m, n et r designatas colligi oportet; quibus inventis et debito modo coniunctis, si ponamus hoc tempore anomaliam veram in orbita ficta fuisse $= \omega$, tum semiparameter orbitae, qui erat $= f$, tempusculo $d\theta$ incrementum accipiet

$$df = \frac{2nf\sqrt{f}}{1 + g\cos\omega}\, d\theta ,$$

in cuius formulae integratione quantitates f et g ut constantes spectare licebit. Tum vero meminisse iuvabit esse

$$d\theta = \frac{f\, d\omega\sqrt{f}}{(1 + g\cos\omega)^2} .$$

Plerumque autem integrationem nullo modo sperare licebit, ita ut ad computationem tam virium m, n et r quam anguli ω pro pluribus temporibus a se invicem non nimis remotis confugiendum erit, ubi pro elemento temporis $d\theta$ satis tuto ipsa temporum intervalla accipi poterunt. Quo observato omnes istae formulae in unam summam collectae dabunt verum incrementum, quod semiparameter f interea acceperit.

78. Deinde vero incrementum dg, quod excentricitas orbitae ab actione virium m et n tempusculo $d\theta$ accipiet, erit[12]

$$dg = m\, d\theta \sin\omega\sqrt{f} + n\, d\theta\sqrt{f} \left(\frac{g\sin\omega}{1 + g\cos\omega} + 2\cos\omega \right) ,$$

ubi circa integrationem eadem sunt tenenda, quae modo ante commemoravimus. Praeterea vero progressio momentanea perihelii erit

$$d\pi = -\frac{m\, d\theta\cos\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\sin\omega\sqrt{f}}{g} \left(\frac{2 + g\cos\omega}{1 + g\cos\omega} \right) d\theta ,$$

quo invento incrementum anomaliae verae erit

$$d\omega = \frac{(1 + g\cos\omega)^2}{f\sqrt{f}}\, d\theta - d\pi ,$$

unde locus planetae in sua orbita corrigi poterit pro quolibet tempore proposito.

12 Editio princeps: $g\sin\omega^2$ loco $g\sin\omega$.

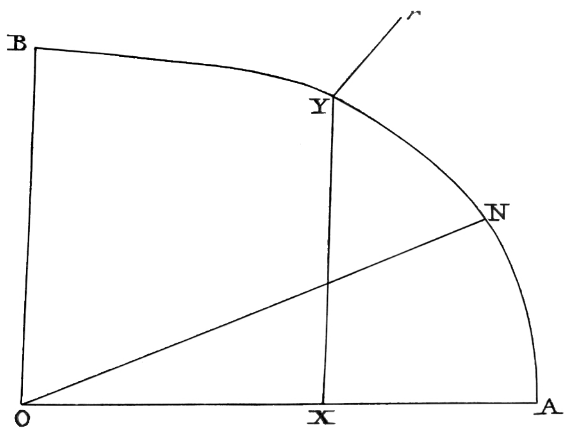
79. Tantum igitur superest, ut indicemus, quantum vera orbita a plano fixo AOB quovis tempore sit declinatura, quem totum effectum ex vi normali r definiri oportebit; pro quo negotio supra has aequationes nacti sumus:

$$\cos\zeta\sin\eta = \frac{\int rx\,d\theta}{\mathfrak{E}} \quad \text{et} \quad \sin\zeta\sin\eta = \frac{\int ry\,d\theta}{\mathfrak{E}}\ ,$$

ubi, quia $\mathfrak{E}$ in motu regulari erat valor formulae $\frac{vv\,d\phi}{d\theta}$, nunc constat fore $\mathfrak{E} = \sqrt{f}$.

80. Repraesentet igitur (Fig. 10) curva AYB orbitam fictam, in qua pro quopiam tempore θ ab epocha elapso planeta fuerit in Y, ubi perpendiculariter sursum urgeatur vi [secundum] $Yr\ = r$. Iam capiantur istius vis momenta respectu amborum axium OA et OB; eritque momentum prius $= ry$, at respectu axis OB momentum erit $= rx$, positis scilicet coordinatis $OX = x$ et $XY = y$.

Fig. 10



Huiusmodi autem bina momenta pro pluribus temporibus ab epocha elapsis investigari concipimus, ut intervalla eorum satis tuto per ipsum elementum $d\theta$ exprimi queant; tum autem per totum tempus θ ab epocha elapsum haec bina momenta in summam colligantur, atque valores hinc resultantes ponantur:

$$\int rx\,d\theta = P \quad \text{et} \quad \int ry\,d\theta = Q\ ,$$

ad quod remedium semper erit confugiendum, quando nulla spes adest has formulas actu integrandi.

81. Quodsi iam pro tempore θ ab epocha elapso linea nodorum fuerit recta ON, quam quidem ad nodum ascendentem dirigi concipiamus, ut planeta in puncto N supra planum AOB ascendat, si ponamus angulum $AON = \zeta$, inclinationem vero orbitae $= \eta$, sine ulteriori integratione statim habemus has aequationes:

$$\cos\zeta\sin\eta = \frac{P}{\sqrt{f}} \quad \text{et} \quad \sin\zeta\sin\eta = \frac{Q}{\sqrt{f}}\ ,$$

unde statim pro positione lineae nodorum colligitur

$$\tan\zeta = \tan AON = \frac{Q}{P}\ ;$$

unde cum sit

$$\cos\zeta = \frac{P}{\surd(PP+QQ)}\ ,$$

erit pro inclinatione

$$\sin\eta = \frac{\surd(PP+QQ)}{\surd f}\ ,$$

ubi inclinatio η tam est exigua, ut ea a suo sinu non discrepet.

82. Hoc igitur modo ad quodvis tempus ab epocha elapsum non solum vera species elliptica, in qua planeta sive cometa tum movebitur, verum etiam positio huius orbitae respectu plani fixi AOB assignari poterit; quibus rebus cognitis haud difficile erit pro quovis tempore verum locum planetae sive cometae definire. Sicque quaestioni circa perturbationem motus tam planetarum quam cometarum ab actione quacunque aliorum corporum ortam satis expedite est satisfactum.

DE MOTU TRIUM CORPORUM SE MUTUO ATTRAHENTIUM SUPER EADEM LINEA RECTA

Commentatio 626 indicis Enestroemiani
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **3** (1785), 1788, p. 126–141
Summarium ibidem, Histoire p. 180–182
(Kommentar zu E 626)

SUMMARIUM

Comme c'est le cas le plus simple du fameux Problème des trois Corps, quand les Corps sont tous situés dans la même ligne droite, notre illustre Auteur le développe avec soin dans ce Mémoire; il pèse toutes les difficultés, qui empêchent, qu'on ne le puisse résoudre, et il fait voir parlà, combien de progrès on a besoin de faire encore dans l'Analyse, avant que d'oser entreprendre la solution de ce Problème, pris dans toute sa généralité.

On voit d'abord que la solution Physique du Problème n'a pas la moindre difficulté, et les trois équations différentielles requises pour le mouvement des trois corps se présentent pour ainsi dire d'elles mêmes; mais l'Auteur avertit, que le mouvement contenu dans ces formules ne durera pas plus long-tems, que jusqu'à ce que deux de ces corps seront venus à s'entrechoquer, et qu'alors le mouvement continuera d'après des loix différentes, suivant que les corps seront plus ou moins mous ou élastiques.

Au reste quoique chacune des trois équations différentielles ne soit pas intégrable par elle-même, M. Euler pervient cependant par une combinaison assés facile à une équation en termes finis, qui fait connoitre, que le commun centre de gravité des trois corps avancera d'un mouvement uniforme sur la ligne droite, qui les enfile: et par une autre combinaison il trouve encore une équation, qu'on peut intégrer une fois, et qui renferme le principe fécond des forces vives, ou celui de la moindre action. Ensuite notre Auteur déploye sa sagacité ordinaire à réduire les variables à un plus petit nombre et à trouver des équations concises et élégantes, toutes cependant de nature à n'entrevoir aucun moyen de les intégrer. Comme la principale cause de ces difficultés paroit naitre de ce que le Problème est encore trop général en admettant des corps, dont la masse et la vitesse soyent dans un rapport quelconque, M. Euler s'arrète à un cas particulier, qui permet une solution parfaite, savoir quand les deux distances entre les trois corps gardent toujours un rapport donné et constant entre elles, et il montre qu'on peut déterminer les masses des corps de manière, que ce rapport des distances ait lieu. La seule difficulté consiste à trouver la racine d'une équation du cinquième degré. Il finit ensuite par la considération d'un autre cas particulier, où la masse d'un des corps seroit infiniment petite, et il fait voir, que toutes les ressources connues du calcul sont encore insuffisantes pour résoudre l'équation, qui en resulte, et qu'elles resteroient même insuffisantes, si l'on vouloit la simplifier encore d'avantage, en supposant la distance initiale de deux de ces corps infinie.

1. Hoc argumentum continet sine dubio casum simplicissimum celeberrimi illius problematis, quo motus trium corporum se invicem attrahentium investigandus proponitur. Quamobrem si praesens quaestio, qua tria illa corpora super eadem linea recta moveri sumuntur, omnem sagacitatem Geometrarum eludit, atque adeo vires analyseos superare videtur, nullo certe modo problematis illius generalis solutio sperari poterit. Hanc ob rem haud inutile erit istum casum simplicissimum accuratius evolvere, atque omnes difficultates, quae eius solutionem impediunt, omni adhibita attentione perpendere, quo clarius appareat, quanta adhuc analyseos incrementa desiderentur, antequam problematis generalis solutio cum successu suscipi queat.

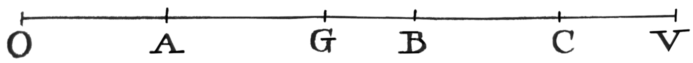


Fig. 1

2. Sit igitur (Fig. 1) OV linea recta, super qua tria corpora ABC se invicem attrahentia moveantur, quorum massas per easdem litteras A, B, C indicemus. Iam in illa recta accipiatur pro lubitu punctum fixum O, a quo ad quodvis tempus distantias illorum corporum investigari oporteat. Elapso igitur tempore quocunque $= t$, vocentur istae distantiae $OA = x$, $OB = y$ et $OC = z$, ubi quidem assumimus esse $y > x$ et $z > y$, sicque binorum corporum A et B distantia erit $AB = y - x$, distantia vero[1] $AC = z - x$ et distantia $BC = z - y$, quarum distantiarum quadratis vires, quibus bina horum corporum se mutuo attrahunt, reciproce proportionales statuuntur. Hinc ergo corpus A a corpore B trahitur vi $= \frac{B}{(y-x)^2}$ atque a C vi $= \frac{C}{(z-x)^2}$. Deinde vero corpus B ad A trahitur vi $= \frac{A}{(y-x)^2}$ et ad C vi $= \frac{C}{(z-y)^2}$. Denique corpus C trahitur ad A vi $= \frac{A}{(z-x)^2}$ et ad B vi $= \frac{B}{(z-y)^2}$.

3. Ex his igitur viribus secundum principia motus orientur tres sequentes aequationes[2]:

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & \text{Pro motu corporis } A & \dfrac{\partial\partial x}{\partial t^2} = +\dfrac{B}{(y-x)^2} + \dfrac{C}{(z-x)^2}\,, \\[2ex] \text{II.} & \text{Pro motu corporis } B & \dfrac{\partial\partial y}{\partial t^2} = -\dfrac{A}{(y-x)^2} + \dfrac{C}{(z-y)^2}\,, \\[2ex] \text{III.} & \text{Pro motu corporis } C & \dfrac{\partial\partial z}{\partial t^2} = -\dfrac{A}{(z-x)^2} - \dfrac{B}{(z-y)^2}\,; \end{array}$$

atque in his tribus aequationibus omnia continentur, quibus motus horum trium corporum determinatur. Ubi imprimis notari oportet has formulas tam diu

1 Editio princeps: vera.
2 Intellegimus d loco ∂.

tantum valere, quam diu fuerit $y > x$ et $z > y$, veluti figura ostendit. At vero si nunc fuerit $y > x$, in motus continuatione intervallum $AB = y - x$ eousque tantum imminui potest, quoad corpora A et B ad contactum perveniant: statim vero atque hoc contigerit, collisio fiet, qua totus motus aliam indolem accipiet, prouti corpora fuerint elastica nec ne, qui effectus neutiquam in nostris formulis continetur; unde evidens est motum in his formulis contentum diutius durare non posse, quam donec duo horum corporum ad contactum pervenerint.

4. Statim autem patet, ob ternas distantias variabiles x, y et z, quibuscum etiam variabilitas temporis coniungi debet, nullam harum trium aequationum per se integrationem admittere posse. Per certas autem combinationes aequationes inde integrabiles derivari possunt, quarum praecipua est haec:

$$\mathrm{I} \cdot A + \mathrm{II} \cdot B + \mathrm{III} \cdot C\ ,$$

quae praebet hanc aequationem:

$$\frac{A\,\partial\partial x + B\,\partial\partial y + C\,\partial\partial z}{\partial t^2} = 0\ ,$$

quae ducta in ∂t et integrata praebet

$$A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z = \alpha\,\partial t$$

hincque denuo integrando

$$Ax + By + Cz = \alpha t + \beta\ ,$$

ubi litterae α et β denotant constantes per geminam integrationem ingressas.

5. Haec autem aequatio ostendit commune centrum gravitatis trium corporum nostrorum motu uniformi super recta OV proferri. Quodsi enim hoc tempore commune centrum gravitatis corporum A, B et C statuatur in puncto G, eiusque distantia ab O vocetur $OG = v$, ex natura centri gravitatis notum est fore

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = (A + B + C)v\ .$$

Hinc igitur erit

$$(A + B + C)v = \alpha t + \beta\ ,$$

unde cum celeritas progressiva istius centri gravitatis sit $= \dfrac{\partial v}{\partial t}$, erit ista celeritas $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\alpha}{A + B + C}$, ideoque constans. Unde manifestum est, quomodocunque tria corpora inter se moveantur, eorum commune centrum gravitatis G perpetuo motu uniformi proferri, nisi forte eveniat, ut prorsus quiescat, quod fiet, si fuerit $\alpha = 0$.

6. Deinde etiam alia aequatio integrabilis ex tribus inventis formari potest, ope huius combinationis:

$$\mathrm{I} \cdot A\,\partial x + \mathrm{II} \cdot B\,\partial y + \mathrm{III} \cdot C\,\partial z\ ,$$

quando quidem hinc sequens aequatio nascetur:

$$\frac{A\partial x\partial\partial x+B\partial y\partial\partial y+C\partial z\partial\partial z}{\partial t^2}=\frac{AB(\partial x-\partial y)}{(y-x)^2}+\frac{AC(\partial x-\partial z)}{(z-x)^2}+\frac{BC(\partial y-\partial z)}{(z-y)^2}\,,$$

cuius integrale manifesto colligitur esse

$$\frac{A\,\partial x^2+B\,\partial y^2+C\,\partial z^2}{2\,\partial t^2}=\frac{AB}{y-x}+\frac{AC}{z-x}+\frac{BC}{z-y}+\Delta\,.$$

7. Haec aequatio continet principium foecundissimum virium vivarum vel etiam minimae actionis. Cum enim $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis A, $\frac{\partial y}{\partial t}$ celeritatem corporis B et $\frac{\partial z}{\partial t}$ celeritatem corporis C, quibus corpora a puncto fixo O recedunt, vires vivae horum corporum erunt:

$$\begin{aligned}\text{primi } A &= \frac{A\,\partial x^2}{\partial t^2}\,,\\ \text{secundi } B &= \frac{B\,\partial y^2}{\partial t^2}\,,\\ \text{tertii } C &= \frac{C\,\partial z^2}{\partial t^2}\,;\end{aligned}$$

inde aequatio modo inventa nobis declarat summam virium vivarum semper aequari huic formulae:

$$\frac{2AB}{y-x}+\frac{2AC}{z-x}+\frac{2BC}{z-y}+\Delta\,;$$

quae ergo quantitas eatenus increscit, quatenus distantiae binorum corporum fiunt minores; dum contra, si corpora a se invicem recedant, summa virium vivarum diminuitur.

8. Duas igitur iam nacti sumus aequationes integratas, quarum prior adeo duplicem integrationem admisit: unde si quis insuper unicam aequationem integratam eruere posset, is certe plurimum praestitisse esse censendus, quanquam tractatio harum aequationum differentialium primi gradus adhuc maximis difficultatibus foret involuta, ita ut etiam tum vix ulla solutio idonea expectari posset. Quantumvis autem Geometrae in hac investigatione elaboraverint, nulla tamen etiamnunc aequatio integrabilis deduci potuit. Interim tamen sequenti modo aequationem maxime memorabilem deducere licet, unde haud parum lucis expectari poterit.

9. Evolvamus scilicet hanc combinationem:

$$\mathrm{I}\cdot Ax+\mathrm{II}\cdot By+\mathrm{III}\cdot Cz\,,$$

quae dabit hanc aequationem:

$$\frac{Ax\,\partial\partial x+By\,\partial\partial y+Cz\,\partial\partial z}{\partial t^2}=-\frac{AB}{y-x}-\frac{AC}{z-x}-\frac{BC}{z-y}\,.$$

Ante autem per integrationem invenimus

$$\frac{A\,\partial x^2 + B\,\partial y^2 + C\,\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y} + \varDelta\,,$$

unde, si has duas aequationes invicem addamus, ob

$$x\,\partial\partial x + \partial x^2 = \partial\cdot x\,\partial x = \frac{1}{2}\partial\partial\cdot xx\,,$$

similique modo ob

$$y\,\partial\partial y + \partial y^2 = \frac{1}{2}\,\partial\partial\cdot yy \quad \text{et} \quad z\,\partial\partial z + \partial z^2 = \frac{1}{2}\,\partial\partial\cdot zz\,,$$

nascetur sequens aequatio maxime memorabilis:

$$\frac{A\cdot\partial\partial\cdot xx + B\cdot\partial\partial\cdot yy + C\cdot\partial\partial\cdot zz}{2\,\partial t^2} = \frac{AB}{y-x} + \frac{AC}{z-x} + \frac{BC}{z-y} + \varDelta\,.$$

Neque tamen etiamnunc patet, qualis fructus hinc percipi queat, quoniam integrale membri dextri, si per ∂t multiplicetur, nullo modo sperari potest.

10. Quoniam autem iam invenimus centrum gravitatis commune trium nostrorum corporum uniformiter in directum progredi, unde ad quodvis tempus eius situm seu distantiam $OG = v$ facillime assignare licebit, hoc observato sufficiet binas tantum distantias inter corpora nosse, quo pacto tota investigatio ad pauciores quantitates variabiles reducetur. Si enim ponamus distantiam $AB = p$ et distantiam $BC = q$, ita ut sit $y - x = p$ et $z - y = q$, erit $z - x = p + q$. Deinde ob $y = x + p$ et $z = x + p + q$, tres aequationes primo inventae has induent formas:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{B}{pp} + \frac{C}{(p+q)^2}\,,\\
&\text{II.} && \frac{\partial\partial x + \partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{A}{pp} + \frac{C}{qq}\,,\\
&\text{III.} && \frac{\partial\partial x + \partial\partial p + \partial\partial q}{\partial t^2} = -\frac{A}{(p+q)^2} - \frac{B}{qq}\,,
\end{aligned}$$

unde si prima a secunda, tum vero secunda a tertia subtrahatur, impetrabuntur binae sequentes aequationes pro definiendis ad quodvis tempus t binis novis variabilibus p et q:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{qq} - \frac{C}{(p+q)^2}\,,\\
&\text{II.} && \frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(p+q)^2} - \frac{(B+C)}{qq}\,.
\end{aligned}$$

11. Quoniam primo invenimus esse

$$Ax + By + Cz = \alpha t + \beta \ ,$$

si loco y et z valores supra assignatos substituamus, habebimus

$$(A + B + C)x + (B + C)p + Cq = \alpha t + \beta \ .$$

Per centrum autem gravitatis G reperta est haec aequatio:

$$(A + B + C)v = \alpha t + \beta \ ,$$

unde tres quantitates x, y et z definire poterimus; erit scilicet[3]

$$x = v - \frac{(B + C)p + Cq}{A + B + C} \ ,$$

hincque porro fiet

$$y = v + \frac{Ap - Cq}{A + B + C} \quad \text{et} \quad z = v + \frac{Ap + (A + B)q}{A + B + C} \ .$$

12. Quia centrum gravitatis G vel quiescit vel uniformiter in directum progreditur, posteriore casu, si toti systemati motus aequalis et contrarius ei, quo centrum gravitatis procedit, imprimi concipiatur, centrum gravitatis ad quietem redigetur. Quare cum nihil impediat, quominus punctum fixum O in ipso centro gravitatis G constituamus, ponamus $v = 0$, eritque multo simplicius:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(B + C)p - Cq}{A + B + C} = GA \ , \\ y &= \frac{Ap - Cq}{A + B + C} = GB \ , \\ z &= \frac{Ap + (A + B)q}{A + B + C} = GC \ . \end{aligned}$$

Sicque, simulac quantitates p et q assignare licuerit, etiam singulorum corporum loca innotescent.

13. Hinc etiam aequationem, quam supra integrare licuit, quae erat

$$\frac{A\,\partial x^2 + B\,\partial y^2 + C\,\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p + q} + \frac{2BC}{q} + \Delta \ ,$$

ad istum casum accommodare licebit. Ponamus autem brevitatis gratia $A + B + C = \Sigma$, eritque

$$\begin{aligned} A\,\partial x^2 &= \frac{A}{\Sigma^2}\left(B^2\,\partial p^2 + 2BC\,\partial p\,(\partial p + \partial q) + C^2(\partial p + \partial q)^2\right) \ , \\ B\,\partial y^2 &= \frac{B}{\Sigma^2}\left(A^2\,\partial p^2 - 2AC\,\partial p\,\partial q + C^2\,\partial q^2\right) \ , \\ C\,\partial z^2 &= \frac{C}{\Sigma^2}\left(A^2(\partial p + \partial q)^2 + 2AB\,\partial q\,(\partial p + \partial q) + B^2\,\partial q^2\right) \ ; \end{aligned}$$

3 Editio princeps: $-Cq$ loco $+Cq$.

quae tres formulae in unam summam collectae dabunt:

$$\frac{1}{\Sigma^2}\Big(AB(A+B)\,\partial p^2 + AC(A+C)(\partial p+\partial q)^2 + BC(B+C)\,\partial q^2 \\ + 2ABC(\partial p+\partial q)^2 - 2ABC\,\partial p\,\partial q\Big)\,,$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{\Sigma}\left(AB\,\partial p^2 + BC\,\partial q^2 + AC(\partial p+\partial q)^2\right)\,,$$

quo valore substituto aequatio illa integrata transmutabitur in hanc formam:

$$\frac{AB\,\partial p^2 + BC\,\partial q^2 + AC(\partial p+\partial q)^2}{(A+B+C)\,\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta\,.$$

14. Quanquam haec aequatio satis est concinna et elegans, neutiquam tamen ulla via patet inde solutionem quaestionis derivandi, ita ut ista quaestio merito profundissimae indaginis sit censenda, et quicunque studium et operam in his aequationibus resolvendis consumere voluerit, mox percipiet, se oleum et operam perdidisse; unde manifesto liquet, quid de iis sit iudicandum, qui se iactant in solutione problematis generalis de motu trium corporum se mutuo attrahentium satis felici cum successu elaborasse.

15. Praecipua causa harum difficultatum in eo posita esse videtur, quod ista quaestio adhuc nimis est generalis, quoniam ad massas trium corporum quascunque atque ad motus quoscunque, qui iis imprimi potuerunt, extenditur. Datur enim utique casus maxime specialis, quo motum horum trium corporum revera assignare licet; semper enim eiusmodi motum in his corporibus concipere datur, ut binae distantiae p et q perpetuo eandem inter se rationem servent; ad quem casum evolvendum ponatur $q = np$, ac duae aequationes § 10 datae sequentem formam induent:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{nnpp} - \frac{C}{(1+n)^2pp}\,,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n\,\partial\partial p}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(1+n)^2pp} - \frac{(B+C)}{nnpp}\,.$$

16. Statim autem hic perspicitur eiusmodi relationem inter numerum n et massas A, B, C existere posse, ut hae duae aequationes evadant identicae, id quod eveniet, si membrum dextrum prius per n multiplicatum aequale statuatur posteriori, ex quo nascetur haec aequatio:

$$-n(A+B) + \frac{C}{n} - \frac{nC}{(1+n)^2} = A - \frac{A}{(1+n)^2} - \frac{(B+C)}{nn}\,,$$

unde numerum n per resolutionem elicere licebit; haec autem aequatio statim contrahitur in hanc formam:

$$-n(A+B)+\frac{(1+2n)C}{n(1+n)^2}=\frac{(2n+nn)A}{(1+n)^2}-\frac{(B+C)}{nn}\ ,$$

quae ducta in $n^2(1+n)^2$ a fractionibus liberabitur, eritque

$$-(A+B)n^3(1+n)^2+Cn(1+2n)=An^2(2n+nn)-(B+C)(1+n)^2\ ,$$

in qua aequatione incognita n ad quintam potestatem assurgit, ideoque difficillimam resolutionem postulat. Notetur autem hanc aequationem secundum litteras A, B et C dispositam fieri

$$An^3(3+3n+nn)-B(1+n)^2(1-n^3)-C(1+3n+3nn)=0\ .$$

Certum autem est hanc aequationem unam ad minimum habere radicem realem, quae, si fuerit positiva, solutionem praebet desideratam. At quia hinc coëfficiens supremi termini fit $A+B$, ideoque semper positivus, terminus autem absolutus est $=(B+C)$, ideoque semper negativus, id indicium est istam aequationem certe habere radicem realem positivam, qua ergo negotium nostrum conficietur.

17. Casus hic imprimis notatu dignus occurrit, quo ambo corpora extrema A et C statuuntur inter se aequalia; posito enim $C=A$, aequatio habebit hanc formam:

$$A(n-1)(n^4+4n^3+7nn+4n+1)-B(n+1)^2(1-n^3)=0\ ,$$

quae manifesto habet factorem $n-1$, ita ut sit $n=1$ et $q=p$; hoc ergo casu, si modo ambo corpora extrema a medio fuerint aequaliter remota et aequales motus acceperint, tum perpetuo a corpore medio aequaliter distabunt et motu satis regulari eo pertingent. Postquam autem illam aequationem per $n-1$ diviserimus, prodit ista:

$$A(n^4+4n^3+7nn+4n+1)+B(n+1)^2(nn+n+1)=0\ ,$$

cuius nullam amplius radicem positivam esse posse manifestum est.

18. Invento autem valore idoneo pro littera n, quoniam ambae aequationes principales identicae evadunt, si ponamus

$$-A-B+\frac{C}{nn}-\frac{C}{(1+n)^2}=N\ ,$$

totus motus definiri debebit ex hac aequatione:

$$\frac{\partial\partial p}{\partial t^2}=\frac{N}{pp}\ ,$$

quae ducta in ∂p et integrata dat

$$\frac{\partial p^2}{2\,\partial t^2} = -\frac{N}{p} + \frac{N}{a}\ ,$$

ubi, cum $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis, evidens est corpus fuisse in quiete, ubi fuerit $p = a$. Cum igitur sit[4]

$$\frac{\partial p}{\partial t\,\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{N(p-a)}{ap}}\ ,$$

inde colligitur

$$\partial t\,\sqrt{2N} = \frac{\partial p\,\sqrt{ap}}{\sqrt{(p-a)}} = \frac{p\,\partial p\,\sqrt{a}}{\sqrt{(pp-ap)}}\ ,$$

quae per logarithmos facile integratur. Sin autem quantitas N fuerit negativa, puta $N = -M$, aequatio erit

$$\partial t\,\sqrt{2M} = \frac{p\,\partial p\,\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}}\ ,$$

cuius integratio per arcus circulares absolvitur. Facile autem ostendi potest valorem N semper esse negativum; si enim foret positivus, quia motus initio fuerat $p = a$, sequeretur deinceps distantiam p augeri, seu ex formula $\sqrt{(p-a)}$ sequeretur deinceps fieri $p > a$, quod est absurdum.

19. Consideremus casum supra memoratum, quo $C = A$ et $n = 1$, ideoque $q = p$; aequatio igitur motum definiens, ob $N = -B - \frac{A}{4}$ ideoque negativum et $M = B + \frac{1}{4}A$, erit

$$\partial t\ \sqrt{\left(2B + \frac{1}{2}A\right)} = \frac{p\,\partial p\,\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}}\ .$$

Cum igitur sit

$$\partial\cdot\sqrt{(ap-pp)} = \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p - p\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}\ ,$$

erit

$$\frac{p\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} = \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} - \partial\cdot\sqrt{(ap-pp)}\ ,$$

unde integrando erit

$$t\ \sqrt{\frac{2B + \frac{1}{2}A}{a}} = \int \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} - \sqrt{(ap-pp)}\ .$$

Est vero[5]

$$\int \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} = a\,\mathrm{A}\sin\ \sqrt{\frac{p}{a}}\ ,$$

4 Editio princeps: $\dfrac{\partial p}{\partial t\,\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{N(p-a)}}{ap}$.

5 A sin denotat arcsin.

ita ut habeamus:

$$t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\left(2B + \frac{1}{2}A\right)}} \left(a \,\mathrm{A}\sin \sqrt{\frac{p}{a}} - \sqrt{(ap - pp)} \right) .$$

Quoniam autem casus, quo $q = np$, unicus est, quem etiam nunc resolvere licet, is utique meretur, ut eius solutionem clarius ob oculos ponamus.

Evolutio casus quo binae distantiae AB et BC perpetuo eandem inter se rationem conservant

20. Cum posuerimus[6] $AB = p$ et $BC = q$, statuamus, ut modo fecimus, $q = np$, ac vidimus hunc numerum n ex ista aequatione definiri debere:

$$An^3(nn + 3n + 3) - B(1 + n)^2(1 - n^3) - C(1 + 3n + 3nn) = 0 ,$$

quae secundum potestates ipsius n disposita hanc formam accipit:

$$(A+B)n^5 + (3A+2B)n^4 + (3A+B)n^3 - (3C+B)nn - (3C+2B)n - B - C = 0 ,$$

quae, cum sit ordinis quinti, et termini contrariis signis afficiantur, semper unam habebit radicem realem positivam; quae ergo ad nostrum institutum erit accommodata, propterea quod distantia $BC = q$ per hypothesin est positiva.

21. Invento autem tali valore idoneo pro n, quaeratur quantitas M, ut sit $M = A + B - \frac{C}{nn} + \frac{C}{(1+n)^2}$. Cum igitur ex superiore aequatione sit

$$B = \frac{An^3(nn + 3n + 3) - C(1 + 3n + 3nn)}{(1 + n)^2(1 - n^3)} ,$$

hoc valore introducto erit

$$M = \frac{A(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{(1 + n)^2(1 - n^3)} - \frac{C(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{nn(1 + n)^2(1 - n^3)} ,$$

sive

$$M = \frac{(Ann - C)(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{nn(1 + n)^2(1 - n^3)} ;$$

qui valor cum, ut iam observavimus, semper debeat esse positivus, hinc concludere licet, quoties fuerit $Ann > C$, toties esse debere $n < 1$; contra vero, si fuerit $Ann < C$, tum semper fore $n > 1$.

22. His circa numerum M observatis, supra invenimus hanc aequationem differentialem inter p et t:

$$\partial t \sqrt{2M} = \frac{p\,\partial p \sqrt{a}}{\sqrt{(ap - pp)}} ;$$

6 Editio princeps: $AC = p$.

unde cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem, qua intervallum $AB = p$ crescit, erit ista celeritas $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sqrt{2M(ap - pp)}}{p\sqrt{a}}$. Sin autem distantiae inter corpora decrescant, quoniam extractio radicis quadratae huc perduxit, scribi debet

$$\partial t\,\sqrt{2M} = -\frac{p\,\partial p\,\sqrt{a}}{\sqrt{(ap - pp)}}\ .$$

Utroque casu ergo discimus, ubi fiet $p = a$ ideoque $q = na$, tum utramque corporis celeritatem fieri $= 0$, at si eveniat $p = 0$, id quod in ipso corporum contactu contingit, tum utramque celeritatem fieri infinitam. Verum ob extensionem corporum fieri nequit, ut haec tria corpora in unum punctum conveniant.

23. Denuo autem istam aequationem differentialem integrare licebit; cum enim sit[7]

$$\frac{\partial t\,\sqrt{2M}}{\sqrt{a}} = \frac{p\,\partial p}{\sqrt{(ap - pp)}} = -\partial \cdot \sqrt{(ap - pp)} + \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap - pp)}}\ ,$$

erit integrale

$$t\,\sqrt{\frac{2M}{a}} = \alpha - \sqrt{(ap - pp)} + a\,\mathrm{A}\sin\,\sqrt{\frac{p}{a}}\ ,$$

in qua formula signa erunt mutanda, si distantia p descrescat. Verum ipse calculus istud discrimen innuit: si enim tempus t computemus ab eo statu, quo fuerat $p = a$ atque adeo celeritas concursus nulla, constantem α hinc definire licet; fiet enim $0 = \alpha + \frac{a\pi}{2}$, unde fit $\alpha = -\frac{a\pi}{2}$. Quoniam autem ab hoc statu corpora ad se mutuo accedunt, mutatis signis erit

$$t\,\sqrt{\frac{2M}{a}} = \frac{a\pi}{2} + \sqrt{(ap - pp)} - a\,\mathrm{A}\sin\,\sqrt{\frac{p}{a}}\ ,$$

unde patet corpora invicem esse coitura, ponendo $p = 0$, elapso tempore

$$t = \frac{1}{2}\pi\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}}\ .$$

24. Quo hanc expressionem propius ad usum accommodemus, introducamus angulum ϕ, cuius sinus sit $\sqrt{\frac{p}{a}}$, unde fiet $p = a\sin\phi^2$ et $q = na\sin\phi^2$; tum autem erit[8]

$$\sqrt{(ap - pp)} = a\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}a\sin 2\phi\ .$$

7 Editio princeps: $-\sqrt{(ap - pp)}$ loco $-\partial \cdot \sqrt{(ap - pp)}$.
8 Editio princeps: $a\sqrt{\sin\phi\cos\phi}$ loco $a\sin\phi\cos\phi$.

Hinc igitur aequatio nostra integralis erit

$$t\sqrt{\frac{2M}{a}} = \frac{a\pi}{2} + \frac{a}{2}\sin 2\phi - a\phi\ ,$$

ideoque

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\phi - \phi\right)\ .$$

Quodsi hic porro ponamus $\frac{\pi}{2} - \phi = \frac{1}{2}\omega$, erit $\sin 2\phi = \sin\omega$, hocque valore substituto fiet

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2M}}(\omega + \sin\omega)\ .$$

25. Ecce igitur solutio huc est reducta, ut ad datum tempus t quaeri debeat angulus ω, ita ut sit

$$\omega + \sin\omega = \frac{2t\sqrt{2M}}{a\sqrt{a}}\ ,$$

quo invento, cum sit $\phi = 90° - \frac{1}{2}\omega$, ideoque $\sin\phi = \cos\frac{1}{2}\omega$, pro hoc tempore reperietur distantia

$$AB = p = a\cos\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}a(1+\cos\omega)$$

et

$$q = \frac{1}{2}na(1+\cos\omega)\ .$$

Consideratio casus quo massa unius corporis plane evanescit

26. Quoniam massae trium corporum praecipuam caussam continent omnium difficultatum, quibus haec quaestio premitur, non immerito suspicari licet has difficultates maximam partem dissipari debere, si uni trium corporum tribuatur massa evanescens, ita ut ab hoc corpore motus duorum reliquorum plane non turbetur, quae ergo inter se motu maxime regulari ferentur, quasi tertium corpus plane abesset. Posito autem $C = 0$, distantiis vero ut supra $AB = p$ et $BC = q$, pro motu determinando habebuntur duae sequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp}$$

et

$$\text{II.}\quad \frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}\ .$$

27. Hic statim aequationem priorem integrare licet, quae posito brevitatis gratia $A + B = m$ fit

$$\frac{\partial p^2}{2\,\partial t^2} = +\frac{m}{p} - \frac{m}{a} = \frac{m(a-p)}{ap}\ ,$$

unde fit

$$\partial t^2 = \frac{ap\,\partial p^2}{2m(a-p)}\,;$$

qui valor si in altera aequatione substituatur, prodibit aequatio binas tantum variabiles p et q involvens, a cuius ergo resolutione totum negotium pendebit. Cum autem in altera aequatione elementum ∂t pro constante sit assumtum, quo haec consideratio exuatur, multiplicetur aequatio per ∂q, et repraesentari poterit sub hac forma:

$$\frac{1}{2}\partial\cdot\frac{\partial q^2}{\partial t^2} = \frac{A\,\partial q}{pp} - \frac{B\,\partial q}{qq} - \frac{A\,\partial q}{(p+q)^2}\,,$$

unde, facta substitutione, inter quantitates p et q obtinebitur ista aequatio:

$$\frac{1}{2}\partial\cdot\frac{2m(a-p)\,\partial q^2}{ap\,\partial p^2} = \frac{A\,\partial q}{pp} - \frac{B\,\partial q}{qq} - \frac{A\,\partial q}{(p+q)^2}\,.$$

Interim tamen haec aequatio, quomodocunque tractetur, omne studium in ea resolvenda frustra impendi deprehendetur, solo casu excepto, quo ambae quantitates p et q constantem inter se tenent rationem. Si enim ponamus $q = np$, ob $\partial q = n\,\partial p$ aequatio hanc induet formam:

$$\frac{1}{2}\partial\cdot\frac{2mnn(a-p)}{ap} = \frac{nA\,\partial p}{pp} - \frac{B\,\partial p}{npp} - \frac{nA\,\partial p}{pp(1+n)^2}\,;$$

membrum vero sinistrum evolutum dat $-\frac{2mnn\,\partial p}{pp}$, unde totam aequationem per $\frac{\partial p}{pp}$ dividendo prodit

$$-mnn = nA - \frac{B}{n} - \frac{nA}{(1+n)^2}\,,$$

quae nullam amplius variabilem continet, sed ipsi numero n inveniendo inservit. Facile autem patet, ob $m = A + B$, eandem haberi aequationem, quam iam supra pro numero n definiendo dedimus, si quidem ponatur $C = 0$, unde huic casui immorari superfluum foret.

28. Evolvamus autem in genere membrum sinistrum, ac sumendo elementum ∂p constans, haec aequatio evoluta emerget:

$$\frac{2m(a-p)\,\partial\partial q}{ap\,\partial p^2} - \frac{m\,\partial q}{pp\,\partial p} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}\,,$$

pro qua resolvenda nulla plane via patet, atque omnia artificia, quae adhuc sunt inventa, nequicquam in subsidium vocantur. Quin etiam, quamvis sumamus $a = \infty$, quo casu aequatio fit homogenea, nihil tamen praestari posse deprehendemus; aequatio autem habebit hanc formam:

$$\frac{2m\,\partial\partial q}{p\,\partial p^2} - \frac{m\,\partial q}{pp\,\partial p} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}\,.$$

Facile enim intelligitur, si haec aequatio vires nostras superet, prioris solutionem frustra suscipi.

29. Quoniam haec postrema aequatio est homogenea, eam more solito tractemus, ponendo $q = up$ et $\partial q = s\,\partial p$, unde statim fit[9] $\dfrac{\partial p}{p} = \dfrac{\partial u}{s-u}$. Facta autem hac substitutione ipsa aequatio induet sequentem formam:

$$\frac{2m\,\partial s}{p\,\partial p} - \frac{ms}{pp} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{uupp} - \frac{A}{pp(1+u)^2}\,,$$

quae multiplicata per $p\,\partial p$ praebet:

$$2m\,\partial s = \frac{\partial p}{p}\left(ms + A - \frac{B}{uu} - \frac{A}{(1+u)^2}\right)\,,$$

unde, si loco $\dfrac{\partial p}{p}$ scribatur valor modo datus $\dfrac{\partial u}{s-u}$ per eumque dividatur, pervenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{2m\,\partial s\,(s-u)}{\partial u} = ms + A - \frac{A}{(1+u)^2} - \frac{B}{uu}\,,$$

ubi notetur esse $m = A + B$; quae quanquam est primi gradus et duas tantum variabiles s et u involvit, frustra tamen omnis labor in ea solvenda impendi videtur, unde multo minus quicquam circa aequationem aliquanto generaliorem, in qua inerat constans a, sperare licebit, nisi forte quis obiicere velit, si insuper vel massa A vel B evanescens statueretur, solutionem facile perfici posse, quod quidem per se est perspicuum, neque hic efferri meretur.

9 Editio princeps: $\frac{\partial p}{s} = \frac{\partial u}{s-u}$.

ASTRONOMIA MECHANICA

Commentatio 834 indicis Enestroemiani
Opera postuma 2, 1862, p. 177–316
(Kommentar zu E 834)

CAPUT I

De viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur

1. **Definitio 1.** *Astronomia mechanica* est scientia motus corporum coelestium ex viribus, quibus sollicitantur, determinandi.

2. **Corollarium 1.** Cognitis viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur, eorum motus per principia mechanica determinatur, ex quo haec scientia nomen Astronomiae mechanicae est adepta.

3. **Corollarium 2.** Ante omnia ergo vires nosse oportet, quibus corpora coelestia sollicitantur, quarum cognitio cum ex suis causis cognosci nequeat, earum indolem ex ipsis phaenomenis scrutari convenit.

4. **Corollarium 3.** Si enim corpora coelestia a nullis viribus sollicitarentur, singula vel quiescerent, vel uniformiter in directum progrederentur, secundum prima Mechanicae principia.

5. **Scholion 1.** Quatenus scilicet corpora coelestia non uniformiter in directum incedunt, sed vel celeritate variata, vel secundum lineas curvas progrediuntur, eatenus vires adsint necesse est, quibus eorum motus afficiatur. Atque hoc non solum de motu absoluto valet, sed etiam de respectivo, cum semper vires concipi possint, quibus motus cuiusquam corporis, qualis ex alio apparet, producatur. In Astronomia autem non tam motus corporum coelestium absolutos spectamus, quam eos, quibus spectatori in quopiam loco constituto moveri videntur, etiamsi forte hic ipse locus quomodocunque circumferatur. Hic ergo locus spectari solet tanquam absolute quiescens, eiusque respectu corporum coelestium motus ita considerari debent, ut vires, quae talem motum producere valeant, definiantur. Ita vires assignari possent, quae planetis eos motus irregulares inducerent, quibus ex terra visi incedere observantur, verum hoc modo illae vires nimis prodirent complicatae, quam ut earum existentiam in mundo agnoscere liceret. Quam ob causam talem investigationem respectu plurium locorum, in quibus spectator concipiatur, suscipi conveniet, et pro quo in viribus inventis maxima simplicitas inesse deprehenditur, eas demum tanquam in mundo revera existentes admittere fas erit. Dummodo enim vires invenerimus, quae pro dato spectatoris loco motibus coelestibus producendis fuerint pares, eas tanquam revera existentes considerare possumus, etiamsi forte ob motum spectatoris longe aliae vires in mundo existerent, quandoquidem hic nobis tantum est propositum motus apparentes explicare.

6. **Scholion 2.** Ad hanc ergo virium investigationem instituendam nosse oportet motus corporum coelestium, qui quo accuratius fuerint perspecti, eo certius illarum virium indolem cognoscere licebit. Quare si quilibet motus peculiarem virium legem postularet, ita ut inde pro reliquis nihil concludere liceret, hinc etiam ipsa motuum cognitio nihil lucri adipisceretur; sin autem eveniat, ut vires pro omnibus motibus inventae ad communem quandam regulam referantur, hinc sine dubio plurimum lucis consequemur, cum inde etiam eorum motuum, quorum ratio per observationes non satis fuerit explorata, explicatio peti queat. Hocque ergo casu ex Astronomia mechanica maxima incrementa in Astronomiam practicam transferrentur. Atque istud institutum summus quondam vir Isaacus Newtonus felicissimo successu absolverit, dum ex collatione phaenomenorum cum principiis mechanicis elegantissimam aeque ac simplicissimam legem detexit, quae omnes vires coelestes complecteretur[1]. Haec itaque virium lex fundamentum universae Astronomiae mechanicae constituet, unde omnium motuum coelestium ratio est repetenda, quod felicissimum inventum, cum phaenomenis potissimum innitatur, instar hypothesis hic proponam et ad usum accomodabo.

7. **Hypothesis 1.** *Corpora coelestia perinde inter se commoventur, ac si singula se mutuo attraherent viribus reciproce quadratorum distantiis proportionalibus.*

8. **Explicatio.** De tellure res est manifesta, cum omnia corpora circa terram existentia deorsum urgeantur vi, quae gravitas appellatur, et sine dubio ad multo maiores distantias extenditur, quam experimenta capere licet. Luna enim ab eadem vi sollicitari deprehenditur, quae autem multo minor est quam prope terrae superficiem, hocque fere in ratione reciproca duplicata distantiae. Scilicet cum luna circiter sexagies magis sit remota a centro terrae quam corpora in eius superficie sita, vis, qua luna terram versus urgetur, sexagies minor est aestimanda quam vis gravitatis in superficie, quemadmodum ex motu lunae concludere licet. Gravitas quidem in superficie terrae est effectus mixtus ex vero corporum nisu deorsum directo et vi centrifuga e motu terrae diurno orta, unde potissimum evenit, ut gravitas neque ubique praecise ad centrum terrae dirigatur, neque eiusdem sit magnitudinis. Seposita autem vi centrifuga, quippe cuius corpora longius a terra remota sunt expertia, nisus ad eius centrum directus satis exacte distantiarum ab eo quadratis reciproce proportionalis deprehenditur. Concesso igitur hoc, quod omnia corpora, quantumvis a terra fuerint remota, ad eius centrum quasi trahantur huiusmodi vi, similes vires Newtonus singulis corporibus mundanis tribuit, ita ut eorum quodque reliqua corpora ad se attrahat viribus in ratione duplicata distantiarum decrescentibus. Atque in hac lege contineri sunt censendae omnes vires, quibus corporum coelestium motus reguntur.

9. **Corollarium 1.** Cum istae vires attractrices corporum mundanorum in ratione duplicata distantiarum decrescant, in maximis distantiis tam parvae evadunt, ut pro evanescentibus haberi queant.

1 Cf. [Newton 1687], Def. I; Lib. III, Prop. I–III, Theor. I–III; Prop. VII, Theor. VII.

10. **Corollarium 2.** Hinc cum stellae fixae ad tam enormes distantias a nobis et toto systemate solari sint remotae, vires, quibus sol et planetae ad stellas fixas attrahuntur, pro nihilo sunt habendae.

11. **Corollarium 3.** Planetarum igitur et cometarum motus a nullis aliis viribus perturbari sunt censendi, nisi quibus vel ad solem vel ad reliquos planetas gravitatione mutua sollicitantur.

12. **Scholion 1.** Haec virium mundanarum lex per phaenomena stabilita etsi in magnis intervallis veritati apprime consentanea deprehenditur, tamen in minoribus distantiis, praecipue ubi corpus attractum intra superficiem corporis attrahentis est situm, a veritate vehementer recedit. Evanescente enim distantia corporis attracti a centro corporis attrahentis, secundum hanc legem vis attrahens infinita prodiret, id quod sine dubio rerum naturae adversaretur. Quin potius statuere debemus, si in terrae visceribus experimenta capere liceret, quo propius ad eius centrum pertingeremus, eo minorem esse futuram vim gravitatis, cum in ipso centro plane in nihilum abire necesse sit ob defectum rationis, cur potius in hanc quam aliam plagam dirigeretur. Ex quo etiam Newtonus statuit[2], a terrae superficie intus ad eius centrum penetrando, vim gravitatis iterum decrescere atque ipsis a centro distantiis esse proportionalem, quem saltum ex principiis gravitationis universalis egregie explicavit, ita ut lex illa ad corpora extra se posita nullum detrimentum patiatur. Cum igitur in Astronomia corpora tantum longis intervallis a se invicem dissita considerentur, sine ulla haesitatione phaenomena sequentes agnoscere debemus vires, quibus ea se mutuo attrahunt, rationem reciprocam duplicatam distantiarum sequi, atque esse directas ad cuiusque corporis attrahentis centrum, siquidem figuram habeant sphaericam, vel potius centrum inertiae, si ab hac figura abludant, quod quidem exiguum discrimen in tantis distantiis pro nihilo est habendum. Quamvis enim in superficie terrae gravitas non ubique ad eius centrum dirigatur, tamen in grandibus ab ea distantiis, etiamsi gravitatis directio aliquantillum centrum praetergrediatur, haec tantilla aberratio in motuum determinatione nullius plane est momenti.

13. **Scholion 2.** Quando autem statuimus singula corpora coelestia perinde ac terram eiusmodi proprietate esse praedita, qua corpora extra se posita attrahant vi quadrato distantiae reciproce proportionali, haec virium ratio de eadem vel aequalibus massis corporis attracti est interpretanda. Posita scilicet massa corporis attracti $= M$, eiusque distantia a centro corporis attrahentis $= x$; si vis, qua eo impellitur, fuerit V, eadem massa M in alia distantia $= y$ a centro eiusdem corporis attrahentis remota eo impelletur vi U, ut sit

$$V : U = \frac{1}{xx} : \frac{1}{yy} \quad \text{seu} \quad U = \frac{xx}{yy} V \, .$$

Unde si pro una quadam distantia innotescat vis attractrix, pro alia quacunque distantia facile definietur, siquidem ambo corpora tam attrahens quam attractum

2 Cf. [Newton 1687], Lib. III, Prop. IX, Theor. IX.

maneant eadem. Sin autem massa corporis attracti fuerit maior vel minor, vis attractrix praeterea in eadem ratione erit augenda vel minuenda, ut mox declarabimus. Tum vero etiam vis attrahens diversorum corporum coelestium plurimum discrepat, ita ut etiam in pari distantia diversas vires exerant. Scilicet cum vis attrahens terrae in superficie, seu distantia ab eius centro radio eius aequali, sit ipsa gravitas, pro aliis corporibus coelestibus distantia, ad quam vis eorum attractrix gravitati est aequalis, modo maior modo minor esse potest quam radius terrae; unde dicimus alia corpora coelestia maiori, alia minori facultate attrahendi pollere, etiamsi pro unoquoque vis attrahens sequatur rationem reciprocam duplicatam distantiarum.

14. **Hypothesis 2.** *Vires, quibus diversa corpora ab eodem corpore coelesti in eadem distantia attrahuntur, sunt ut eorum massae, ac si distantiae fuerint diversae, rationem sequantur compositam ex ratione massarum et reciproce duplicata distantiarum.*

15. **Corollarium 1.** Vis ergo attractrix corporum coelestium perinde ac gravitas terrestris secundum quantitatem materiae in corpora agit, ita ut nisus cuiusque corporis sit eius massae proportionalis, siquidem distantia fuerit eadem.

16. **Corollarium 2.** Hae igitur vires coelestes corpora quasi penetrant, in eaque, quatenus inertia sunt praedita, agunt, ita ut, quo maior fuerit massa cuiuspiam corporis, ideo fortius a quolibet corpore coelesti attrahatur.

17. **Corollarium 3.** Hinc vis, qua corpus quodvis ad aliquod corpus coeleste attrahitur, est aggregatum omnium virium elementarium, quibus singula corporis elementa pro ratione massae seu inertiae sollicitantur.

18. **Scholion.** De corporibus circa terram sitis per experimenta est evictum eorum gravitatem seu pondus ipsorum massae esse proportionale, cum singulae particulae seorsim gravitent in ratione massae. Quare cum vis attractrix corporum coelestium pari ratione sit comparata atque vis gravitatis telluris, nullum etiam est dubium, quin eorum vires parem sequantur legem atque corpora attracta pro ratione materiae seu massae afficiunt. Unde si singulae corporis particulae a corpore coelesti aeque distent, quod evenire censendum est, si magnitudo corporis attracti prae eius distantia a centro corporis attrahentis tam sit exigua ut pro nihilo reputari queat, singulae vires elementares erunt aequales sub directionibus inter se parallelis; hincque vis tota earum summae aequalis, eiusque directio per centrum inertiae corporis attracti transire est censenda. Sin autem corporis attracti magnitudo ad distantiam a centro corporis attrahentis notabilem teneat rationem, ut vires elementares, quibus singula corporis elementa attrahuntur, neque pro aequalibus, ob inaequales elementorum distantias, neque directiones pro parallelis inter se haberi queant, vis tota inde demum per calculum est colligenda; hincque evenire potest, ut vis tota neque massae corporis attracti sit proportionalis, neque per eius centrum inertiae transeat. Ex quo proprie loquendo ambae allatae hypotheses tantum ad corpuscula quasi infinite parva, quae ad corpora coelestia attrahantur, sunt restringendae, ita ut vires tantum elementa-

res praefatas leges sequantur. Unde deinceps vires totae, quibus corpora maiora attrahuntur, per regulas staticas demum colligi debeant.

19. **Hypothesis 3.** *Corpora coelestia in aequalibus distantiis eo maiores exerunt vires attractrices, quo maiores fuerint ipsorum massae, atque in inaequalibus distantiis vires attractrices corporum coelestium sunt in ratione composita massarum et reciproca duplicata distantiarum.*

20. **Corollarium 1.** Hinc si massa corporis coelestis fuerit $= A$, in distantia x ab eius centro erit vis attractrix ut $\frac{A}{xx}$, quae propterea est directe ut massa corporis attrahentis A et reciproce ut quadratum distantiae ab eius centro.

21. **Corollarium 2.** Haec autem lex tantum valet, si corporis attracti massa fuerit eadem; alioquin enim cum illa ratione composita insuper ratio massae corporis attracti coniungi debet, secundum hypothesin praecedentem.

22. **Corollarium 3.** Ita si massa corporis coelestis sit $= A$, corporis autem attracti massa $= M$, huiusque ab illius centro distantia $= x$, erit vis, qua hoc ad illud attrahitur ut $\frac{AM}{xx}$. Quia autem in motus determinatione vis haec semper per massam corporis attracti M dividi debet, in calculum tantum ingreditur formula $\frac{A}{xx}$, massa M inde iterum egrediente.

23. **Scholion 1.** Ista hypothesis non aeque certo ex phaenomenis colligitur ac praecedentes, etsi enim inde veram virium quantitatem concludere licet, tamen nulla constat ratio massas corporum coelestium dignoscendi. Eorum quidem magnitudinem Astronomi sollicite definire conantur, verum hinc de massa, quoniam pro volumine vehementer discrepare potest, nihil statuere licet. Haec massae autem ratione omnino carere possemus, si pro quovis corpore coelesti eam distantiam determinaremus, in qua vis eius attractrix aequalis esset futura vi gravitatis in superficie terrae. Ita si pro quopiam corpore coelesti haec distantia fuerit $= f$, pro alia quacunque distantia x eius vis attractrix erit $= \frac{ff}{xx}$ unitate gravitatem exprimente: Sicque sufficit pro quolibet corpore coelesti distantiam hanc f ipsi convenientem nosse, parumque interest, quomodo haec distantia ad massam corporis attrahentis se sit habitura. Newtonus autem statuit[3] quadratum istius distantiae semper esse massae corporis attrahentis proportionale; ita ut loco ff massa A substitui queat, – quae propositio, si de eius veritate convicti essemus, non solum pro pulcherrima esset habenda, sed etiam plurimum lucis ad naturae mysteria scrutanda esset allatura. Phaenomena autem huic propositioni iam insignem probabilitatis gradum conciliant, quoniam quo corpora coelestia fuerint maiora vel minora, etiam quadratum distantiae f illis respondentis maius minusve deprehenditur: ratione autem ea propositio multo magis confirmari potest. Primum enim cum gravitatio in corporibus coelestibus sit reciproca, ex

3 Cf. [Newton 1687], Lib. III, Prop. VI, Theor. VI.

principio aequalitatis inter actionem et reactionem duo corpora se mutuo attrahentia paribus viribus in se invicem niti debent. Hinc si eorum massae sint A et B, et distantiae, ad quas eorum vires attractrices gravitati aequantur, sint a et b, distantia inter centra corporum existente $= x$, erit per praecedentem hypothesin vis, qua corpus B ad A urgetur $= \frac{aaB}{xx}$, vis autem, qua corpus A vicissim ad B urgetur $= \frac{bbA}{xx}$, quae duae vires si censeantur aequales, fit $aa : bb = A : B$, prorsus ut vult NEWTONUS. Quodsi haec propositio admittatur, inde etiam haec eximia proprietas consequitur, quod plurium corporum se mutuo hac lege attrahentium commune centrum inertiae perpetuo vel quiescat, vel uniformiter in directum proferatur; – quae cum tanquam constans naturae lex assumenda videatur, inde vicissim veritas nostrae hypotheseos evincitur.

24. **Scholion 2.** Quoniam igitur vis attractrix massae corporis attrahentis est proportionalis, ea ita inde oriri est iudicanda, ut singula corporis elementa seorsim vires attractrices exerant, ex quarum collectione demum vis tota attrahens nascatur. Lex ergo praescripta tantum ad vires elementares, quibus singula corporis elementa ad se attrahuntur, proprie pertineri est censenda, neque stricte ad corpora finita extendi patitur, nisi haec corpora tantopere a se invicem fuerint remota, ut eorum magnitudo prae distantia quasi evanescat. Eatenus ergo tantum haec lex attrahendi in corporibus mundanis deprehenditur, quatenus ea tam vastis intervallis a se invicem sunt seiuncta, quae si sibi multo essent propiora, nullum est dubium quin vires eorum attractrices ab hac lege sint aberraturae, nisi forte eorum figura perfecte fuerit sphaerica. Quare si hoc modo praecedentem hypothesin restringamus, uti ratio suadet, universum Astronomiae mechanicae fundamentum sequenti hypothesi continebitur.

25. **Hypothesis 4.** *Omnia materiae elementa, ex quibus corpora mundana sunt conflata, vi pollent attrahendi, quae cuiusque massae directe, inverso autem quadrato distantiae est proportionalis, cum qua ratione insuper massa corpusculi attracti est coniungenda.*

26. **Corollarium 1.** Positis ergo massis duorum elementorum materiae μ et ν, eorumque distantia $= z$, erit vis, qua alterum ab altero attrahitur ut $\frac{\mu\nu}{zz}$, atque ex viribus elementaribus, quibus singula duorum corporum finitorum se mutuo attrahunt, vires ambo corpora tota sollicitantes debent colligi.

27. **Corollarium 2.** Cum haec vis elementaris sit ut $\frac{\mu\nu}{zz}$, factor quidam constans C adiungi debet, ut formula $\frac{C\mu\nu}{zz}$ ipsam vim exprimat; atque haec quantitas C perpetuo erit eadem ubicunque locorum ista duo elementa materiae fuerint posita.

28. **Corollarium 3.** Corpora ergo coelestia eatenus tantum se mutuo attrahunt, quatenus constant materia, cuius omnia elementa tali vi se attrahendi sunt praedita. Ex quo patet, si corpora non fuerint admodum a se invicem re-

mota, simulque figuram habeant irregularem, fieri posse, ut vis tota e viribus elementaribus resultans multum a simplicitate formulae exhibitae discrepet.

29. **Scholion 1.** Cum huiusmodi vis attrahendi omnibus corporibus coelestibus conveniat, ideoque omnibus elementis corporum, ubicunque reperiantur, tribui debeat, ea tanquam proprietas universalis materiae spectari potest, cuius existentiam realem ex phaenomenis cum ratione coniunctis evictam agnoscere debemus. Certum itaque est omnia materiae elementa tali vi attrahendi, qualem descripsimus, esse praedita, neque de hoc ullo modo dubitare licet. Utrum autem haec vis omni materiae ex sua natura competat perinde atque inertia et impenetrabilitas? an vero a causa quapiam externa producatur? multum inter Philosophos dubitatur. Qui priorem sententiam propugnant, eximium firmamentum inveniunt in universalitate istius indolis attractricis, quae cum in omnibus corporibus inesse, atque adeo eorum massae proportionalis deprehendatur, eam pariter atque inertiam materiae essentialem esse autumant, ita ut eius causa extrinsecus frustra quaeratur; quin etiam quaerere solent, an non Creator per omnipotentiam corporibus talem proprietatem infundere potuerit? quod negare ipsis adeo impium videtur. Deinde in hoc non parum subsidii sibi situm esse arbitrantur, quod nemo adhuc istius phaenomeni latissime patentis causam externam dilucide docere voluerit. Qui autem contrariae sententiae sunt addicti, haec argumenta gravibus rationibus infirmare conantur, maluntque credere dari huius phaenomeni causam externam, etiamsi eam nobis nullo modo perspicere liceat, quam concedere eius rationem in ipsa materiae indole esse positam. Ad nostrum autem institutum parum refert, utrum causa externa existat, nec ne? sufficit enim nosse in omnibus corporibus mundi talem vim attrahendi revera inesse, cum nobis id tantum sit propositum, ut quomodo motus corporum coelestium ab his viribus afficiantur, investigemus.

30. **Scholion 2.** Prior sententia, qua materiae vis attractrix tanquam proprietas essentialis tribuitur, si esset vera, hoc commodi afferret, ut ulteriori investigatione causae liberaremur; dum altera sententia naturae scrutatoribus hoc onus gravissimum esset impositura, cui expediendo vires eorum fortasse nunquam sufficerent. Ex quo ad nostrum commodum utique esset optandum, ut prior sententia veritati foret consentanea. Multis autem premitur difficultatibus, quas cum primis cognitionis nostrae principiis minime conciliare licet: si enim corpus ab alio attractum moveri incipit, causa motus non in illo sed in hoc altero est ponenda, quod cum ab illo sit remotum, concedendum est fieri posse, ut corpus quaqua versus a nullis aliis corporibus cinctum, sed quasi in vacuo positum, sponte moveri incipiat, etiamsi nusquam tangatur; neque tamen motus causam in ipso, sed in alio quodam corpore longissime ab eo remoto esse quaerendam, hocque perinde evenire sive spatium inter corpora sit vacuum, sive plenum. Corpus ergo, quatenus vi attrahendi esset praeditum, ad omnia alia corpora utrumque remota quasi vires emitteret, quibus alia quasi comprehenderet et ad se arriperet. Quam actionem in distans qui concoquere non possunt, cum nullo modo concipi queat,

ad materiam quandam subtilem confugiunt, quae pressione in corpora agens ea phaenomena producat, quae priores attractioni, tanquam essentiali omnium corporum proprietati, adscribunt, etiamsi et illi modum, quo hoc efficitur, explicare haud valeant.

31. **Scholion 3.** Hactenus saltem alium modum, quo duo corpora in se invicem agant, non concipimus, nisi quando in se mutuo impetum faciunt et ad contactum perveniunt; cum enim tum utrumque in statu suo perseverare annitatur, hoc autem fieri nequeat, nisi se mutuo penetrent, eorum impenetrabilitas in causa est quominus hoc eveniat. Ex ea ergo nascantur, necesse est, vires utriusque statum ita immutantes, ut penetratio evitetur. Experientia etiam testatur, hoc casu maiores vires utrinque non exeri, quam quae penetrationem avertere valeant. Istarum igitur virium, quarum effectus in conflictu corporum cernitur, origo in eorum impenetrabilitate manifesto est posita, unde multo minus percipere licet, quomodo duo corpora remota in se invicem agere valeant; ac si quis statuat corpora ab aliis quantumvis remotis sine adminiculo medii inter ea existentis affici posse, omnia cognitionis nostrae principia funditus everti videntur, neque apparet quo iure tum siderum influxus aliaque superstitionis commenta negari queant. Qui quidem a Leibnizii *Harmonia praestabilita*[4] abhorrent, concedere coguntur spirituum actioni corpora esse subiecta, quod etiam Leibniziani de numine supremo negare non audent; spirituum autem actio in corpora ab omni contactu certe immunis est statuenda, id quod attractioni favere videtur. Verum si corpora a spiritu concitantur, si non contactus, saltem praesentia quaedam concipi debet, ita ut etiam hinc actio corporum in distans nullum firmamentum recipiat. Quare qui dicunt corporibus a Deo vim alia corpora quantumvis dissita attrahendi tribui potuisse, nihil aliud dicere videntur, nisi Deum perpetuo immediate corpora ad se invicem impellere. Verum omissa hac disputatione, ad Physicam potius quam huc pertinente, cum certum sit singula materiae elementa perinde ad se mutuo impelli, ac si se attraherent, videamus quales inde vires pro corporibus finitae magnitudinis nascantur.

32. **Theorema.** Corpus rigidum a viribus, quibus singula eius elementa se mutuo attrahunt, ad motum neutiquam sollicitatur.

Demonstratio. Veritas huius theorematis isto nititur fundamento, quod vires, quibus duo elementa se mutuo attrahunt, utrinque sint aequales. Si enim duo concipiantur elementa, quorum massulae sint μ et ν, distantia vero $= z$, vis, qua μ et ν attrahitur, est $= \dfrac{C\mu\nu}{zz}$ (§ 26), ac vicissim vis, qua ν ad μ attrahitur, est $= \dfrac{C\mu\nu}{zz}$. Sunt igitur hae vires aequales, et quia alterum ad alterum urgetur, earum directiones sunt contrariae. Iam in corpore elementum quodcunque ad reliqua omnia attrahitur, et sumtis binis quibusque, vires, quibus alterum ab altero attrahitur, sunt aequales et contrariae, ideoque in corpore rigido se mutuo destruunt. Quod cum eveniat, quaecunque bina elementa considerentur, necesse

4 Cf. [Leibniz 1695].

est omnes vires elementares, quibus cuncta elementa in se mutuo agunt, se mutuo destruere, propterea quod quaelibet vis habeat in corpore sibi aequalem et contrariam.

33. **Corollarium 1.** Cum in hac mutua virium elementarium destructione ratio distantiae z non in censum veniat, patet theorema fore verum, etiamsi attractio aliam quamcunque distantiae rationem sequeretur, dummodo vires, quibus duo elementa se mutuo attrahunt, utrinque fuerint aequales.

34. **Corollarium 2.** Sive ergo corpus rigidum quiescat, sive moveatur, a viribus, quibus eius elementa se mutuo appetunt, neque eius status quietis, neque motus perturbabitur, sed a viribus externis aeque afficietur, ac si elementa eius vi attractrice carerent.

35. **Corollarium 3.** Quae ergo in Mechanica de motu corporum rigidorum traduntur, ea omnia veritati consentanea manent, etiamsi elementorum mutua attractio, a qua quidem ibi animum abstraxeramus, accedat, neque quidquam ibi propterea erit immutandum.

36. **Scholion 1.** Quod ad formulam $\frac{\mu\nu}{zz}$ attinet, cui vis, qua massula μ aliam massulam ν in distantia $= z$ remotam attrahit, est proportionalis, quatenus ea constat ex reciproco quadrato distantiae et massa corpusculi attracti ν, eius veritatem per phaenomena stabilivimus. Quatenus autem ea vis ipsi massae corpusculi attrahentis μ est proportionalis, id quidem sola ratione collegimus. Nunc igitur haec postrema ratio multo fortius corroboratur: Cum enim phaenomena etiam evincant motum cuiusque corporis coelestis non perturbari a viribus, quibus eius partes se mutuo attrahunt, hinc vicissim intelligitur, vires, quibus bina quaeque elementa se mutuo attrahunt, aequales esse oportere, quoniam alioquin evenire posset, ut hae vires elementares se mutuo non destruerent. Quo hoc clarius perspiciatur, sumamus vim attractricem non ipsi massae μ corpusculi attrahentis, sed eius quadrato μ^2 esse proportionalem, corpusque rigidum tantum ex duobus elementis μ et ν intervallo z dissitis esse conflatum. Quo posito erit vis, qua ν ad μ attrahitur $= \frac{C\mu^2\nu}{zz}$, contra vero vis, qua μ ad ν attrahitur $\frac{C\mu\nu^2}{zz}$, quae ergo duae vires non essent aequales, nisi elementa fuerint aequalia, ideoque corpus totum excessu virium $\frac{C\mu\nu}{zz}(\mu-\nu)$ ad motum sollicitaretur, quod eo magis esset absurdum, cum idem corpus infinitis modis in duas partes dissectum concipi queat, et quaelibet sectio peculiarem vim esset exhibitura, cuius etiam directio a sectionis ratione pendens non foret certa. Quod cum sit maxime absurdum, extra omne dubium est positum, vim attrahentem cuiusque elementi ipsius massae esse proportionalem, hancque rationis $\frac{\mu\nu}{zz}$ partem adeo multo certius esse evictam quam reliquas, cum hae tantum ex phaenomenis sint conclusae, illa autem adeo principio contradictionis innitatur.

37. **Scholion 2.** Hoc theorema quidem tantum ad corpora rigida, quorum partes ita firmo nexu inter se sunt coniuncta, ut a nullis viribus de situ suo re-

lativo dimoveri queant, accommodavimus, sed etiam quodammodo ad corpora flexibilia atque etiam fluida extenditur, quatenus scilicet tantum ad motum progressivum centri inertiae spectamus. Quodsi enim elementa corporis fuerint a se invicem dissoluta, quoniam vires, quibus bina quaeque se mutuo attrahunt, sunt aequales et contrariae, hinc nulla vis in centrum inertiae resultat. Ab his scilicet viribus fieri potest, ut partes quidem corporis quomodocunque inter se commoveantur, commune autem centrum inertiae iugiter quiescat, vel si semel moveri coeperit, perpetuo uniformiter in linea recta progrediatur. Ex quo efficitur, ut quotcunque fuerint corpora se mutuo attrahentia, eorum commune centrum inertiae vel quiescat, vel uniformiter in directum promoveatur. Hinc ergo certum est omnium corporum mundanorum commune centrum inertiae vel in perpetua quiete versari, vel uniformiter in directum proferri. Atque hoc iam statim in ipso limine certissime affirmare licet, etiamsi adhuc minime pateat, quo motu singula corpora concitentur, in quo sine dubio veritas maximi momenti continetur.

38. **Problema 1.** Si corpus finitum, data figura praeditum, attrahat corpusculum ad datam et insignem ab eo distantiam remotum, definire tam quantitatem quam directionem eius vis, qua corpusculum sollicitatur.

Solutio. Cum corpusculum a singulis elementis corporis finiti attrahatur, definiri oportet vim ex omnibus istis viribus elementaribus resultantem. Quoniam igitur corporis finiti figura est data, tam eius centrum inertiae quam ternos axes principales, eorumque respectu momenta inertiae pro cognitis assumi licet. Sit igitur (Fig. 1) J centrum inertiae corporis attrahentis, et JA, JB, JC eius tres axes

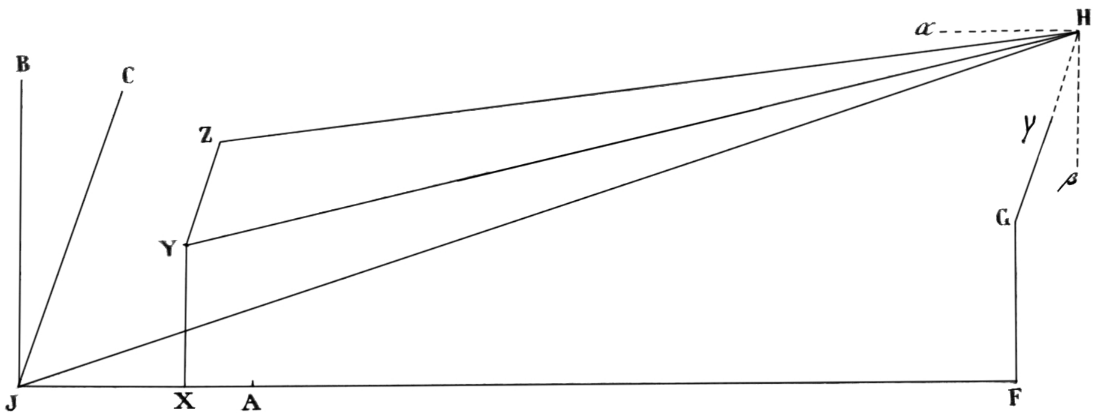


Fig. 1

principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, denotante M corporis massam. Corpusculum autem attractum, cuius massa $= m$, sit in H in distantia ab illius centro inertiae $JH = h$, quae recta cum axibus principalibus faciat angulos $HJA = \alpha$, $HJB = \beta$ et $HJC = \gamma$, ut sit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Hinc demisso ab H ad planum AJB perpendiculo HG, et ex G ad JA productam normali GF, erit $JF = h\cos\alpha$, $FG = h\cos\beta$ et $GH = h\cos\gamma$. Concipiatur iam corporis elementum quodcunque in Z, pro quo coordinatae axibus principalibus parallelae sint $JX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; massa autem istius elementi sit $= dM$, eritque ex indole axium principalium et centri inertiae $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$; porro $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$, $\int yz\,dM = 0$, atque $\int xx\,dM = \frac{1}{2}M(bb+cc-aa)$, $\int yy\,dM = \frac{1}{2}M(aa+cc-bb)$, $\int zz\,dM = \frac{1}{2}M(aa+bb-cc)$. Ducatur recta HZ, qua posita $= v$ erit

$$v = \sqrt{\left((h\cos\alpha - x)^2 + (h\cos\beta - y)^2 + (h\cos\gamma - z)^2\right)}\ ,$$

seu

$$v = \sqrt{\left(hh - 2h(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) + x^2 + y^2 + z^2\right)}\ .$$

His positis, corpusculum m in H ad elementum dM in Z situm attrahitur vi $= \dfrac{Cm\,dM}{vv}$, ubi quidem coëfficientem constantem C negligere licet, deinceps, ubi opus fuerit, facile introducendum; ita ut vis haec secundum HZ sit $= \dfrac{m\,dM}{vv}$, quae resoluta secundum directiones $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ axibus principalibus parallelas praebebit

$$\begin{aligned}
\text{vim secundum } H\alpha\ &= \frac{m(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3}\ ,\\
\text{vim secundum } H\beta\ &= \frac{m(h\cos\beta - y)\,dM}{v^3}\ ,\\
\text{vim secundum } H\gamma\ &= \frac{m(h\cos\gamma - z)\,dM}{v^3}\ .
\end{aligned}$$

Hinc ergo integrando vis tota, qua corpusculum m in H sollicitatur, componitur ex his tribus viribus:

$$\begin{aligned}
\text{vi secundum } H\alpha\ &= m\int\frac{(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3}\ ,\\
\text{vi secundum } H\beta\ &= m\int\frac{(h\cos\beta - y)\,dM}{v^3}\ ,\\
\text{vi secundum } H\gamma\ &= m\int\frac{(h\cos\gamma - z)\,dM}{v^3}\ ,
\end{aligned}$$

quae formulae ita generaliter ulterius tractari nequeunt. Sed quia distantia corpusculi attracti $JH = h$ prae magnitudine corporis praegrandis supponitur, ita ut maximi valores, quos quidem coordinatae x, y, z recipere possunt, prae h sint satis exigui, eiusmodi approximatione uti licebit, qua valor ipsius v in seriem resolvatur, in qua coordinatarum x, y, z potestates, secunda altiores, reiiciantur; hinc ergo fiet

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v^3} = \frac{1}{h^3} &+ \frac{3(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{h^4}\\
&- \frac{3(xx+yy+zz)}{2h^5}\\
&+ \frac{15(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}{2h^5}\ ,
\end{aligned}$$

unde colligitur pariter non ultra secundam potestatem ascendendo

$$\begin{aligned}\frac{h\cos\alpha - x}{v^3} &= \frac{\cos\alpha}{hh} - \frac{x}{h^3}\Big(1 - 3\cos^2\alpha\Big) + \frac{3y\cos\alpha\cos\beta}{h^3} + \frac{3z\cos\alpha\cos\gamma}{h^3}\\ &- \frac{3xx\cos\alpha}{2h^4}\Big(3 - 5\cos^2\alpha\Big) - \frac{3yy\cos\alpha}{2h^4}\Big(1 - 5\cos^2\beta\Big) - \frac{3zz\cos\alpha}{2h^4}\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big)\\ &- \frac{3xy\cos\beta}{h^4}\Big(1 - 5\cos^2\alpha\Big) - \frac{3xz\cos\gamma}{h^4}\Big(1 - 5\cos^2\alpha\Big) + \frac{15yz\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{h^4}\,.\end{aligned}$$

Multiplicetur haec formula per dM, captisque singulorum membrorum integralibus secundum praecepta exposita, habebimus

$$\begin{aligned}\int\frac{(h\cos\alpha - x)}{v^3}\,dM = \frac{M\cos\alpha}{hh} &- \frac{3M(bb + cc - aa)}{4h^4}\cos\alpha\Big(3 - 5\cos^2\alpha\Big)\\ &- \frac{3M(aa + cc - bb)}{4h^4}\cos\alpha\Big(1 - 5\cos^2\beta\Big)\\ &- \frac{3M(aa + bb - cc)}{4h^4}\cos\alpha\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big)\,,\end{aligned}$$

quae forma ob $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ad sequentem revocatur:

$$\begin{aligned}\int\frac{(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3} = \frac{M\cos\alpha}{hh} &+ \frac{3Maa\cos\alpha}{2h^4}\Big(3 - 5\cos^2\alpha\Big)\\ &+ \frac{3Mbb\cos\alpha}{2h^4}\Big(1 - 5\cos^2\beta\Big)\\ &+ \frac{3Mcc\cos\alpha}{2h^4}\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big)\,.\end{aligned}$$

Si simili modo reliqua duo integralia colligantur, erunt ternae vires, quibus corpusculum m in H a corpore finito sollicitatur, sequentes:

$$\begin{aligned}\text{secundum } H\alpha &= \frac{Mm\cos\alpha}{hh}\bigg(1 + \frac{3aa}{2hh}\Big(3 - 5\cos^2\alpha\Big)\\ &\qquad + \frac{3bb}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\beta\Big) + \frac{3cc}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big)\bigg)\,,\\ \text{secundum } H\beta &= \frac{Mm\cos\beta}{hh}\bigg(1 + \frac{3bb}{2hh}\Big(3 - 5\cos^2\beta\Big)\\ &\qquad + \frac{3cc}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\gamma\Big) + \frac{3aa}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\alpha\Big)\bigg)\,,\\ \text{secundum } H\gamma &= \frac{Mm\cos\gamma}{hh}\bigg(1 + \frac{3cc}{2hh}\Big(3 - 5\cos^2\gamma\Big)\\ &\qquad + \frac{3aa}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\alpha\Big) + \frac{3bb}{2hh}\Big(1 - 5\cos^2\beta\Big)\bigg)\,,\end{aligned}$$

quae vires iam pro lubitu ad alias directiones reduci possunt.

39. **Corollarium 1.** Si harum trium virium quadrata colligantur, et ex summa radix quadrata extrahatur, prodit vis illis aequivalens, quae ergo simili approximatione adhibita reperitur:

Vis aequivalens

$$= \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\alpha\right) + \frac{3bb}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\beta\right) + \frac{3cc}{2hh}\left(1 - 3\cos^2\gamma\right)\right),$$

cuius directio deflectet a directione HJ angulo exiguo, qui est

$$= \frac{3}{hh}\sqrt{\left((aa-bb)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + (aa-cc)^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma \right.}$$
$$\left. + (bb-cc)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma\right).$$

40. **Corollarium 2.** Quodsi ergo corporis attrahentis terna momenta principalia fuerint inter se aequalia: $aa = bb = cc$, ob $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, erit vis, qua corpusculum H sollicitatur, $= \frac{Mm}{hh}$, eiusque directio in ipsam lineam HJ cadit, ita ut hoc casu corpusculum m in H perinde attrahatur, ac si tota corporis attrahentis massa M in ipso centro inertiae J esset collecta.

41. **Corollarium 3.** Si corpusculum attractum in axe principali corporis attrahentis JA fuerit situm, ut sit $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma = 90°$, deflexio vis attrahentis a directione HJ evanescit, ipsa vero vis attrahens erit

$$= \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3(bb + cc - 2aa)}{2hh}\right).$$

Nisi ergo sit $bb + cc = 2aa$, attractio erit vel maior vel minor, quam si tota corporis attrahentis massa in suo centro inertiae esset collecta.

42. **Corollarium 4.** Si corpus attractum ita fuerit situm, ut recta HJ ad singulos axes principales aeque inclinetur, angulo scilicet $54°44'$, tum vis attrahens erit $= \frac{Mm}{hh}$, perinde ac si massa attrahens M in centro inertiae J esset collecta, at eius directio declinabit a directione HJ angulo, qui est

$$= \frac{1}{hh}\sqrt{2\left(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc\right)}.$$

43. **Scholion 1.** Vis, qua corpusculum m a corpore M attrahitur, infinitis aliis modis repraesentari potest. Primo scilicet haec vis aequivalet vi secundum $HJ = \frac{Mm}{hh}$, et insuper his tribus viribus:

$$\text{sec. } H\alpha = \frac{3Mm\cos\alpha}{2h^4}\left(aa\left(3 - 5\cos^2\alpha\right) + bb\left(1 - 5\cos^2\beta\right) + cc\left(1 - 5\cos^2\gamma\right)\right),$$

$$\text{sec. } H\beta = \frac{3Mm\cos\beta}{2h^4}\left(bb\left(3 - 5\cos^2\beta\right) + cc\left(1 - 5\cos^2\gamma\right) + aa\left(1 - 5\cos^2\alpha\right)\right),$$

$$\text{sec. } H\gamma = \frac{3Mm\cos\gamma}{2h^4}\left(cc\left(3 - 5\cos^2\gamma\right) + aa\left(1 - 5\cos^2\alpha\right) + bb\left(1 - 5\cos^2\beta\right)\right),$$

quae prae prima sunt vehementer parvae. Deinde ista vis etiam hoc modo referri potest, ut aequivaleat vi secundum HJ

$$= \frac{Mm}{hh}\left(1+\frac{5aa}{2hh}\left(1-3\cos^2\alpha\right)+\frac{5bb}{2hh}\left(1-3\cos^2\beta\right)+\frac{5cc}{2hh}\left(1-3\cos^2\gamma\right)\right) \ ,$$

insuperque his tribus valde parvis

$$\begin{aligned} \text{vi sec. } H\alpha &= \frac{Mm(2aa-bb-cc)\cos\alpha}{h^4} \ , \\ \text{vi sec. } H\beta &= \frac{Mm(2bb-aa-cc)\cos\beta}{h^4} \ , \\ \text{vi sec. } H\gamma &= \frac{Mm(2cc-aa-bb)\cos\gamma}{h^4} \ . \end{aligned}$$

Tum vero etiam hoc modo, ut aequivaleat vi secundum HJ

$$= \frac{Mm}{hh}\left(1+\frac{3aa}{2hh}\left(1-3\cos^2\alpha\right)+\frac{3bb}{2hh}\left(1-3\cos^2\beta\right)+\frac{3cc}{2hh}\left(1-3\cos^2\gamma\right)\right) \ ,$$

et insuper his exiguis tribus:

$$\begin{aligned} \text{vi sec. } H\alpha &= \frac{3Mm\cos\alpha}{h^4}\left((aa-bb)\cos^2\beta+(aa-cc)\cos^2\gamma\right) \ , \\ \text{vi sec. } H\beta &= \frac{3Mm\cos\beta}{h^4}\left((bb-aa)\cos^2\alpha+(bb-cc)\cos^2\gamma\right) \ , \\ \text{vi sec. } H\gamma &= \frac{3Mm\cos\gamma}{h^4}\left((cc-aa)\cos^2\alpha+(cc-bb)\cos^2\beta\right) \ . \end{aligned}$$

Hinc si corpusculum m in plano axium JA et JB reperiatur, ut sit $\gamma = 90°$ et $\alpha+\beta = 90°$, vis id sollicitans constabit primo vi secundum HJ

$$= \frac{Mm}{hh}\left(1+\frac{3aa}{2hh}\left(1-3\cos^2\alpha\right)+\frac{3bb}{2hh}\left(1-3\sin^2\alpha\right)+\frac{3cc}{2hh}\right) \ ,$$

tum vero his duabus viribus:

$$\begin{aligned} \text{vi sec. } H\alpha &= \frac{3Mm(aa-bb)\cos\alpha\cos^2\beta}{h^4} \ , \\ \text{vi sec. } H\beta &= \frac{3Mm(bb-aa)\cos\beta\cos^2\alpha}{h^4} \ . \end{aligned}$$

Unde si momenta principalia respectu axium JA et JB fuerint aequalia, hae duae postremae vires evanescunt, remanetque sola vis prior secundum HJ

$$= \frac{Mm}{hh}\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2hh}\right) \ .$$

44. **Scholion 2.** Quemadmodum corpora coelestia tantopere a se invicem sunt remota, ut nostra approximatio solutionem perfectam praebere sit censenda, ita etiam commode usu venit, ut eorum momenta inertiae sint fere inter se aequalia, unde proxime perinde ad se attrahunt, ac si universa eorum massa in ipsorum centro inertiae esset collecta, quo casu vis attrahens perpetuo ad centrum inertiae foret directa, et quadrato distantiae reciproce proportionalis, prorsus uti NEWTONUS statuit. Sin autem notabilis inaequalitas inter momenta inertiae intercederet, vis attrahens ab hac simplici lege ita aberraret, ut motus corpusculi attracti nonnisi difficillime inde definiri possit, praecipue si distantia non fuerit adeo magna. Cum enim corpusculum attractum continuo situm suum respectu axium principalium mutet, in motu eius non solum distantia h, sed etiam anguli α, β, γ erunt quantitates variabiles, viresque assignatae maximam in calculo parient difficultatem. Unico casu difficultas minueretur, quando scilicet corporis attrahentis duo momenta principalia inter se fuerint aequalia, corpusque attractum in horum binorum axium plano moveatur: tum enim vis attrahens perpetuo ad centrum inertiae corporis attrahentis dirigetur, atque per solam distantiam determinabitur; verumtamen duabus constabit partibus, quarum altera quadrato, altera vero biquadrato distantiae erit reciproce proportionalis, quippe quae ut vidimus est

$$= \frac{Mm}{hh} + \frac{3Mm(cc-aa)}{2h^4},$$

ubi quidem ob duplicem rationem pars posterior prae priori est vehementer parva, primo scilicet, quod quantitas hh plurimum superet quantitates cc et aa, tum vero quod ista quadrata aa et cc sint proxime inter se aequalia. Quod quo clarius perspiciatur, sit corpus attrahens sphaeroides ellipticum homogeneum, genitum ex conversione ellipsis, cuius semiaxes sint A et C, circa axem $2C$, ita ut bini semiaxes principales JA et JB futuri sint $= A$, ac tertius $JC = C$. Cum igitur massa istius corporis sit $M = \frac{4}{3}\pi ACC$, erit momentum inertiae respectu axium JA et $JB = \frac{1}{5}M(AA+CC)$, et respectu axis $JC = \frac{2}{5}MAA$, unde pro nostra formula fiet $aa = bb = \frac{AA+CC}{5}$ et $cc = \frac{2AA}{5}$, hincque $cc - aa = \frac{AA-CC}{5}$. Quare si corpus fuerit sphaeroides compressum, uti terra, erit $AA > CC$, aliudque corpusculum circa id in plano aequatoris moveatur, vis attrahens maior erit quam $\frac{Mm}{hh}$, et excessus erit biquadrato distantiae reciproce proportionalis, tota vi existente

$$= \frac{Mm}{hh} + \frac{3Mm(AA-CC)}{10h^4}.$$

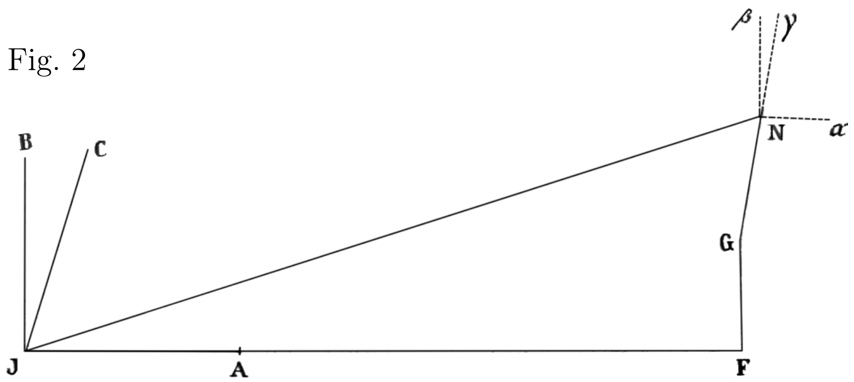
Unde si semiaxes A et C proxime fuerint aequales, pars posterior prae priori fere pro evanescente haberi potest.

45. **Scholion 3.** Cum corpus solis sit fere perfecte sphaericum, in viribus, quibus planetae ad solem urgentur, haec inaequalitas tuto negligi potest, id quod etiam de viribus, quibus planetae primarii se mutuo attrahunt, multo magis est tenendum, cum hae vires ipsae prae vi solis sint vehementer exiguae. In motu

quidem lunae aberratio figurae terrae a sphaerica alicuius momenti esse posse videtur, cum ob lunae vicinitatem, tum vero quod terrae figura magis a sphaerica recedat quam solis. Imprimis autem quando motus satellitum Jovis ac Saturni scrutari lubuerit, huius aberrationis rationem haberi conveniet, propterea quod figura Jovis non parum a sphaerica recedit, dum ratio semiaxium $A : C$ fere ut $11 : 10$ reputatur, ac vicinitas satellitum hanc aberrationem eo magis adauget. In Saturno autem praeter eandem rationem annulus in vi attrahente notabilem perturbationem generare debet. Si enim annulus tanquam pars corporis Saturni spectetur, hoc figuram sphaeroidis admodum compressi induere est censendum. His autem casibus commode evenit, ut satellites Jovis fere in plano aequatoris huius planetae, satellites Saturni autem fere in plano annuli revolvantur, quod si secus eveniret, investigationem motus satellitum ne suscipere quidem liceret. Quemadmodum autem figura corporis attrahentis huiusmodi anomaliam in vi attrahente gignere valet, ita similis anomalia quoque ex figura corporis attracti resultat, id quod in sequente problemate plenius ostendemus.

46. **Problema 2.** Si corpus finitum attrahatur ad punctum N valde remotum (Fig. 2), seu ad corpus, cuius totam massam in eo puncto collectam concipere licet, invenire vim attractricem, qua illud corpus sollicitatur.

Fig. 2



Solutio. Sit J centrum inertiae corporis attracti, et JA, JB, JC eius axes principales, quorum respectu eius momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc, denotante littera M eius massam. Corporis autem attrahentis centrum inertiae sit in N, cuius effectus ut perinde se habeat, ac si tota eius massa, quae sit $= N$, in puncto N esset collecta, huius corporis momenta inertiae omnia inter se aequalia sunt concipienda; quemadmodum ex § 40 intelligitur. Hoc posito, singula corporis ABC elementa ad ipsum punctum N attrahantur viribus distantiarum quadratis reciproce proportionalibus, et quoniam hae vires aequales sunt et contrariae viribus, quibus corpusculum in N collocatum, cuius quidem massa esset $= N$, ad singula corporis M elementa attrahitur, vis etiam tota, qua corpus M a corpore N sollicitatur, aequalis et contraria erit vi, qua corpus N, ut punctum consideratum, a corpore M attrahitur, et quam in problemate praecedente determinavimus. Ponatur ergo centrorum inertiae distantia $JN = h$, et anguli

$NJA = \alpha$, $NJB = \beta$, $NJC = \gamma$, ductisque ex N rectis $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ parallelis ternis axibus principalibus JA, JB, JC corporis attracti, vires, quibus corpus ABC sollicitatur, ita ad directiones $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ reducentur, ut sit vis

$$\begin{aligned}
\text{sec. } N\alpha &= \frac{MN\cos\alpha}{hh}\Big(1 + \frac{3aa}{2hh}\big(3 - 5\cos^2\alpha\big) \\
&\qquad + \frac{3bb}{2hh}\big(1 - 5\cos^2\beta\big) + \frac{3cc}{2hh}\big(1 - 5\cos^2\gamma\big)\Big)\,, \\
\text{sec. } N\beta &= \frac{MN\cos\beta}{hh}\Big(1 + \frac{3bb}{2hh}\big(3 - 5\cos^2\beta\big) \\
&\qquad + \frac{3cc}{2hh}\big(1 - 5\cos^2\gamma\big) + \frac{3aa}{2hh}\big(1 - 5\cos^2\alpha\big)\Big)\,, \\
\text{sec. } N\gamma &= \frac{MN\cos\gamma}{hh}\Big(1 + \frac{3cc}{2hh}\big(3 - 5\cos^2\gamma\big) \\
&\qquad + \frac{3aa}{2hh}\big(1 - 5\cos^2\alpha\big) + \frac{3bb}{2hh}\big(1 - 5\cos^2\beta\big)\Big)\,,
\end{aligned}$$

quippe quae sunt aequales et contrariae iis, quas in problemate praecedente invenimus, nisi quod hic corporis attrahentis massa sit N, cum ibi eius loco habuissemus litteram m. Etsi autem hae vires hic ad punctum N sint relatae, tamen corpus ABC sollicitare sunt censendae; scilicet quaeri oportet vim illis ternis aequivalentem, cuius directio ad corpus ABC usque producta vim hoc corpus sollicitantem manifestabit. Potest autem ex his viribus una vis elici secundum directionem JN sollicitans, quae quasi vis primaria spectari potest, prae qua reliquae sint valde parvae. Scilicet uti in § 43 vires corpus ABC sollicitantes ita repraesentari possunt, ut primo adsit vis secundum JN

$$= \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{5aa}{2hh}\big(1 - 3\cos^2\alpha\big) + \frac{5bb}{2hh}\big(1 - 3\cos^2\beta\big) + \frac{5cc}{2hh}\big(1 - 3\cos^2\gamma\big)\right)\,,$$

tum vero hae tres vires valde exiguae:

$$\begin{aligned}
\text{sec. } N\alpha &= \frac{MN(2aa - bb - cc)\cos\alpha}{h^4}\,, \\
\text{sec. } N\beta &= \frac{MN(2bb - aa - cc)\cos\beta}{h^4}\,, \\
\text{sec. } N\gamma &= \frac{MN(2cc - aa - bb)\cos\gamma}{h^4}\,.
\end{aligned}$$

Vel etiam hoc modo ut primo adsit vis principalis secundum JN

$$= \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}\big(1 - 3\cos^2\alpha\big) + \frac{3bb}{2hh}\big(1 - 3\cos^2\beta\big) + \frac{3cc}{2hh}\big(1 - 3\cos^2\gamma\big)\right)\,,$$

ac praeterea hae tres vires minimae:

$$\begin{aligned}
\text{sec. } N\alpha &= \frac{3MN\cos\alpha}{h^4}\Big((aa-bb)\cos^2\beta+(aa-cc)\cos^2\gamma\Big)\ ,\\
\text{sec. } N\beta &= \frac{3MN\cos\beta}{h^4}\Big((bb-aa)\cos^2\alpha+(bb-cc)\cos^2\gamma\Big)\ ,\\
\text{sec. } N\gamma &= \frac{3MN\cos\gamma}{h^4}\Big((cc-aa)\cos^2\alpha+(cc-bb)\cos^2\beta\Big)\ .
\end{aligned}$$

47. **Corollarium 1.** Si igitur et corporis ABC terna momenta principalia fuerint inter se aequalia, sola vis secundum $JN = \frac{MN}{hh}$ relinquitur, et ambo corpora utut finita perinde se attrahant, ac si utriusque massa in suo centro inertiae esset collecta, ac tum directio vis attractricis per utriusque centrum inertiae transit.

48. **Corollarium 2.** Si corpus attrahens N in plano AJB binis axibus principalibus JA et JB corporis attracti determinato versetur, erit $\gamma = 90°$ et $\alpha + \beta = 90°$; unde hoc casu habebitur vis secundum JN

$$= \frac{MN}{hh}\left(1+\frac{3aa}{2hh}\Big(1-3\cos^2\alpha\Big)+\frac{3bb}{2hh}\Big(1-3\sin^2\alpha\Big)+\frac{3cc}{2hh}\right)\ ,$$

ac praeterea hae duae tantum vires valde parvae:

$$\begin{aligned}
\text{vis sec. } N\alpha &= \frac{3MN(aa-bb)\cos\alpha\cos^2\beta}{h^4}\ ,\\
\text{vis sec. } N\beta &= \frac{3MN(bb-aa)\cos\beta\cos^2\alpha}{h^4}\ .
\end{aligned}$$

49. **Corollarium 3.** Quare si hoc casu corporis attracti momenta inertiae respectu axium JA et JB fuerint inter se aequalia, binae vires exiguae secundum $N\alpha$ et $N\beta$ evanescunt, relinquiturque vis attrahens sola secundum JN

$$= \frac{MN}{hh}\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2hh}\right)\ ,$$

quae ergo partim quadrato partim biquadrato distantiae est proportionalis.

50. **Corollarium 4.** In genere autem si fuerit $bb = aa$, seu corporis ABC omnia momenta inertiae respectu axium in plano AJB sumtorum sint aequalia, vis sollicitans constabit vi secundum JN

$$= \frac{MN}{hh}\left(1+\frac{3(cc-aa)(1-3\cos^2\gamma)}{2hh}\right)$$

et insuper his viribus exiguis:

$$\begin{aligned}
\text{vi sec. } N\alpha &= \frac{3MN(aa-cc)\cos\alpha\cos^2\gamma}{h^4}\,,\\
\text{vi sec. } N\beta &= \frac{3MN(aa-cc)\cos\beta\cos^2\gamma}{h^4}\,,\\
\text{vi sec. } N\gamma &= \frac{3MN(cc-aa)\cos\gamma\sin^2\gamma}{h^4}\,.
\end{aligned}$$

51. **Scholion 1.** Effectus ab his viribus oriundus duplici modo se habet, prout vel solum motum progressivum corporis ABC afficit, vel eius motum gyratorium, quos binos effectus seorsim definire licet. Quodsi ergo ad solum motum progressivum corporis ABC respiciamus, singulas vires sollicitantes, tanquam ipsi eius centro inertiae J in suis directionibus applicatas consideramus, ac propterea corpus tum ab his viribus sollicitatum est censendum, primo a vi secundum JN

$$= \frac{MN}{hh}\left(1+\frac{3aa}{2hh}\left(1-3\cos^2\alpha\right)+\frac{3bb}{2hh}\left(1-3\cos^2\beta\right)+\frac{3cc}{2hh}\left(1-3\cos^2\gamma\right)\right)$$

ac praeterea ab his tribus exiguis viribus:

$$\begin{aligned}
\text{vi sec. } JA &= \frac{3MN}{h^4}\cos\alpha\left((aa-bb)\cos^2\beta+(aa-cc)\cos^2\gamma\right)\,,\\
\text{vi sec. } JB &= \frac{3MN}{h^4}\cos\beta\left((bb-cc)\cos^2\gamma+(bb-aa)\cos^2\alpha\right)\,,\\
\text{vi sec. } JC &= \frac{3MN}{h^4}\cos\gamma\left((cc-aa)\cos^2\alpha+(cc-bb)\cos^2\beta\right)\,.
\end{aligned}$$

Sin autem perturbationem motus vertiginis, quo corpus ABC circumagitur, definire velimus, non tam ad ipsas vires, quam earum momenta respectu axium principalium respicere debemus. Ex viribus autem secundum directiones $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ agentibus colligimus primo momentum respectu axis JA in sensum BC tendens[5] $=$ vi $N\gamma\cdot FG-$ vi $N\beta\cdot GH=$ vi $N\gamma\cdot h\cos\beta-$ vi $N\beta\cdot h\cos\gamma$. Cum ergo vis primaria secundum JN nullum praebeat momentum, ex viribus exiguis sequentia colligimus momenta:

$$\begin{aligned}
&\text{I. Momentum respectu axis } JA \text{ in sensum } BC = \frac{3MN(cc-bb)\cos\beta\cos\gamma}{h^3}\,,\\
&\text{II. Momentum respectu axis } JB \text{ in sensum } CA = \frac{3MN(aa-cc)\cos\alpha\cos\gamma}{h^3}\,,\\
&\text{III. Momentum respectu axis } JC \text{ in sensum } AB = \frac{3MN(bb-aa)\cos\alpha\cos\beta}{h^3}\,,
\end{aligned}$$

unde quemadmodum perturbatio motus gyratorii definiri debeat, in libro superiori[6] abunde est ostensum.

5 Editio princeps: GN loco GH.
6 [E 289].

52. **Scholion 2.** Si corpora coelestia essent perfecte sphaerica et ex materia homogenea conflata, seu saltem eorum momenta inertiae inter se aequalia, haud aliter se mutuo attraherent, ac si singulorum massae in suo quaeque centro inertiae essent collectae, quam hypothesin etiam NEWTONUS in investigatione motuum coelestium assumsit[7]. Verum si corpora coelestia ab hac figura recedant, iisdem principiis inducti videmus vires attractrices neque ad centrum inertiae cuiusque corporis tendere, neque exacte quadratis distantiarum reciproce esse proportionales, ac nunc quidem intelligimus aberrationem ab hac lege a duplici causa proficisci, a figura scilicet non sphaerica tam corporis attrahentis quam corporis attracti. In primo nempe problemate in corpore attracto momenta inertiae aequalia, et in attrahente inaequalia; in secundo autem problemate in corpore attracto momenta inertiae inaequalia et in attrahente aequalia sumsimus; unde dum alterum corpus habeat momenta sua inertiae aequalia, inde vis attractrix determinari potest. Superesset igitur, ut investigaremus quoque casum, quo ambo corpora habeant sua momenta inertiae inaequalia; verum etiamsi hanc investigationem feliciter expediremus, vix quicquam lucri inde consequeremur, cum calculus pro motu determinando instituendus nimis difficilis redderetur. Quo etiam facile erit vim attrahentem his casibus proxime assignare, modo unum modo alterum corpus tanquam sphaericum spectando et aberrationes a lege vulgari colligendo. Sed plerumque hae aberrationes tam sunt exiguae pro motu progressivo, ut satis tuto negligi queant; pro motu autem vertiginis sufficit figuram corporis attracti considerasse, quoniam vires sollicitantes per praelongos vectes agunt, unde tanta earum momenta nascuntur, ut prae iis momenta virium, quae ex figura corporis attracti resultarent, pro nihilo essent habenda, quandoquidem hae in ipso corpore attracto applicatae sunt censendae, ideoque nonnisi exigua momenta producere valent.

53. **Scholion 3.** Hae ergo sunt vires, quibus corpora coelestia sollicitantur, et ex quarum actione eorum motus ex principiis mechanicis investigari oportet, qui, quin deinceps vicissim cum observationibus exactissime conveniant, eo minus est dubitandum, cum existentia harum virium sit per ipsas observationes confirmata. Cum igitur hae vires neque sint quadratis distantiarum reciproce proportionales, neque ad ipsa centra inertiae cuiusque corporis tendant, nisi corpora sint sphaerica, seu omnia momenta inertiae habeant aequalia, in multo difficiliores investigationes delabimur, quam quidem NEWTONUS susceperat. Praeterea vero insigne dubium hic oritur, an hae vires solae in mundo existant, quibus corpora coelestia sollicitentur? Etsi enim phaenomena alias nobis non patefaciant, tamen cum universum spatium aethere, utpote luminis vehiculo sit repletum, fieri omnino nequit, quin inde resistentia quaedam nascatur, quam corpora coelestia in motu suo patiantur. Nam quantumvis etiam subtilem aetheris materiam fingamus, tamen neque liberrime corpora crassiora penetrare statui potest, neque

7 Cf. [Newton 1687], Lib. I, Prop. LXXIV, Theor. XXXIV; Lib. III, Prop. VII, Theor. VII; Prop. VIII, Theor. VIII.

ea usque adeo poris plena concipere licet, ut in motu suo nullos plane impetus ab aethere sustineant. Ob poros quidem aetheri pervios concedere debemus, eius resistentiam prae ea, quam alia fluida obiicerent, multo minorem esse quam pro ratione densitatis; scilicet si aether esset centies millies rarior aëre, resistentia multo magis quam centies millies minor esset statuenda prae ea, quam idem corpus pari celeritate motum in aëre sentiret. Si quis obiicere vellet, aetherem cuique corpori coelesti vicinum pari celeritate proferri, ideoque nullam inde resistentiam oriri, quod quidem nulla ratione confirmari potest, is tamen concedere teneretur, cometas resistentiam pati debere. Quod autem effectum huiusmodi resistentiae non percipiamus, causa est, quod nonnisi post plura secula sensibilis evadat: ac tantum abest, ut observationes huic sententiae plane adversentur, ut potius in motu lunae talis effectus animadverti videatur.

54. **Theorema.** Quotcunque fuerint corpora, quae se mutuo attrahant, et quomodocunque moveantur, eorum commune centrum inertiae vel quiescit, vel uniformiter in directum promovetur.

Demonstratio. Veritas huius theorematis isto nititur fundamento, quod vires, quibus duo quaeque corpora se invicem attrahunt, sint inter se aequales et in contrarium directae. Scilicet si fuerint (Fig. 3) duo corpora quaecunque Ma

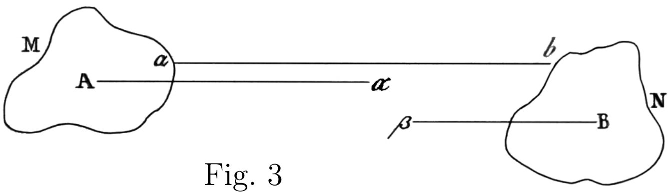


Fig. 3

et Nb, et vis, qua se mutuo attrahunt $= V$, cuius directio sit recta ab, ita ut corpus Ma a corpore Nb sollicitetur a vi $= V$ in directione ab, corpus vero Nb a corpore Ma vi $= V$ in directione ba. Considerentur utriusque corporis centra inertiae, quae sint in A et B, et quatenus tantum ad motum progressivum horum corporum respicimus, utrique corpori vis, qua sollicitatur, in ipso centro inertiae secundum eandem directionem applicata est concipienda. Hinc corpus A sollicitari censendum est vi $= V$ in directione $A\alpha$, et corpus B vi $= V$ in directione $B\beta$, ita ut vires sint aequales et directiones parallelae oppositaeque. Quare si motus ad ternas directiones fixas referatur, et vis corpus A sollicitans secundum has ternas directiones resoluta praebeat vires P, Q, R, vis corpus B sollicitans eodem modo resoluta dabit vires $-P$, $-Q$, $-R$. His positis (Fig. 4) sint corpora quotcunque se mutuo attrahentia, quorum massae, in cuiusque centro inertiae A, B, C collectae, denotentur litteris A, B, C, pro quibus coordinatae ternis directionibus fixis OE, OF, OG parallelae statuantur

$$\begin{aligned} O\alpha &= x\,, & \alpha a &= y\,, & aA &= z\,; \\ O\beta &= x'\,, & \beta b &= y'\,, & bB &= z'\,; \\ O\gamma &= x''\,, & \gamma c &= y''\,, & cC &= z''\,. \end{aligned}$$

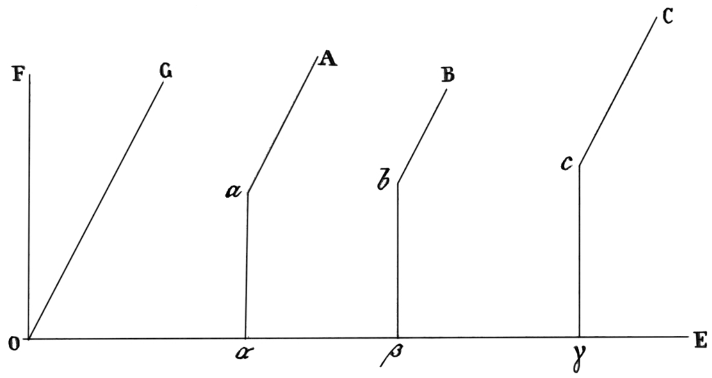


Fig. 4

Sit porro vis qua corpora A et B se mutuo attrahunt $= V$, vis corporum A et $C\ = V'$ et vis corporum B et $C\ = V''$, quae secundum easdem directiones fixas resolutae dent vires P, Q, R, P', Q', R' et P'', Q'', R'' atque

corpus	sollicitabitur secundum directionem		
	OE	OF	OG
A	$+P+P'$	$+Q+Q'$	$+R+R'$
B	$-P+P''$	$-Q+Q''$	$-R+R''$
C	$-P'-P''$	$-Q'-Q''$	$-R'-R''$

Iam ex principiis accelerationis, sumto elemento temporis dt constante, colligimus formulas sequentes:

$$\begin{aligned} A\,ddx &= 2g\,dt^2\,(+P+P')\ , \\ B\,ddx' &= 2g\,dt^2\,(-P+P'')\ , \\ C\,ddx'' &= 2g\,dt^2\,(-P'-P'')\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\,ddy &= 2g\,dt^2\,(+Q+Q')\ , & A\,ddz &= 2g\,dt^2\,(+R+R')\ , \\ B\,ddy' &= 2g\,dt^2\,(-Q+Q'')\ , & B\,ddz' &= 2g\,dt^2\,(-R+R'')\ , \\ C\,ddy'' &= 2g\,dt^2\,(-Q'-Q'')\ , & C\,ddz'' &= 2g\,dt^2\,(-R'-R'')\ , \end{aligned}$$

unde concludimus

$$\begin{aligned} A\,ddx + B\,ddx' + C\,ddx'' &= 0 \\ A\,ddy + B\,ddy' + C\,ddy'' &= 0 \\ A\,ddz + B\,ddz' + C\,ddz'' &= 0\ , \end{aligned}$$

simulque patet, si plura tribus fuerint corpora, huiusmodi ternas aequationes semper oriri debere. Hinc ergo integrando consequimur

$$\begin{aligned} A\,dx + B\,dx' + C\,dx'' &= E\,dt\ , & Ax + Bx' + Cx'' &= Et + \mathfrak{E} \\ A\,dy + B\,dy' + C\,dy'' &= F\,dt\ , & Ay + By' + Cy'' &= Ft + \mathfrak{F} \\ A\,dz + B\,dz' + C\,dz'' &= G\,dt\ , & Az + Bz' + Cz'' &= Gt + \mathfrak{G}\ , \end{aligned}$$

unde apparet, commune centrum inertiae corporum secundum singulas directiones OE, OF, OG uniformiter proferri, ideoque eius motum verum fore uniformem in directum. Nisi igitur commune centrum inertiae quiescat, certe uniformiter in directum profertur.

55. **Corollarium 1.** Si igitur toti systemati motus aequalis et contrarius ei, quo commune centrum inertiae progreditur, imprimi concipiatur, corpora ita movebuntur, ut commune centrum inertiae in quiete persistat.

56. **Corollarium 2.** Hoc autem motu superaddito, motus corporum respectivus inter se non mutabitur, ex quo totius mundi commune centrum inertiae tanquam quiescens spectari potest, motus enim singulorum corporum ab iisdem viribus efficietur, sive istud centrum quiescat, sive uniformiter in directum promoveatur.

57. **Corollarium 3.** Quare si motum corporum respectivum respectu communis centri inertiae definire velimus, non alias vires, praeter eas, quibus singula corpora revera sollicitantur, considerari opus est.

58. **Scholion 1.** In Astronomia autem neque motus corporum coelestium absolutos, neque ad eorum commune centrum inertiae relatos contemplari solemus, sed potius propositum est eorum motus respectu corporis cuiuspiam mundani, quales spectatori, in eius centro inertiae collocato, essent apparituri, assignare. Ita motus planetarum primariorum ut et cometarum ad centrum solis, secundariorum vero ad centrum primarii referri solent. Ut autem hi motus apparentes per calculum reperiantur, id corpus, ex cuius centro ii spectari concipiuntur, tanquam quiescens assumitur, reliquis vero, praeter vires, quibus revera sollicitantur, insuper vires applicari debent, quae sint similes et contrariae iis, quibus corpus quiescens urgetur; scilicet hae vires primo per massam corporis quiescentis dividi, tum vero iterum per massam cuiusque corporis moti, cui sunt applicandae, multiplicari debent, ut in his corporibus aequalem et contrariam motus perturbationem producant ei, quam in corpore, quod quiescens assumitur, producturae fuissent. Haec regula rite observata perducet ad motus apparentes, ex quibus deinceps motus veri, si motus corporis, quod pro quiescente assumitur, fuerit cognitus, facile definiuntur, siquidem opus fuerit eos nosse: semper enim sufficit motus tantum respectivos inter se habere cognitos. Ac si hos motus respectu unius noverimus, facile respectu cuiusque alius determinabimus, quemadmodum Astronomi ex locis planetarum heliocentricis eorum loca geometrica elicere solent: scilicet cognito motu planetarum ac proinde etiam terrae, qualis ex centro solis esset apparituros, per solam Geometriam inde colligitur motus eorum, quo spectatori in centro terrae posito progredi videntur, unde deinceps etiam motus apparens pro spectatoribus in superficie terrae constitutis facile concluditur.

59. **Scholion 2.** Cum numerus corporum in mundo existentium et se mutuo attrahentium sit quasi infinitus, eorum motus exactissime definire haud licet, nisi pro corporum se mutuo attrahentium numero quantumvis magno motus inde oriundos determinare voluerimus, quod problema tantis calculi difficultatibus

involutum deprehenditur, ut sagacitas humana illi enodando minime sufficere videatur. Verum corpora mundana ita commode a sapientissimo Conditore disposita deprehenduntur, ut primo sol et stellae fixae tam vastis a se invicem intervallis sint remotae, ut vires, quibus in se mutuo agunt, non obstante horum corporum insigni mole, pro nihilo sint reputandae; unde fit, ut stellas fixas cum sole tanquam corpora quiescentia et nullis viribus se mutuo sollicitantia spectare liceat, quod commodum neutiquam locum esset habiturum, si minoribus intervallis a se invicem distarent. Deinde etiam planetae et cometae nunquam tantopere a sole recedere videntur, ut vires, quas a stellis fixis sustinent, prae vi solis quicquam momenti adipiscantur. Tum vero etiam planetae principales et cometae pro suis massis tantis distantiis a se invicem manent seiuncti, ut vires, quibus se mutuo afficiunt, prae viribus, quibus ad solem tendunt, sint satis exiguae. Luna autem ac satellites Jovis et Saturni tam vicini sunt suis principalibus, ut vires, quibus ad eos urgentur, plurimum excedant ipsam vim solis. Quare pro motu omnium horum corporum proxime determinando sufficit unicam vim considerasse, dum reliquae prae ea sint valde parvae, quarum effectus tantum in exiguis perturbationibus producendis consumuntur, quas ope methodi approximandi definire licet. Sin autem vel planetae primarii sibi essent multo propiores, vel satellites a suis principalibus magis distarent, nullo fere modo ad motus eorum cognitionem pertingere possemus.

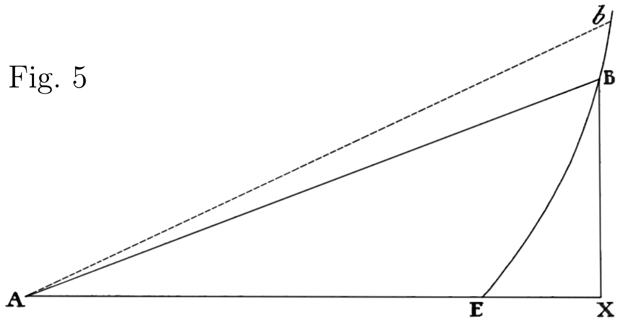
60. **Scholion 3.** Primo ergo duo tantum corpora se mutuo attrahentia contemplari conveniet, ubi quidem eorum indoles, prout fuerint sphaerica vel non sphaerica, investigationem bipartitam reddet. Nomine autem corporum sphaericorum complector omnia ea, in quibus terna momenta principalia sunt aequalia, reliqua omnia non sphaerica appellans. Sphaeroidica autem corpora in genere mihi erunt ea, in quibus duo momentorum principalia sunt aequalia, quae ergo unico axe principali sunt praedita, dum bini reliqui fuerint indefiniti, atque ad hoc genus omnia corpora coelestia referenda videntur. Expedito autem binorum corporum motu, ad terna progrediamur, quousque scilicet licuerit. Si enim problema in genere resolvere nequeamus, contenti esse poterimus approximationibus inde petitis, quod prae una vi reliquae sint valde exiguae, qui casus in mundo ubique locum habere videtur. Denique quid aetheris resistentia valeat erit inquirendum, ac tandem perturbatio in motu vertiginis a momentis virium sollicitantium oriunda Astronomiae mechanicae finem imponet.

CAPUT II

De motu duorum corporum sphaericorum se mutuo attrahentium

61. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahant, definire motum alterius, qualis spectatori in alterius centro posito est appariturus, ad planum, in quo ipse motus absolvitur, relatum.

Fig. 5



Solutio. Sint (Fig. 5) A et B duo corpora, quae litterae simul eorum massas denotent, et observator constitutus sit in centro corporis A, quod propterea ut quiescens consideretur. Iam quia virium, quibus se mutuo attrahunt, directio per utriusque centrum transit, quomodocunque corpus B moveri coeperit, directio vis sollicitantis semper est in plano per motus directionem et centrum corporis A transeunte, ideoque corpus B in eodem plano progredi perget. Quare tabula repraesentet hoc planum, in quo centrum corporis B moveri videtur, et cum initio ex E fuerit egressum, elapso tempore t pervenerit in B, ita ut circa A confecerit angulum $EAB = \varphi$, sitque distantia $AB = v$, unde patet si ad quodvis tempus t tam angulum $EAB = \varphi$ quam distantiam $AB = v$ assignare potuerimus, motum corporis B perfecte fore cognitum. Cum igitur B trahatur ad A in directione BA vi $= \frac{AB}{vv}$, parique vi corpus A ad B in directione AB sollicitetur, haec posterior vis in corpus B translata fiet $= \frac{BB}{vv}$, idque in directione AB afficere censendum est, ita ut iam corpus B sollicitetur omnino vi $= \frac{B(A+B)}{vv}$ in directione BA, quoniam corpus A ut quiescens consideramus. Ex B in directionem fixam AE demisso perpendiculo BX, ut sit $AX = v\cos\varphi$ et $XB = v\sin\varphi$, et secundum easdem directiones vis $BA = \frac{B(A+B)}{vv}$ resolvatur, erit vis secundum $XA = \frac{B(A+B)}{vv}\cos\varphi$, et vis secundum $BX = \frac{B(A+B)}{vv}\sin\varphi$. Hinc sumto elemento temporis dt constante, ex principiis Mechanicae elicimus has binas aequationes:

$$dd\cdot v\cos\varphi = -\frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2\cos\varphi\,, \quad dd\cdot v\sin\varphi = -\frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2\sin\varphi\,,$$

ubi g est altitudo, per quam grave delabitur tempore unius minuti secundi, siquidem tempus t detur in minutis secundis; at hic formula virium per certam constantem multiplicari oporteret, cuius magnitudo ex dato casu esset definienda. Verum hanc ipsam constantem sine ulla confusione subintelligere licet. En ergo has duas aequationes solutionem problematis continentes:

$$\text{I.}\quad ddv\cos\varphi - 2\,dv\,d\varphi\sin\varphi - v\,d\varphi^2\cos\varphi - v\,dd\varphi\sin\varphi = -\frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2\cos\varphi\,,$$

$$\text{II.}\quad ddv\sin\varphi + 2\,dv\,d\varphi\cos\varphi - v\,d\varphi^2\sin\varphi + v\,dd\varphi\cos\varphi = -\frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2\sin\varphi\,,$$

unde haec combinatio $\text{II}\cdot\cos\varphi - \text{I}\cdot\sin\varphi$ praebet

$$2\,dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0\,,$$

quae per v multiplicata dat hoc integrale:

$$vv\,d\varphi = C\,dt \quad \text{hincque} \quad d\varphi = \frac{C\,dt}{vv}\,.$$

At prima aequatio per v multiplicata ita repraesentari potest:

$$v\,ddv\cos\varphi - d\cdot vv\,d\varphi\sin\varphi = -\frac{2g(A+B)}{v}\,dt^2\cos\varphi\,,$$

ubi, ob $vv\,d\varphi = C\,dt$, est $d\cdot vv\,d\varphi\sin\varphi = C\,dt\,d\varphi\cos\varphi$, ideoque

$$v\,ddv - C\,dt\,d\varphi + \frac{2g(A+B)}{v}\,dt^2 = 0$$

$$\text{seu}\quad v\,ddv - \frac{CC\,dt^2}{vv} + \frac{2g(A+B)}{v}\,dt^2 = 0\,,$$

quae multiplicata per $\frac{2\,dv}{v}$ praebet

$$2\,dv\,ddv - \frac{2CC\,dt^2\,dv}{v^3} + \frac{4g(A+B)\,dt^2\,dv}{vv} = 0\,,$$

cuius integrale est

$$dv^2 + \frac{CC\,dt^2}{vv} - \frac{4g(A+B)\,dt^2}{v} = D\,dt^2\,,$$

unde elicitur

$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - CC\big)}}\,,$$

hincque

$$d\varphi = \frac{C\,dv}{v\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - CC\big)}}\,.$$

Cum igitur hinc per v definiantur tam t et φ, vicissim pro dato tempore t assignare licebit valores variabilium v et φ.

62. **Corollarium 1.** Prima aequatio integralis $vv\,d\varphi = C\,dt$ continet elementum areae descriptae BAb, quod est $= \frac{1}{2}vv\,d\varphi$, unde tota area $EAB = \frac{1}{2}\int vv\,d\varphi$ aequalis fit $\frac{1}{2}Ct$, ideoque tempori est proportionalis.

63. **Corollarium 2.** Aequatio inter v et φ inventa

$$d\varphi = \frac{C\,dv}{v\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - CC\big)}}$$

exprimit naturam curvae EB, quam corpus B circa A describere videtur. Eam autem esse sectionem conicam mox ostendemus.

64. **Corollarium 3.** Cum $-CC$ necessario sit quantitas negativa, ex formula irrationali

$$\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - CC\big)}$$

patet distantiam v evanescere nunquam posse, nisi sit $C = 0$, quo casu ob $d\varphi = 0$, corpus B in linea recta ad A esset accessurum.

65. **Corollarium 4.** At si non est $C = 0$, necesse est, ut distantia v semper limitem quendam superet, qui limes, si constans D sit positiva, est

$$= \frac{\sqrt{\big(4gg(A+B)^2 + CCD\big)} - 2g(A+B)}{D}\,.$$

Sin autem D sit quantitas negativa $= -E$, erit limes

$$= \frac{2g(A+B) - \sqrt{\big(4gg(A+B)^2 - CCE\big)}}{E}\,;$$

at si $D = 0$, limes iste fit

$$= \frac{CC}{4g(A+B)}\,.$$

66. **Resolutio formularum.** Quoniam distantia v superare debet certum limitem, si hic ponatur $= h$, erit $v - h$ factor formulae post signum radicale $Dvv + 4g(A+B)v - CC$, et alter factor erit formae $k \pm v$, prout D fuerit vel positivum vel negativum. Commodius autem scopum attingemus ponendo $v = \frac{f}{u}$, unde ob $dv = -\frac{f\,du}{uu}$, erit

$$dt = -\frac{ff\,du}{uu\sqrt{\big(Dff + 4fg(A+B)u - CCuu\big)}}$$

et

$$d\varphi = -\frac{C\,du}{\sqrt{\big(Dff + 4fg(A+B)u - CCuu\big)}}\,.$$

Hic si ponatur $Cu = Cp + \frac{2fg(A+B)}{C}$, fit formula radicalis

$$= \sqrt{\left(Dff + \frac{4ffgg(A+B)^2}{CC} - CCpp\right)}\,,$$

unde, ob $-C\,du = -C\,dp$, integrale posterioris aequationis erit

$$\alpha + \varphi = \arccos \frac{CCp}{\sqrt{\left(CCDff + 4ffgg(A+B)^2\right)}} \ .$$

Habebimus ergo

$$p = \frac{f\cos(\alpha+\varphi)}{CC}\sqrt{\left(CCD + 4gg(A+B)^2\right)}$$

et

$$u = \frac{2fg(A+B)}{CC} + \frac{f\cos(\alpha+\varphi)}{CC}\sqrt{\left(CCD + 4gg(A+B)^2\right)} \ .$$

Quo has formulas commodiores reddamus, constantes ita definiamus, ut fiat $u = 1 + n\cos s$, eritque

$$\alpha + \varphi = s\,, \quad \frac{2fg(A+B)}{CC} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f}{CC}\sqrt{\left(CCD + 4gg(A+B)^2\right)} = n\ .$$

Quare, ob $CC = 2fg(A+B)$, sumtis quadratis habebitur

$$\frac{Df}{2g(A+B)} + 1 = nn \quad \text{et} \quad D = -\frac{2(1-nn)g(A+B)}{f}\ ,$$

seu

$$D = -\frac{(1-nn)CC}{ff}\ .$$

Hinc pro signo radicali obtinebimus

$$\sqrt{(-CC + nnCC + 2CCu - CCuu)} = C\sqrt{\left(nn - (1-u)^2\right)}\ ,$$

quae, ob $u - 1 = n\cos s$, abit in $Cn\sin s$, ubi meminisse oportet esse $C = \sqrt{2fg(A+B)}$. Cum ergo sit

$$v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{Cn\,ds\sin s}{Cn\sin s} = ds\ ,$$

erit

$$\varphi = s + \text{Const.} \quad \text{et} \quad C\,dt = \frac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2}\ ,$$

unde elicimus

$$\frac{Ct}{ff} = \frac{1}{1-nn}\int \frac{ds}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\ .$$

Iam vero si $n < 1$ est

$$\int \frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}\ ;$$

sin autem $n > 1$ erit

$$\int \frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\surd(nn-1)} \log \frac{n+\cos s+\sin s\,\surd(nn-1)}{1+n\cos s} .$$

Casu autem quo $n = 1$ reperitur

$$\frac{Ct}{ff} = \int \frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2} .$$

In hac ergo resolutione loco binarum constantium C et D aliae duae f et n introducuntur, et omnia per novam variabilem, angulum scilicet s, ita definiuntur ut sit

I. $\varphi = s + \text{Const.}$,

II. $v = \dfrac{f}{1+n\cos s}$,

III. $dt\,\surd 2fg(A+B) = \dfrac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2}$ sive $t = \dfrac{f\surd f}{\surd 2g(A+B)} \displaystyle\int \frac{ds}{(1+n\cos s)^2}$,

cuius solutionis usum et applicationem mox diligentius evolvemus.

67. **Scholion 1.** Binae aequationes differentio-differentiales in alias transformari possunt, ut anguli φ sinus et cosinus elidantur. Uti enim $\mathrm{II}\cdot\cos\varphi - \mathrm{I}\cdot\sin\varphi$ praebet $2\,dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0$, ita $\mathrm{I}\cdot\cos\varphi + \mathrm{II}\cdot\sin\varphi$ suppeditat hanc aequationem:

$$ddv - v\,d\varphi^2 = -\frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2 ,$$

quarum illa per v multiplicata et integrata statim praebet, ut vidimus, $vv\,d\varphi = C\,dt$, qua aequabilis arearum descriptio continetur. Deinde posterior per $2\,dv$, prior vero per $2v\,d\varphi$ multiplicata in una summa praebent

$$2\,dv\,ddv + 2v\,dv\,d\varphi^2 + 2vv\,d\varphi\,dd\varphi = -\frac{4g(A+B)\,dv}{vv}\,dt^2 ,$$

quae integrata dat

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = D\,dt^2 + \frac{4g(A+B)}{v}\,dt^2 ,$$

ubi $\surd(dv^2 + vv\,d\varphi^2)$ exprimit elementum spatii Bb tempusculo dt descripti, inde autem ob $vv\,d\varphi^2 = \dfrac{CC\,dt^2}{vv}$ altera aequatio integralis ante inventa elicitur. Iuvabit autem has aequationes pluribus modis tractare, ut deinceps, cum huiusmodi aequationes magis complicatae occurrent, subsidia inde peti queant. Licet etiam has duas aequationes

$$2\,dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0 \quad \text{et} \quad ddv - v\,d\varphi^2 + \frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2 = 0$$

hoc modo resolvere: Multiplicetur prior per $2v^3\,d\varphi$, ut habeatur

$$4v^3\,dv\,d\varphi^2 + 2v^4\,d\varphi\,dd\varphi = 0\,,$$

cuius integrale est $v^4\,d\varphi^2 = EE\,dt^2$, unde valor pro dt^2 in altera aequatione substitutus praebet

$$ddv - v\,d\varphi^2 + \frac{2g(A+B)vv\,d\varphi^2}{EE} = 0\,.$$

Cum autem hic adhuc sit dt constans assumtum, ut eius loco $d\varphi$ tanquam constans introducatur, multiplicetur per $2\,dv$, ut habeatur

$$2\,dv\,ddv - 2v\,dv\,d\varphi^2 + \frac{4g(A+B)vv\,dv}{EE}\,d\varphi^2 = 0\,,$$

et loco $2\,dv\,ddv$ scribatur

$$dt^2\,d\cdot\frac{dv^2}{dt^2} = \frac{v^4\,d\varphi^2}{EE}\,d\cdot\frac{EE\,dv^2}{v^4\,d\varphi^2} = v^4\,d\cdot\frac{dv^2}{v^4}\,,$$

et nunc elementum $d\varphi$ est constans. Statuatur porro $v = \frac{f}{u}$, erit $\frac{dv}{vv} = -\frac{du}{f}$ et $v\,dv = -\frac{ff\,du}{u^3}$; sicque prodibit

$$\frac{f^4}{u^4}\,d\cdot\frac{du^2}{ff} + \frac{2ff\,du\,d\varphi^2}{u^3} - \frac{4g(A+B)f^3\,du}{EEu^4}\,d\varphi^2 = 0\,,$$

seu

$$\frac{2\,du\,ddu}{u^4} + \frac{2\,du\,d\varphi^2}{u^3} - \frac{4fg(A+B)\,du}{EEu^4}\,d\varphi^2 = 0\,,$$

vel

$$2\,du\,ddu + 2u\,du\,d\varphi^2 - \frac{4fg(A+B)\,du}{EE}\,d\varphi^2 = 0\,,$$

cuius integrale est

$$du^2 + uu\,d\varphi^2 - \frac{4fg(A+B)u\,d\varphi^2}{EE} = \frac{D\,d\varphi^2}{EE}\,,$$

unde colligitur

$$d\varphi = \frac{E\,du}{\sqrt{\big(D + 4fg(A+B)u - EEuu\big)}}\,,$$

quae formula cum ante inventa congruit.

68. **Scholion 2.** Integralia formulae $\frac{ds}{(1+n\cos s)^2}$, quae prout fuerit $n<1$, vel $n>1$, vel $n=1$ exhibuimus, per se sunt manifesta, uti ex differentiatione patet. Est ergo casu $n<1$,

$$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\,;$$

sin autem sit $n > 1$, erit

$$\int \frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

quarum formularum utraque casu $n = 1$ fit inepta; hoc autem casu $n = 1$ habetur

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2},$$

ubi praecipue notari meretur, quod in integrali eadem denominatoris potestas occurrit, atque in differentiali, cum alias sit unitate inferior. Simili modo est

$$\int \frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s},$$

atque adeo in genere formula $\int \frac{ds}{(1+\cos s)^n}$ integrari potest, cum sit

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^n} = \frac{n-1}{2n-1}\int \frac{ds}{(1+\cos s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\sin s}{(1+\cos s)^n},$$

unde sequentia integralia deducuntur:

$$\begin{aligned}
\int \frac{ds}{1+\cos s} &= \frac{\sin s}{1+\cos s},\\
\int \frac{ds}{(1+\cos s)^2} &= \frac{\sin s(2+\cos s)}{3(1+\cos s)^2},\\
\int \frac{ds}{(1+\cos s)^3} &= \frac{\sin s(7+6\cos s+2\cos^2 s)}{3\cdot 5(1+\cos s)^3},\\
\int \frac{ds}{(1+\cos s)^4} &= \frac{\sin s(36+39\cos s+24\cos^2 s+6\cos^3 s)}{3\cdot 5\cdot 7(1+\cos s)^4},\\
\int \frac{ds}{(1+\cos s)^5} &= \frac{\sin s(249+300\cos s+252\cos^2 s+120\cos^3 s+24\cos^4 s)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9(1+\cos s)^5},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

quae evanescunt posito $s = 0$; ubi notandum, si post integrationem ponatur $s = 90°$, fore[8]

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)} + \text{etc.}$$

8 Cf. [E 342], Cap. VI.

quae series ad hanc progressionem infinitam reducitur:

$$\frac{\sqrt{2}}{2n-1}+\frac{1\cdot\sqrt{2}}{4(2n-3)}+\frac{1\cdot 3\sqrt{2}}{4\cdot 8(2n-5)}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{2}}{4\cdot 8\cdot 12(2n-7)}+\text{etc.}$$

Verum ad propositum revertentes, videamus huiusmodi curvam corpus B sit descripturum, et qua lege per eam sit progressurum, ita ut ad datum quodvis tempus locus corporis assignari possit, quod fit cum distantiam $AB=v$ tum angulum $EAB=\varphi$ pro tempore t definiendo.

69. **Problema.** Definire (Fig. 5) naturam curvae EB, quam corpus B motu suo ex A spectato describit.

Solutio. Hic nullo respectu ad tempus habito, tantum ad relationem inter distantiam $AB=v$ et angulum $EAB=\varphi$ est spectandum, quae per angulum s ita definiuntur, ut sit $\varphi=s+\alpha$ et $v=\frac{f}{1+n\cos s}$. Statuantur coordinatae $AX=x$, $BX=y$, erit $vv=xx+yy$ et $x=v\cos\varphi$, $y=v\sin\varphi$, seu $\cos\varphi=\frac{x}{v}$, $\sin\varphi=\frac{y}{v}$. Cum ergo sit $s=\varphi-\alpha$, erit $\cos s=\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{v}$, unde fit $v+nx\cos\alpha+ny\sin\alpha=f$, ideoque

$$vv=xx+yy=(f-nx\cos\alpha-ny\sin\alpha)^2\,,$$

unde patet curvam esse sectionem conicam, cuius natura et positio ex aequatione $v=\frac{f}{1+n\cos(\varphi-\alpha)}$ facilius intelligitur. Ac primo quidem liquet, si sit $n=0$, ob $v=f$, curvam fore circulum centro A et radio $=f$ descriptum. Deinde si n sit numerus quicunque positivus, angulus $\varphi=\alpha$ dat minimam distantiam curvae a puncto A, quae est $=\frac{f}{1+n}$, ubi est $dv=0$ ob $dv=\frac{nf\,d\varphi\sin(\varphi-\alpha)}{(1+n\cos(\varphi-\alpha))^2}$. Simili modo sumendo $\varphi-\alpha=180^\circ$, prodit alter locus, ubi recta AB ad curvam est normalis, estque tum $v=\frac{f}{1-n}$, unde patet, si sit $n<1$, curvam fore ellipsin, si $n=1$, parabolam, ac si $n>1$, hyperbolam. Tum vero quia distantia $AB=v$ per coordinatas rationaliter exprimitur, punctum A in altero foco sectionis conicae est situm, cuius bini habentur vertices, quorum alterius a foco A distantia est $=\frac{f}{1+n}$, alterius $=\frac{f}{1-n}$, ita ut totus axis transversus sit $=\frac{2f}{1-nn}$, ideoque eius semissis $=\frac{f}{1-nn}$, unde focus a centro sectionis distat intervallo $=\frac{nf}{1-nn}$; semiaxis ergo coniugatus erit $=\frac{f}{\sqrt{(1-nn)}}$, ideoque semiparameter $=f$. Axis denique transversus ad rectam fixam AE inclinatur angulo $=\alpha$, seu sumto $EAB=\alpha$, is in rectam AB cadet.

70. **Corollarium 1.** Curva ergo a corpore B circa A descripta semper est sectio conica, et cum sumto angulo $\varphi=\alpha$, corpus B transeat per verticem foco A propiorem, post singulas revolutiones completas, ubi $\varphi=\alpha+360^\circ$, $\varphi=\alpha+2\cdot 360^\circ$ etc. eodem revertitur, ita ut orbita haec quiescens sit censenda.

71. **Corollarium 2.** Cum valor numeri n speciem sectionis conicae ita determinet, ut $n = 0$ det circulum, $n < 1$ ellipsin, $n = 1$ parabolam, et $n > 1$ hyperbolam, idem intelligendum est, si n sit numerus negativus. In genere enim idem numerus n, sive sit positivus, sive negativus, eandem speciem declarat, quia scribendo $s + 180°$ loco s alter casus ad alterum reducitur.

72. **Scholion.** Praeter denominationes hic adhibitas notandae sunt sequentes ab Astronomis receptae:

I. Axis transversus sectionis conicae vocatur etiam *linea absidum*, eiusque terminus alter foco A vicinior absis *ima*, alter remotior absis *summa*.

II. Distantia foci A a centro sectionis conicae per semiaxem transversum divisa, seu binorum focorum distantia per axem transversum ipsum divisa, vocatur *excentricitas* orbitae, quae ergo nostro casu numero n exprimitur.

III. Angulus ad focum A, quem recta AB cum linea absidum facit, vocari solet *anomalia vera*, vulgo quidem hic angulus ad absidem summam refertur. Nihil autem impedit, quominus ad absidem imam referamus, quandoquidem corpus B, si orbita fuerit vel parabola vel hyperbola, nunquam ad absidem summam pervenit, semper autem per imam transit. (Fig. 6) Ita si C sit absis

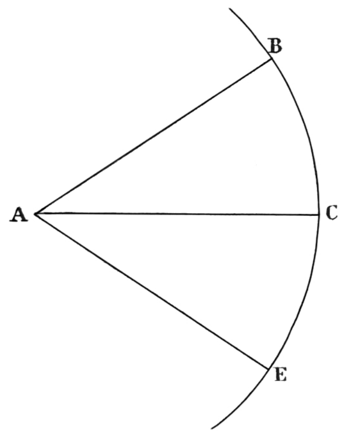


Fig. 6

ima, corpusque ex C ad B pervenerit, angulum CAB vocabo anomaliam veram, quam ergo in calculo nostro littera s denotat.

IV. Angulus autem EAB a recta quadam fixa AE computatus vocari solet *longitudo*, quae hic nobis littera φ exprimitur. Simili modo angulus EAC est longitudo absidis imae C, unde patet longitudinem φ inveniri, si ad anomaliam veram s longitudo absidis imae EAC addatur.

His praemissis ipsam motus rationem, prout orbita fuerit vel circulus, vel ellipsis, vel parabola, vel hyperbola, investigemus.

73. **Problema.** Si orbita, in qua corpus B circa A revolvi videtur, fuerit circulus, definire rationem motus.

Solutio. Erit ergo excentricitas $n = 0$, et radius circuli simulque perpetua distantia $AB = v = f$, unde si ponatur tempus, quo angulus $EAB = \varphi$ percurritur, $= t$, ob $ds = d\varphi$, habebitur $t = \dfrac{f\varphi\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}$; unde cum tempus sit ipsi angulo φ, ideoque et arcui $EB = f\varphi$ proportionale, motus erit uniformis, eiusque celeritas $= \dfrac{f\varphi}{t} = \sqrt{\dfrac{2g(A+B)}{f}}$, quae propterea est directe ut $\sqrt{(A+B)}$ et reciproce ut $\sqrt{f}$. Ac si tempus, quo totus circulus percurritur, quodque tempus *periodicum* vocatur, ponatur $= T$, ob $\varphi = 2\pi$, erit

$$T = \frac{2\pi f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{(A+B)}}\,.$$

Ergo ob $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2g}}$ quantitatem constantem, tempus periodicum est directe in ratione sesquiplicata radii circuli f et reciproce in ratione subduplicata summae massarum $A+B$ utriusque corporis. Tempore ergo periodico cognito T, ob $\dfrac{t}{T} = \dfrac{\varphi}{2\pi}$, quovis tempore t percurritur arcus φ, ut sit $\varphi = \dfrac{2\pi t}{T}$, unde ad quodvis tempus t locus corporis B, eius scilicet longitudo EAB facile colligitur. Pro mensura autem temporis absoluta definienda, consideretur ea corporum A et B distantia, in qua vis eorum attractrix aequalis est gravitati, quae distantia sit $= d$, eritque $\dfrac{A+B}{dd} = 1$ seu $A+B = dd$; ubique ergo summa massarum $A+B$ per eiusmodi constantem multiplicari est censenda, ut fiat productum $= dd$. Hinc ergo tempus t in minutis secundis exprimendo fiet $t = \dfrac{f\varphi\sqrt{f}}{d\sqrt{2g}}$, ideoque totum tempus periodicum $T = \dfrac{2\pi f\sqrt{f}}{d\sqrt{2g}}$ min. sec.

74. **Corollarium 1.** Ex dato ergo tempore periodico T pro quovis tempore dato t angulus interea descriptus φ per hanc analogiam facile definitur $T : t = 360° : \varphi$; unde pro diebus, horis, minutis et secundis motus angularis φ assignatur.

75. **Corollarium 2.** Ex tempore etiam periodico T et radio circuli descripti f, determinatur distantia corporum d, in qua eorum vis attractrix, qua B ad A urgetur, aequalis est ponderi corporis B, cum sit $d = \dfrac{2\pi f\sqrt{f}}{T\sqrt{2g}}$, ubi perpetuo est tenendum tempora in minutis secundis exprimi oportere.

76. **Corollarium 3.** Si idem corpus B modo in maiori modo in minori distantia circa corpus A in circulo revolvatur, erunt tempora periodica in ratione sesquiplicata radiorum, seu quadrata temporum periodicorum erunt ut cubi radiorum.

77. **Problema.** Si orbita, in qua corpus B ex A spectatum moveri videtur, fuerit ellipsis, rationem motus definire.

Solutio. Erit ergo numerus n, quo excentricitas exprimitur, unitate minor, ac si ponatur semiparameter $= f$, anomalia vera seu angulus $CAB = s$, erit absidis imae C distantia $AC = \frac{f}{1+n}$, semiaxis transversus $= \frac{f}{1-nn}$, et semiaxis coniugatus $= \frac{f}{\sqrt{(1-nn)}}$. Statuatur autem longitudo absidis imae C seu angulus $EAC = \alpha$, a directione fixa AE computata, a qua corpus B egressum elapso tempore $= t$ pervenerit in B, ut sit longitudo eius $EAB = \varphi$, erit $\varphi = \alpha + s$, ac habebimus has aequationes: Posita distantia $AB = v$,

$$v = \frac{f}{1 + n\cos s}$$

et

$$t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arccos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\right),$$

quae formula proprie indicat tempus, quo corpus ab abside ima C in B usque pervenit, anomaliamque veram $CAB = s$ absolvit, quod tempus primo definiri convenit, cum deinceps ex eo tempus pro angulo $EAB = \varphi$ haud difficulter concludatur. Cum igitur posito $s = 0$ fiat $t = 0$, statuamus $s = 180^\circ$, erit tempus ab abside ima ad summam

$$= \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}} \cdot \frac{\pi}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}},$$

cui iterum aequale fit tempus a summa ad imam, ita ut totum tempus periodicum, quod ponatur $= T$, futurum sit

$$= \frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}},$$

quo tempore integra revolutio seu anomalia vera $= 360^\circ$ absolvitur. Hinc si motus angularis esset aequabilis tempore t, conficeretur angulus $= \tau$, ut sit

$$\frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}} : t = 360^\circ : \tau, \quad \text{seu} \quad t = \frac{\tau f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}};$$

ideoque ex cognito tempore periodico T, si motus esset aequabilis ad quodvis tempus elapsum t, postquam corpus absidem imam C fuerit transgressum, angulus interea confectus $\tau = \frac{360t}{T}$ assignari potest, quem ergo loco temporis t in calculum introducamus et inquiramus, quantum angulus interea actu confectus, seu anomalia vera $CAB = s$ ab eo discrepet. Pro t autem illo valore substituto habebimus

$$\frac{\tau f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}}$$
$$= \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}-\frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\right),$$

seu

$$\tau = \arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}-\frac{n\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}\,.$$

Ponatur $\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}=\sigma$, erit

$$\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}=\cos\sigma \quad \text{et} \quad \sin\sigma=\frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}\,,$$

hincque

$$\cos s=\frac{\cos\sigma-n}{1-n\cos\sigma} \quad \text{et} \quad \sin s=\frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma} \quad \text{atque} \quad \tau=\sigma-n\sin\sigma\,,$$

unde pro quovis angulo τ tempori t proportionali haud difficulter colligitur angulus σ, hincque porro anomalia vera s, cui si addatur longitudo absidis imae $EAC=\alpha$, obtinebitur longitudo quaesita seu angulus $EAB=\varphi$; distantia autem $AB=v$ ope formulae $v=\frac{f}{1+n\cos s}$ facillime assignatur.

78. **Corollarium 1.** Cum tempus periodicum sit

$$T=\frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}}\,,$$

semiaxis autem transversus orbitae $=\frac{f}{1-nn}$, qui, si dicatur $=a$, erit tempus periodicum $T=\frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{2g(A+B)}}$, quod ergo est directe in ratione sesquiplicata axis transversi, et reciproce in subduplicata summae massarum.

79. **Corollarium 2.** Simili modo si loco semiparametri f introducatur semiaxis transversus $a=\frac{f}{1-nn}$, habebitur pro tempore quocunque t

$$t=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}-\frac{n\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}\right)$$

seu

$$t=\frac{T}{2\pi}(\sigma-n\sin\sigma)\,,\quad \text{posito} \quad \sigma=\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}\,.$$

80. **Corollarium 3.** Cognito ergo tempore periodico T et momento, quo corpus per absidem imam transiit, pro tempore inde elapso $=t$ quaeratur primo

angulus $\tau = \frac{t}{T} \cdot 360^\circ$, hincque porro angulo σ, ut sit $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quo invento pro anomalia vera s habebitur

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1 - n\cos\sigma},$$

ac denique longitudo $\varphi = \alpha + s$.

81. **Scholion 1.** Hic iterum novae appellationes in Astronomia occurrunt, quas probe notari convenit:

I. Angulus ille tempori proportionalis τ, qui pro revolutione integra abit in 360°, vocatur *anomalia media*, quae ergo est angulus, quem corpus ab abside ima digressum, si aequabiliter circa punctum A eodem tempore periodico revolveretur, dato tempore esset confecturum.

II. Differentia inter anomaliam mediam τ et veram s vocari solet *aequatio centri*, vel etiam *prostaphaeresis*, quae igitur est nulla casibus $\tau = 0$, $\tau = 180^\circ$, $\tau = 360^\circ$ etc., hoc est quoties anomalia media in lineam absidum incidit.

III. Angulus ille subsidiarius σ, cuius relatio tam ad anomaliam mediam τ quam ad veram s est assignata, vocari solet *anomalia excentrica*. Ex qua etiam distantia $AB = v$ expedite definitur. Cum enim sit $1 + n\cos s = \frac{1-nn}{1-n\cos\sigma}$ et $\frac{f}{1-nn} = a$, erit $v = \frac{f}{1+n\cos s} = a(1 - n\cos\sigma)$, ideoque distantia absidis imae a puncto A $= a(1-n)$, et summae $= a(1+n)$.

82. **Scholion 2.** Haec relatio inter anomalias veram, mediam et excentricam, quam per calculum eruimus, ita geometrice doceri potest: Sit (Fig. 7) AVB

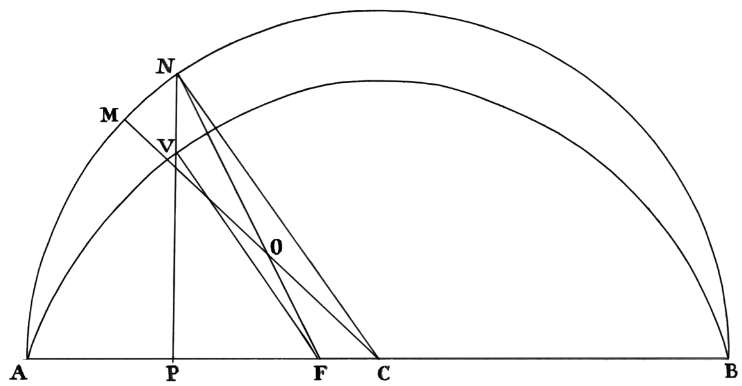


Fig. 7

semiellipsis super axe transverso AB descripta, cuius centrum in C et focus in F, positoque semiaxe $CA = a$ et excentricitate $= n$, erit $CF = na$; tum super eodem axe constituatur semicirculus ANB. Sumta iam in ellipsi anomalia vera seu angulo $AFV = s$, ei respondeat in circulo anomalia media seu angulus $ACM = \tau$, atque necesse est, ut sector circuli ACM sit ad aream semicirculi, ut sector ellipticus AFV ad aream semiellipsis. Per V ducatur ad axem AB perpendicularis PVN circulum secans in N, ductaque recta FN, est area elliptica AFV ad aream circularem AFN, ut semiellipsis area ad aream semicirculi, ex quo sectorem circularem ACM aequalem esse oportet areae circulari AFN. Unde notata rectarum FN et CM intersectione O, trilineum mixtilineum MON aequale esse debet triangulo rectilineo COF. Addatur utrinque triangulum CON ducto radio CN, ut fiat sector CMN aequalis triangulo CFN. Nunc primo patet angulum ACN esse anomaliam excentricam σ, nam hinc fit

$$PN = a\sin\sigma \quad \text{et} \quad PV = a\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}\,,$$

tum vero est $CP = a\cos\sigma$ et $FP = a(\cos\sigma - n)$, hincque $FV = a(1 - n\cos\sigma)$; unde fit, uti invenimus,

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1 - n\cos\sigma}\,.$$

Porro ob angulum $MCN = \sigma - \tau$, erit sector $MCN = \frac{1}{2}aa(\sigma - \tau)$, area vero trianguli $CFN = \frac{1}{2}naa\sin\sigma$, quibus valoribus aequatis fit $\sigma - \tau = n\sin\sigma$ seu $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quae aequalitas cum supra inventa congruit.

83. **Problema.** Data excentricitate orbitae ellipticae et anomalia media, invenire anomaliam excentricam, indeque anomaliam veram et aequationem centri seu prostaphaeresin.

Solutio. Posita excentricitate $= n$, et anomalia media $= \tau$, inde primo definiatur anomalia excentrica σ ope aequationis $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quod commodissime per approximationem praestatur. Ponamus enim pro σ valorem iam prope verum esse inventum, qui sit $= \lambda$, et praebeat $\lambda - n\sin\lambda = \tau + \delta$, ut error sit valde parvus δ, ac statuamus $\sigma = \lambda + \omega$, unde ob ω valde parvum, erit $\sin\sigma = \sin\lambda + \omega\cos\lambda$, ideoque $\tau = \lambda + \omega - n\sin\lambda - n\omega\cos\lambda = \tau + \delta + \omega - n\omega\cos\lambda$. Erit ergo $\omega = -\dfrac{\delta}{1 - n\cos\lambda}$, ac propterea $\sigma = \lambda - \dfrac{\delta}{1 - n\cos\lambda}$. Si valor λ non ita prope ad verum accedat, ut haec approximatio sufficiat, hinc saltem multo propior colligitur, qui loco λ positus multo exactius ad veritatem perducet. Ceterum si anomaliae mediae τ convenire reperta fuerit anomalia excentrica σ, anomaliae mediae tantillum maiori $\tau + d\tau$ conveniet anomalia excentrica $\sigma + d\sigma$, ut sit $d\tau = d\sigma - n\,d\sigma\cos\sigma$, ideoque $d\sigma = \dfrac{d\tau}{1 - n\cos\sigma}$, unde facile ad singulos gradus anomaliae mediae τ assignabitur anomalia excentrica σ. Inventa autem anomalia excentrica σ, anomalia vera s definiri debet ex hac formula

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1 - n\cos\sigma}\,,$$

quae ut per logarithmos expediri posset, quaeratur primo angulus ω, ut sit $\tan\omega = \frac{\tan\sigma}{\sqrt{(1-nn)}}$, quo invento erit $\sin(s-\omega) = n\sin\omega$; seu quaeratur angulus ψ, ut sit $\sin\psi = n\sin\omega$, habebiturque $s = \omega + \psi$. Cum enim inde fiat $\sin s\cos\omega - \cos s\sin\omega = n\sin\omega$, erit

$$\tan\omega = \frac{\sin s}{n+\cos s} \quad \text{et} \quad \tan\sigma = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{n+\cos s}\,,$$

quae convenit cum formulis supra datis. Hinc denique erit aequatio centri $= s-\tau$ ad anomaliam mediam addenda, ut prodeat anomalia vera.

Ceterum notasse iuvabit esse per formulas differentiales

$$ds = \frac{d\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma} \qquad \text{et} \qquad d\sigma = \frac{ds\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}\,.$$

Quare cum sit $d\tau = d\sigma\,(1-n\cos\sigma)$, erit

$$d\tau\,ds = d\sigma^2\sqrt{(1-nn)} = \frac{ds^2\,(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2}\,, \quad \text{ideoque} \quad d\tau = \frac{ds\,(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2}\,.$$

Unde si aequatio centri $s-\tau$ dicatur $=\varepsilon$, erit

$$d\varepsilon = ds - \frac{ds\,(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2}\,.$$

84. **Corollarium 1.** Si anomalia media τ evanescit, etiam fit anomalia excentrica $\sigma = 0$, unde quoque anomalia vera s et aequatio centri evanescit. Simili modo si anomalia media τ ponatur $= 180°$, erit etiam $\sigma = 180°$ et $s = 180°$, ita ut etiam hoc casu aequatio centri evanescat.

85. **Corollarium 2.** Si anomalia media τ fuerit valde parva, erit etiam excentrica σ valde parva et $\sigma = \frac{\tau}{1-n}$, ob $\sin\sigma = \sigma$, hincque

$$ds = \frac{d\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n} = \frac{d\tau\sqrt{(1-nn)}}{(1-n)^2}\,,$$

unde

$$s = \frac{\tau\sqrt{(1+n)}}{(1-n)\sqrt{(1-n)}}$$

et aequatio centri

$$s-\tau = \tau\left(-1 + \frac{\sqrt{(1+n)}}{(1-n)\sqrt{(1-n)}}\right)\,,$$

ideoque $s > \tau$.

86. **Corollarium 3.** Crescente anomalia media τ aequatio centri $s-\tau$ tamdiu crescit, quoad fiat

$$1-\frac{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2}=0\,,$$

quo casu est maxima; tum iterum decrescit, donec posito $\tau=180^\circ$ plane evanescat.

87. **Corollarium 4.** Aequatio centri ergo $s-\tau$ maxima evadit, si

$$1+n\cos s=(1-nn)^{\frac{3}{4}}\quad\text{et}\quad\cos s=\frac{(1-nn)^{\frac{3}{4}}-1}{n}\,,$$

unde fit

$$\cos\sigma=\frac{1-(1-nn)^{\frac{1}{4}}}{n}\quad\text{et}\quad\tau=\sigma-n\sin\sigma\,,$$

quae erit anomalia media, cui maxima aequatio centri convenit. Pro ea ergo erit $s>90^\circ$, $\sigma<90^\circ$, multoque magis $\tau<90^\circ$.

88. **Corollarium 5.** Sumta anomalia media τ negativa, fiunt quoque anomaliae σ et s negativae eiusdem valoris, unde binis anomaliis mediis τ et $360^\circ-\tau$ par respondet aequatio centri, quae autem priori casu est addenda, posteriori subtrahenda.

89. **Scholion.** Dum ergo corpus ab abside ima ad summam progreditur, aequatio centri est positiva, seu anomaliae mediae addenda, et quidem ab ima usque ad certum terminum continuo crescit, unde ad absidem summam usque iterum decrescit, ubi evanescit. Tum vero ab abside summa ad imam progrediendo per pares aequationes anomalia media est minuenda, unde sufficit aequationes centri nosse pro transitu ab abside ima ad summam. Si enim anomaliae mediae τ conveniat aequatio centri ε, anomaliae mediae $360^\circ-\tau$ conveniet aequatio centri $-\varepsilon$. Modus autem hic expositus ex data anomalia media computandi anomaliam veram commodior reddi potest, si excentricitas fuerit valde parva, id quod plerumque usu venit, unde hunc casum seorsim evolvisse iuvabit.

90. **Problema.** Si excentricitas n fuerit valde parva, pro data anomalia media definire aequationem centri et anomaliam veram.

Solutio. Primo ex anomalia media τ colligitur anomalia excentrica σ ope aequationis $\tau=\sigma-n\sin\sigma$, unde erit

$$\sigma=\tau+n\sin(\tau+n\sin(\tau+n\sin(\tau+n\sin(\tau+\text{etc.}\,,$$

vel etiam ope huius formulae[9]

$$\sigma=\tau+\left(n-\tfrac{1}{8}n^3\right)\sin\tau+\left(\tfrac{1}{2}nn-\tfrac{1}{6}n^4\right)\sin 2\tau+\tfrac{3}{8}n^3\sin 3\tau+\tfrac{1}{3}n^4\sin 4\tau\,,$$

9 Cf. [E 37], §§ 8–9; [E 105], § 20.

ubi potestates ipsius n quarta altiores sunt neglectae. Inventa autem anomalia excentrica σ, ex ea anomalia vera s definitur hac aequatione $ds = \dfrac{d\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma}$, unde fit

$$ds = d\sigma\left(1+n\cos\sigma+n^2\cos^2\sigma+n^3\cos^3\sigma+n^4\cos^4\sigma+n^5\cos^5\sigma+\text{etc.}\right)\sqrt{(1-nn)}\,.$$

Cum igitur sit

$$\begin{aligned}
\cos\sigma &= \cos\sigma\\
\cos^2\sigma &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\sigma\\
\cos^3\sigma &= \tfrac{3}{4}\cos\sigma+\tfrac{1}{4}\cos 3\sigma\\
\cos^4\sigma &= \tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}\cos 2\sigma+\tfrac{1}{8}\cos 4\sigma\\
\cos^5\sigma &= \tfrac{10}{16}\cos\sigma+\tfrac{5}{16}\cos 3\sigma+\tfrac{1}{16}\cos 5\sigma\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

erit colligendis his terminis:

$$\begin{aligned}
ds = (1-nn)^{\frac{1}{2}}\,d\sigma\Big(&\left(1+\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{3}{8}n^4+\text{etc.}\right)+\left(n+\tfrac{3}{4}n^3+\tfrac{10}{16}n^5+\text{etc.}\right)\cos\sigma\\
&+\left(\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{4}{8}n^4+\text{etc.}\right)\cos 2\sigma+\left(\tfrac{1}{4}n^3+\tfrac{5}{16}n^5+\text{etc.}\right)\cos 3\sigma\\
&+\left(\tfrac{1}{8}n^4+\text{etc.}\right)\cos 4\sigma+\ \text{etc.}\Big).
\end{aligned}$$

Est vero

$$1+\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{3}{8}n^4\ +\text{etc.} = (1-nn)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$n+\tfrac{3}{4}n^3\ +\tfrac{10}{16}n^5+\text{etc.} = \frac{2}{n}\left((1-nn)^{-\frac{1}{2}}-1\right)\ ,$$

ita ut pro primis duobus terminis habeatur

$$ds = d\sigma\left(1+\frac{2}{n}\,(1-\sqrt{(1-nn)})\cos\sigma\right)\ ,$$

ideoque

$$s = \sigma+\frac{2}{n}\left(1-\sqrt{(1-nn)}\right)\sin\sigma\ .$$

Quo autem hanc seriem ulterius continuare queamus, ponamus

$$ds = d\sigma(1+A\cos\sigma+B\cos 2\sigma+C\cos 3\sigma+D\cos 4\sigma+E\cos 5\sigma+\text{etc.})\ ,$$

et cum sit

$$\frac{ds}{d\sigma}-\frac{n\,ds}{d\sigma}\cos\sigma = \sqrt{(1-nn)}\,,$$

ob

$$\cos\sigma\cos\nu\sigma = \tfrac{1}{2}\cos(\nu-1)\sigma + \tfrac{1}{2}\cos(\nu+1)\sigma$$

fiet

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & +A\cos\sigma & +B\cos 2\sigma & +C\cos 3\sigma & +D\cos 4\sigma & +E\cos 5\sigma & +\text{etc.} \\ -\tfrac{1}{2}nA & -n & -\tfrac{1}{2}nA & -\tfrac{1}{2}nB & -\tfrac{1}{2}nC & -\tfrac{1}{2}nD & \\ & -\tfrac{1}{2}nB & -\tfrac{1}{2}nC & -\tfrac{1}{2}nD & -\tfrac{1}{2}nE & -\tfrac{1}{2}nF & \end{array}\right\}$$

$= \sqrt{(1-nn)}$, unde coefficientes sequenti modo determinantur

$$\begin{array}{lcl} A = \tfrac{2}{n}\Big(1-\sqrt{(1-nn)}\Big) & \text{seu} & A = 2\left(\tfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right) , \\ B = \tfrac{2}{n}\Big(A-n\Big) & \text{seu} & B = 2\left(\tfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2 , \\ C = \tfrac{1}{n}\Big(2B-nA\Big) & \text{seu} & C = 2\left(\tfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^3 , \\ D = \tfrac{1}{n}\Big(2C-nB\Big) & \text{seu} & D = 2\left(\tfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^4 , \\ E = \tfrac{1}{n}\Big(2D-nC\Big) & \text{seu} & E = 2\left(\tfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^5 , \\ F = \tfrac{1}{n}\Big(2E-nD\Big) & \text{seu} & F = 2\left(\tfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^6 , \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

Ponatur brevitatis gratia $\dfrac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n} = m$, erit

$$ds = d\sigma(1 + 2m\cos\sigma + 2m^2\cos 2\sigma + 2m^3\cos 3\sigma + 2m^4\cos 4\sigma + \text{etc.}) ,$$

hincque integrando

$$s = \sigma + \tfrac{2}{1}m\sin\sigma + \tfrac{2}{2}m^2\sin 2\sigma + \tfrac{2}{3}m^3\sin 3\sigma + \tfrac{2}{4}m^4\sin 4\sigma + \text{etc.}$$

Cum nunc sit $\sigma = \tau + n\sin\sigma$, erit aequatio centri

$$s - \tau = (2m+n)\sin\sigma + \tfrac{2}{2}m^2\sin 2\sigma + \tfrac{2}{3}m^3\sin 3\sigma + \tfrac{2}{4}m^4\sin 4\sigma + \text{etc.}$$

Potest etiam anomalia media τ per veram s simili modo exprimi; cum enim sit

$$d\tau = \frac{ds\,(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2} ,$$

erit

$$d\tau = (1-nn)^{\frac{3}{2}}\,ds\,\Big(1 - 2n\cos s + 3n^2\cos^2 s - 4n^3\cos^3 s + 5n^4\cos^4 s - \text{etc.}\Big) ,$$

cuius seriei, si potestates cosinus s ad cosinus multiplorum angulorum revocentur, prodit terminus constans

$$1+\tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}n^4+\text{etc.}=(1-nn)^{-\frac{3}{2}}$$

et coefficiens ipsius $\cos s$ fit

$$=-2n(1-nn)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

Quare ponamus

$$d\tau=ds\,\left(1-A\cos s+B\cos 2s-C\cos 3s+D\cos 4s-\text{etc.}\right)\,,$$

quae series per $(1+n\cos s)^2=1+\frac{1}{2}nn+2n\cos s+\frac{1}{2}nn\cos 2s$ multiplicata dat:

$$\begin{array}{l}
\qquad(1+\frac{1}{2}nn) \quad -An \quad +\frac{1}{4}Bnn\\
+\big(-A(1+\frac{1}{2}nn)\ +2n\ +Bn\ -\frac{1}{4}Ann\ -\frac{1}{4}Cnn\big)\cos s\\
+\big(+B(1+\frac{1}{2}nn)\ -An\ -Cn\ +\frac{1}{2}nn\ +\frac{1}{4}Dnn\big)\cos 2s\\
+\big(-C(1+\frac{1}{2}nn)\ +Bn\ +Dn\ -\frac{1}{4}Ann\ -\frac{1}{4}Enn\big)\cos 3s\\
+\big(+D(1+\frac{1}{2}nn)\ -Cn\ -En\ +\frac{1}{4}Bnn\ +\frac{1}{4}Fnn\big)\cos 4s\\
\qquad +\text{etc.}
\end{array}$$

aequari debet ipsi $(1-nn)^{\frac{3}{2}}$. At est $A=2n$, unde fit primo

$$1+\tfrac{1}{2}nn-2nn+\tfrac{1}{4}Bnn=(1-nn)^{\frac{3}{2}}\,,$$

ideoque

$$\begin{aligned}
B&=\frac{4(1-nn)^{\frac{3}{2}}-4+6nn}{nn}=\tfrac{3}{2}nn+\tfrac{1}{4}n^4\,,\\
C&=\frac{4Bn-4A-3Ann+8n}{nn}\\
&=\frac{16(1-nn)^{\frac{3}{2}}-16+24nn-6n^4}{n^3}\,,\\
D&=\frac{4Cn-4B-2Bnn+4An-2nn}{nn}\\
&=\frac{8(6-nn)(1-nn)^{\frac{3}{2}}-48+80nn-30n^4}{n^4}\,,\\
E&=\frac{4Dn-4C-2Cnn+4Bn-Ann}{nn}\,,\\
F&=\frac{4En-4D-2Dnn+4Cn-Bnn}{nn}\,.
\end{aligned}$$

Alio autem modo reperitur

$$\begin{aligned}
A &= 2n\,, \\
B &= 2\Big(1+2\sqrt{(1-nn)}\Big)\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2\,, \\
C &= \frac{4B-3An}{n}\,, \\
D &= \frac{6C-4Bn}{2n}\,, \\
E &= \frac{8D-5Cn}{3n}\,, \\
F &= \frac{10E-6Dn}{4n}\,.
\end{aligned}$$

Hincque coëfficientes quaesiti sequenti modo exprimi invenirentur:

$$\begin{aligned}
A &= 2\Big(1+\ \sqrt{(1-nn)}\Big)\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)\,, \\
B &= 2\Big(1+2\sqrt{(1-nn)}\Big)\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2\,, \\
C &= 2\Big(1+3\sqrt{(1-nn)}\Big)\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^3\,, \\
D &= 2\Big(1+4\sqrt{(1-nn)}\Big)\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^4\,, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

quibus valoribus inventis erit

$$\tau = s - A\sin s + \tfrac{1}{2}B\sin 2s - \tfrac{1}{3}C\sin 3s + \tfrac{1}{4}D\sin 4s - \tfrac{1}{5}E\sin 5s + \text{etc.}\,,$$

ita ut aequatio centri sit futura

$$s-\tau = A\sin s - \tfrac{1}{2}B\sin 2s + \tfrac{1}{3}C\sin 3s - \tfrac{1}{4}D\sin 4s + \tfrac{1}{5}E\sin 5s - \text{etc.}$$

91. **Corollarium 1.** Si n tam sit parvum, ut potestates omnes reiicere liceat, erit $\sigma = \tau + n\sin\tau$, et ob $m = \frac{1}{2}n$, fit $s = \sigma + n\sin\sigma = \tau + 2n\sin\tau$, ideoque aequatio centri $s-\tau = 2n\sin\tau$; quae ergo est maxima $= 2n$, sumta anomalia media $\tau = 90^\circ$.

92. **Corollarium 2.** Si tantum potestates secunda superiores reiicere liceat, ob $\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n} = \frac{1}{2}n$, erit $A = 2n$, $B = \frac{3}{2}nn$, $C = 0$ etc., unde fit $\tau = s - 2n\sin s + \frac{3}{4}nn\sin 2s$; hincque per conversionem reperitur $s = \tau + 2n\sin\tau +$

$\frac{5}{4}nn\sin 2\tau$, seu aequatio centri $s-\tau = 2n\sin\tau + \frac{5}{4}nn\sin 2\tau$, quae ergo est maxima, si $\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}n$, fitque $= 2n$.

93. **Corollarium 3.** Si potestates ipsius n quarta altiores tantum reiicere liceat, erit

$$A = 2n - \tfrac{1}{2}n^3\,,\quad B = \tfrac{3}{2}nn - \tfrac{1}{2}n^4\,,\quad C = n^3\,,\quad D = \tfrac{5}{8}n^4\,,\quad E = 0\,,\quad \text{etc.}\,,$$

ideoque habebitur

$$\tau = s - \left(2n - \tfrac{1}{2}n^3\right)\sin s + \left(\tfrac{3}{4}nn - \tfrac{1}{4}n^4\right)\sin 2s - \tfrac{1}{3}n^3\sin 3s + \tfrac{5}{32}n^4\sin 4s\,,$$

unde per conversionem eruitur

$$s = \tau + \left(2n - \tfrac{3}{4}n^3\right)\sin\tau + \left(\tfrac{5}{4}nn - \tfrac{13}{12}n^4\right)\sin 2\tau + \tfrac{13}{12}n^3\sin 3\tau + \tfrac{103}{96}n^4\sin 4\tau\,.$$

94. **Corollarium 4.** Aequatio centri ergo fit maxima, ubi est

$$\left(2n - \tfrac{3}{4}n^3\right)\cos\tau + \left(\tfrac{5}{2}nn - \tfrac{13}{6}n^4\right)\cos 2\tau + \tfrac{13}{4}n^3\cos 3\tau + \tfrac{103}{24}n^4\cos 4\tau = 0\,,$$

unde colligitur

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \tfrac{5}{4}n - \tfrac{25}{384}n^3\,,$$

ita ut haec anomalia media minor sit angulo recto. Ipsa autem aequatio maxima ex formula generali supra data facilius eruetur.

95. **Scholion.** Scilicet cum ex § 87 pro aequatione maxima sit proxime

$$\cos\sigma = \frac{1-(1-nn)^{\frac{1}{4}}}{n} = \tfrac{1}{4}n + \tfrac{3}{32}n^3\,,$$

erit

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{4}n - \tfrac{37}{384}n^3 \quad \text{et} \quad \sin\sigma = 1 - \tfrac{1}{32}nn - \tfrac{49}{2048}n^4\,.$$

Deinde vero est

$$\cos s = \frac{(1-nn)^{\frac{3}{4}}-1}{n} = -\tfrac{3}{4}n - \tfrac{3}{32}n^3\,,$$

unde[10]

$$s = \frac{\pi}{2} + \tfrac{3}{4}n + \tfrac{21}{128}n^3 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\pi}{2} - \tfrac{5}{4}n - \tfrac{25}{384}n^3\,,$$

ideoque aequatio maxima[11]

$$s - \tau = 2n + \tfrac{11}{48}n^3\,.$$

10 Recte:

$$s = \frac{\pi}{2} + \tfrac{3}{4}n - \tfrac{49}{384}n^3$$

11 Recte:

$$s - \tau = 2n1\tfrac{1}{16}n^3$$

Ceterum methodus priori loco exposita, qua primo anomaliam excentricam σ investigavimus, commodius adhiberi videtur, cum eius ope appropinquatio facile longius extendi queat, quandoquidem seriei, qua s per σ exprimitur, lex progressionis est manifesta; ac si accuratius σ per τ exprimere velimus, reperiemus[12]

$$\sigma = \tau + \left(n - \tfrac{1}{8}n^3 + \tfrac{1}{192}n^5\right)\sin\tau + \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^4\right)\sin 2\tau$$
$$+ \left(\tfrac{3}{8}n^3 - \tfrac{41}{192}n^5\right)\sin 3\tau + \tfrac{1}{3}n^4 \sin 4\tau + \tfrac{21}{64}n^5 \sin 5\tau\,,$$

ubi tamen legem progressionis perspicere non licet.

96. **Problema.** Si curva, in qua corpus B circa A moveri cernitur, fuerit parabola, ad datum tempus assignare locum, ubi corpus B versabitur.

Solutio. Denotante f semiparametrum parabolae, ut distantia absidis imae C a foco A sit $AC = \frac{1}{2}f$; si tempore t corpus ex C in B usque progrediatur, confecta anomalia vera $CAB = s$, erit distantia $AB = v = \dfrac{f}{1+\cos s}$, et si A et B corporum massas denotent, invenimus

$$t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\cdot\frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}\,.$$

Quo temporis rationem facilius tenere possimus, consideremus casum, quo corpus E circa aliud corpus F circulum uniformiter describit, cuius radius $= e$, atque tempore eodem t angulus descriptus sit $= \tau$, qui loco ipsius temporis t introducatur. Cum igitur sit

$$t = \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{2g(E+F)}}\cdot\tau\,,$$

statuamus brevitatis gratia

$$\frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\cdot\sqrt{\frac{A+B}{E+F}} = m\,,$$

ut obtineamus

$$m\tau = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}\,,$$

unde ex dato angulo τ definiri oportet angulum s, id quod resolutionem aequationis cubicae postulat. Praestabit autem tabulam computare, quae ad singulos gradus anguli s exhibeat valorem formulae

$$\frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}\,,$$

ex qua deinceps facile erit pro dato $m\tau$ respondentem anomaliam veram s colligere. Ad hunc calculum sublevandum notetur esse

$$m\tau = \frac{\left(1+2\cos^2\frac{1}{2}s\right)\sin\frac{1}{2}s}{6\cos^3\frac{1}{2}s} = \frac{\sin\frac{1}{2}s}{3\cos\frac{1}{2}s} + \frac{\sin\frac{1}{2}s}{6\cos^3\frac{1}{2}s}\,,$$

12 Cf. [E 37], §§ 8–9; [E 105], § 20.

seu

$$\begin{aligned} m\tau &= \tfrac{1}{3}\tan\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{6}\tan\tfrac{1}{2}s\cdot\sec^2\tfrac{1}{2}s \\ &= \tfrac{1}{6}\tan\tfrac{1}{2}s\left(2+\sec^2\tfrac{1}{2}s\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{6}\tan^3\tfrac{1}{2}s\ . \end{aligned}$$

Verumtamen etiam ex dato $m\tau$, modo hic angulus in partibus radii exponatur, angulus s definiri potest, nam ponatur $\tan\frac{1}{2}s = z$, erit $\sec^2\frac{1}{2}s = 1+zz$, unde fit $6m\tau = z(3+zz)$, ex cuius aequationis resolutione, si ponamus $3m\tau = u$, deducimus

$$z = \tan\tfrac{1}{2}s = (\sqrt{(1+uu)}+u)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{(1+uu)}-u)^{\frac{1}{3}}\ ,$$

vel quaeratur angulus ω, ut sit $\tan 2\omega = 3m\tau$, tum vero erit

$$\tan\tfrac{1}{2}s = \sqrt[3]{\tan(45^\circ+\omega)} - \sqrt[3]{\tan(45^\circ-\omega)}\ ,$$

sive

$$\tan\tfrac{1}{2}s = \sqrt[3]{\tan(45^\circ+\omega)} - \sqrt[3]{\cot(45^\circ+\omega)}\ ,$$

cuius ope calculus per logarithmos haud difficulter instituitur, quoniam

$$\log\sqrt[3]{\tan(45^\circ-\omega)} = -\log\sqrt[3]{\tan(45^\circ+\omega)}\ .$$

Fortasse calculus adhuc facilior reddetur, si quaeratur angulus ψ, ut sit

$$\tan(45^\circ+\psi) = \sqrt[3]{\tan(45^\circ+\omega)}\ ,$$

eritque

$$\tan\tfrac{1}{2}s = 2\tan 2\psi\ ,$$

qui calculus ad logarithmorum usum maxime est accommodatus.

97. **Corollarium 1.** Elapso ergo tempore t post transitum corporis B per absidem imam, primo pro eodem tempore angulus τ definiatur, quem corpus quoddam E circa aliud F circulum radii $= e$ describens interea conficit, qui angulus loco temporis in calculum introducatur, tum vero capiatur numerus

$$m = \frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\frac{A+B}{E+F}}\ ,$$

et factum $m\tau$ in partibus radii exprimatur, eritque

$$m\tau = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{6}\tan^3\tfrac{1}{2}s\ .$$

98. **Corollarium 2.** Uti sumto $\tau = 0$, anomalia vera s evanescit, ita tempus usque ad absidem summam fit infinitum; sumta enim anomalia vera $s =$

180°, ob $\tan\frac{1}{2}s = \infty$, evidens est quantitatem $m\tau$ in infinitum augeri, scilicet corpus in parabola motum nunquam ad absidem summam pertingit.

99. **Corollarium 3.** Si anomalia vera s fuerit valde parva, ob $\tan\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}s + \frac{1}{24}s^3$, et $\tan^3\frac{1}{2}s = \frac{1}{8}s^3$, fiet $m\tau = \frac{1}{4}s + \frac{1}{24}s^3$. Sumta autem $s = 60^\circ$, ob $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, fit $m\tau = \frac{5}{9\sqrt{3}}$; at sumta $s = 90^\circ$, ob $\tan 45^\circ = 1$, fit $m\tau = \frac{2}{3}$. Sumta denique $s = 120^\circ$, ob $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, fit $m\tau = \sqrt{3}$.

100. **Corollarium 4.** Si ex dato tempore t seu angulo ipsi proportionali $m\tau$ anomaliam veram s definire velimus, promptissime id praestabitur hoc modo: Primo quaeratur angulus ω, ut sit

$$\tan 2\omega = 3m\tau\ ,$$

tum angulus ψ, ut sit

$$\tan(45^\circ + \psi) = \sqrt[3]{\tan(45^\circ + \omega)}\ ,$$

quo invento erit $\tan\frac{1}{2}s = 2\tan 2\psi$.

101. **Scholion.** Quemadmodum hic aequationis cubicae $z^3 + 3z = 6m\tau$ resolutionem commode per tabulas sinuum docuimus, qui modus alias tantum in iis aequationibus cubicis usurpari solet, quae omnes radices habent reales, ita in genere aequationum unica radice reali praeditarum resolutio quoque ad tabulas sinuum revocari potest hoc modo: Sit sublato secundo termino proposita haec aequatio cubica $y^3 + 3by = 2c$, quaeratur angulus ω, ut sit

$$\tan 2\omega = \frac{c}{b\sqrt{b}}\ ,$$

tum vero angulus ψ, ut sit

$$\tan(45^\circ + \psi) = \sqrt[3]{\tan(45^\circ + \omega)}\ ,$$

erit radix realis $y = 2\sqrt{b}\tan 2\psi$. Hoc scilicet modo regula CARDANI commodius ad calculum accommodatur. Vel etiam ex angulo ω statim est

$$y = \Big(\sqrt[3]{\tan(45^\circ + \omega)} - \sqrt[3]{\tan(45^\circ - \omega)}\Big)\sqrt{b}\ .$$

102. **Problema.** Si curva, quam corpus B circa A describit, proxime tantum ad parabolam accedat, ad quodvis tempus ab abside ima elapsum locum corporis in curva assignare.

Solutio. Excentricitas ergo n unitati proxime aequalis assumitur, unde si ut ante tempus t ex motu uniformi, quo corpus quodpiam E circa aliud F ad distantiam $= e$ circulum describit, definiamus, atque in hoc circulo tempore t absolvatur angulus $= \tau$, ponaturque

$$\frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\frac{A+B}{E+F}} = m\ ;$$

ex superioribus habemus elapso tempore t ab abside ima C distantiam

$$AB = v = \frac{f}{1 + n\cos s}$$

et

$$m\tau = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}} \arccos \frac{n + \cos s}{1 + n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}$$

denotante f semiparametrum orbitae et s anomaliam veram seu angulum CAB. Haec quidem formula pro casu, quo $n < 1$ et orbita est ellipsis, valet, unde patet pro tempore motus ab abside ima ad summam prodire

$$m\tau = \frac{\pi}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}} ,$$

id quod ex approximationibus minus liquet, quippe quae non ad absidem summam usque extenduntur. Nam cum sit

$$\arccos \frac{n + \cos s}{1 + n\cos s} = \arcsin \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1 + n\cos s} ,$$

hic sinus quidem est valde parvus, quamdiu anomalia vera s non proxime ad 180° accedit. Cum igitur existente sinu u minimo sit

$$\arcsin u = u + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{3}{40}u^5 + \tfrac{5}{112}u^7 + \text{etc.} ,$$

erit

$$\arcsin \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} + \frac{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sin^3 s}{6(1+n\cos s)^3} + \frac{3(1-nn)^{\frac{5}{2}}\sin^5 s}{40(1+n\cos s)^5} ,$$

ideoque nostra aequatio fiet

$$m\tau = \frac{\sin s}{(1+n)(1+n\cos s)} + \frac{\sin^3 s}{6(1+n\cos s)^3} + \frac{3(1-nn)\sin^5 s}{40(1+n\cos s)^5} .$$

Quoniam igitur n proxime ad unitatem accedit, sive sit $n < 1$ sive $n > 1$, formula inventa aeque locum habet, neque tamen eousque progredi licet, ut denominator $1 + n\cos s$ proxime evanescat. Ponamus ergo $n = 1 - \delta$ et $\tan\frac{1}{2}s = z$, ac reperiemus

$$m\tau = \frac{2z}{(2-\delta)(2-\delta+\delta zz)} + \frac{4z^3}{3(2-\delta+\delta zz)^3} + \frac{24\delta z^5}{5(2-\delta+\delta zz)^5}$$

neglectis terminis ubi δ plus una dimensione adipiscitur. Pro data ergo anomalia vera s, tempus t eiusve loco $m\tau$ facillime colligetur hoc modo: Statuatur $\dfrac{\sin s}{1+n\cos s} = u$, eritque

$$m\tau = \frac{u}{1+n} + \frac{1}{6}u^3 + \frac{3}{40}(1-nn)u^5 .$$

At si discrimen a particula δ oriundum noscere velimus, ex $z=\tan\frac{1}{2}s$ obtinebimus

$$m\tau=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{6}z^3+\delta\left(\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{10}z^5\right) ,$$

unde si neglecta particula δ pro dato $m\tau$ invenerimus $z=q$, erit ratione ipsius δ habita

$$z=q-\frac{\delta q(5-q^4)}{5(1+qq)}=\tan\tfrac{1}{2}s .$$

103. **Corollarium 1.** Si ergo particula minima δ fuerit positiva, curva erit ellipsis perquam longa, cuius semiaxis transversus $=\dfrac{f}{1-nn}=\dfrac{f}{2\delta}$, et semiaxis coniugatus $=\dfrac{f}{\sqrt{2\delta}}$, atque distantia absidis imae a foco $=\dfrac{f}{2-\delta}=\dfrac{1}{2}f+\dfrac{\delta}{4}f$.

104. **Corollarium 2.** Sin autem particula δ fuerit negativa, curva erit hyperbola minime a parabola eiusdem parametri discrepans, cuius asymtotae ad axem erunt inclinatae angulo cuius cosinus $=\dfrac{1}{1+\delta}$ vel sinus $=\sqrt{2\delta}$.

105. **Corollarium 3.** Ceterum calculus, quo tam ex data anomalia vera s quaeritur quantitas tempori proportionalis $m\tau$, quam vicissim haec ex illa, non multo onerosior est illo, quem ante pro parabola docuimus, unde ad motum in hyperbola scrutandum procedamus.

106. **Problema.** Si curva, in qua corpus B circa A moveri videtur, fuerit hyperbola, ad quodvis tempus eius locum assignare.

Solutio. Loco temporis t introducamus et hic quantitatem ipsi proportionalem $m\tau$ modo ante expositam, et cum numerus n excentricitatem referens sit unitate maior, ex § 68 habebimus

$$m\tau=\frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)}-\frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s} ,$$

qua aequatione relatio inter tempus et anomaliam veram $CAB=s$ exprimitur. Hic autem logarithmus ex canone logarithmorum hyperbolicorum sumi debet, vel si logarithmum vulgarem capiamus, eum per numerum 2,30258509299 multiplicari, huiusve reciprocum 0,4342944819 dividi oportet. Statuamus $\dfrac{n+\cos s}{1+n\cos s}=u$, ut sit $\cos s=\dfrac{n-u}{nu-1}$, et quia $\sqrt{(uu-1)}=\dfrac{\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}$, nostra aequatio erit

$$m\tau=\frac{n}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{(uu-1)}-\frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log\Big(u+\sqrt{(uu-1)}\Big) ,$$

quae aequatio adhuc simplicior reddi potest ponendo $u=\sec 2\omega=\dfrac{1}{\cos 2\omega}$, seu $\sqrt{(uu-1)}=\tan 2\omega$, ut sit[13] $\dfrac{1+n\cos s}{n+\cos s}=\cos 2\omega$, hincque $\cos s=\dfrac{n\cos 2\omega-1}{n-\cos 2\omega}$ et

13 Editio princeps: $1-n\cos s$ loco $1+n\cos s$.

$\sin s = \dfrac{\sin 2\omega\sqrt{(nn-1)}}{n-\cos 2\omega}$; tum enim erit $u+\sqrt{(uu-1)} = \tan(45^\circ+\omega)$, ideoque

$$m\tau = \frac{n\tan 2\omega - \log\tan(45^\circ+\omega)}{(nn-1)\sqrt{(nn-1)}}\,.$$

Quodsi ergo ad singulos gradus anomaliae verae s valores quantitatis $m\tau$ computentur, inde vicissim pro dato $m\tau$ ipsa anomalia vera s simulque distantia $AB = v = \dfrac{f}{1+n\cos s}$ facile colligitur.

107. **Corollarium 1.** Crescente ergo tempore t seu quantitate ipsi proportionali $m\tau$, crescit etiam anomalia vera $CAB = s$, atque elapso tempore infinito fit $\cos s = -\dfrac{1}{n}$ et $\sin s = \dfrac{\sqrt{(nn-1)}}{n}$, eodemque casu evadit distantia $AB = v$ infinita.

108. **Corollarium 2.** Elapso tempore infinito locus corporis in asymtotam incidet, et asymtotae utrinque ad axem hyperbolae inclinantur angulo, cuius cosinus est $= \dfrac{1}{n}$ et tangens $= \sqrt{(nn-1)}$. Est vero $\dfrac{f}{nn-1}$ semiaxis transversus hyperbolae et $\dfrac{f}{\sqrt{(nn-1)}}$ semiaxis coniugatus.

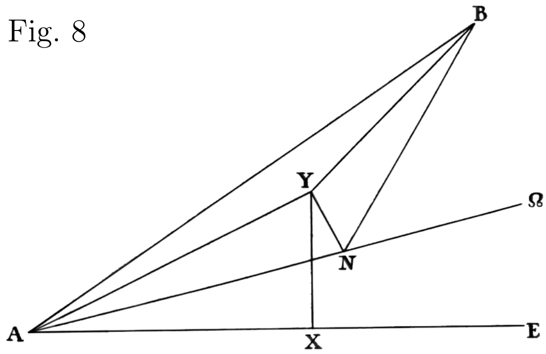
109. **Scholion.** Evolvimus ergo omnes species motuum, quibus duo corpora se mutuo attrahentia, siquidem fuerint sphaerica, circumferri possunt; vidimus orbitam, quam alterum circa alterum describere spectatur, esse sectionem conicam. Huc quidem proxime accedunt orbitae, quas planetae primarii et cometae circa solem describere videntur, dum illi in ellipsibus circumferuntur, hi vero quasi in parabolis, etsi adhuc incertum est, utrum hyperbola penitus sit excludenda. Verumtamen planetas non exacte in orbitis ellipticis circa solem circumferri vel exinde patet, quod lineae absidum in coelo non quietae deprehenduntur. Duplex scilicet perturbatio eorum motum afficit, quarum altera a figura planetarum non sphaerica, altera ab attractione reliquorum corporum coelestium proficiscitur, quam investigationem deinceps sumus suscepturi. Ante autem iuvabit hoc idem argumentum de motu duorum corporum sphaericorum per calculos variatos pertractasse. Cum enim totum negotium resolutione aequationum differentio-differentialium innitatur, plurimum intererit huiusmodi aequationes variis methodis tentari, quandoquidem hoc casu de successu certi sumus, quacunque methodo utamur, etiamsi forte, nisi solutio iam ante esset cognita, calculi evolutio nimis ardua videretur. His autem difficultatibus superatis, aditus ad sublimiores investigationes, quando plura duobus corpora proponuntur, facilior forsitan redderetur. In sequente ergo capite aliis quibusdam methodis determinationem motus duorum corporum sphaericorum aggrediamur.

CAPUT III

Aliae investigationes motus duorum corporum sphaericorum

110. **Problema.** (Fig. 8) Dum corpora sphaerica A et B se mutuo attrahunt, huius motum, qualis ex illo spectatur, referre ad planum quodcunque per corpus A ductum.

Fig. 8



Solutio. Repraesentet tabula planum, ad quod motum corporis B referri oportet, quod iam tempore elapso $= t$ versetur in B, unde demisso ad planum propositum perpendiculo BY, et ex Y ad rectam fixam AE normali YX, sint ternae coordinatae $AX = x$, $XY = y$, $YB = z$; ipsa autem distantia $AB = v = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. Cum iam vis, qua B ad A urgetur sit $= \frac{B(A+B)}{vv}$, massas corporum per litteras A et B indicando, ea secundum directiones ternarum coordinatarum resoluta dabit vim in directione

$$AX = -\frac{B(A+B)x}{v^3}\,, \quad XY = -\frac{B(A+B)y}{v^3}\,, \quad YB = -\frac{B(A+B)z}{v^3}\,,$$

unde sequentes aequationes elicimus sumendo elementum dt constans:

$$ddx = -\frac{2g(A+B)x}{v^3}\cdot dt^2, \quad ddy = -\frac{2g(A+B)y}{v^3}\cdot dt^2, \quad ddz = -\frac{2g(A+B)z}{v^3}\cdot dt^2.$$

Hinc dt^2 eliminando colligimus

$$y\,ddx - x\,ddy = 0\,, \quad z\,ddy - y\,ddz = 0\,, \quad x\,ddz - z\,ddx = 0\,,$$

quarum quidem quaelibet in binis reliquis iam continetur, ita ut duas tractasse sufficiat. Inde ergo integrando obtinemus

$$y\,dx - x\,dy = E\,dt \quad \text{et} \quad z\,dy - y\,dz = F\,dt\,,$$

hincque

$$F(y\,dx - x\,dy) + E(y\,dz - z\,dy) = 0\,,$$

quae per yy divisa et integrata dat

$$\frac{Fx}{y} + \frac{Ez}{y} + G = 0\,, \quad \text{seu} \quad Ez + Fx + Gy = 0\,,$$

ex qua liquet motum corporis B fieri in plano per punctum A transeunte. Cum igitur habeamus $Ez + Fx + Gy = 0$, ac praeterea has tres aequationes differentiales:

$$E\,dt = y\,dx - x\,dy\,, \quad F\,dt = z\,dy - y\,dz\,, \quad G\,dt = x\,dz - z\,dx\,,$$

ob $xx + yy + zz = vv$ adipiscemur quadratis addendis

$$\begin{aligned}(EE + FF + GG)\,dt^2 = dx^2\,(vv - xx) + dy^2\,(vv - yy) + dz^2\,(vv - zz)\\ - 2xy\,dx\,dy - 2yz\,dy\,dz - 2xz\,dx\,dz\,,\end{aligned}$$

et quia $x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$, obtinebimus

$$(EE + FF + GG)\,dt^2 = vv(dx^2 + dy^2 + dz^2) - vv\,dv^2\,.$$

Verum si aequationum differentio-differentialium prima per $2\,dx$, secunda per $2\,dy$ et tertia per $2\,dz$ multiplicetur, summa erit

$$2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy + 2dz\,ddz = -\frac{4g(A+B)v\,dv}{v^3} \cdot dt^2\,,$$

cuius integrale, ob dt constans, est

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = D\,dt^2 + \frac{4g(A+B)}{v}\,dt^2\,,$$

qui valor ob superiorem aequationem est

$$= dv^2 + \frac{(EE + FF + GG)\,dt^2}{vv}\,,$$

ita ut per vv multiplicando habeamus

$$vv\,dv^2 = dt^2\,\big(Dvv + 4g(A+B)v - EE - FF - GG\big)\,,$$

ideoque

$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - EE - FF - GG\big)}}\,.$$

Superest ut reliquas variabiles x, y, z etiam per v determinemus. Cum igitur sit $z = \dfrac{-Fx - Gy}{E}$, habebimus

$$EEvv = EExx + EEyy + FFxx + 2FGxy + GGyy\,,$$

hincque

$$y = \frac{-FGx + E\sqrt{\big((EE+GG)vv - (EE+FF+GG)xx\big)}}{EE+GG} \,.$$

Statuamus brevitatis gratia

$$EE + FF + GG = HH \,,$$

sitque

$$\frac{Hx}{v\sqrt{(EE+GG)}} = \cos\omega \,,$$

seu

$$x = \frac{v\sqrt{(EE+GG)}}{H}\cos\omega \,,$$

erit

$$y = \frac{-FG\cos\omega + EH\sin\omega}{H\sqrt{(EE+GG)}}\cdot v \quad \text{et} \quad z = \frac{-EF\cos\omega - GH\sin\omega}{H\sqrt{(EE+GG)}}\cdot v \,.$$

Hinc erit

$$\frac{y}{x} = \frac{-FG\cos\omega + EH\sin\omega}{(EE+GG)\cos\omega} \quad \text{et} \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{xx} = \frac{EH\,d\omega}{(EE+GG)\cos^2\omega} \,,$$

ideoque

$$x\,dy - y\,dx = \frac{Evv\,d\omega}{H} = -E\,dt \,,$$

ita ut sit

$$d\omega = -\frac{H\,dt}{vv} \,.$$

Quaeratur ergo angulus ω, ut sit

$$\omega = -\int \frac{H\,dv}{v\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - HH\big)}} \,,$$

eritque

$$\sin\omega = \frac{HH - 2g(A+B)v}{v\sqrt{\big(DHH + 4gg(A+B)^2\big)}}$$

et

$$\cos\omega = \frac{H\sqrt{\big(Dvv + 4g(A+B)v - HH\big)}}{v\sqrt{\big(DHH + 4gg(A+B)^2\big)}} \,.$$

Invento hoc angulo ω, ad eum constantem angulum quemcunque adiicere licet, unde obtinebimus

$$\frac{x}{v} = \frac{(EE+GG)\cos(\omega+\delta)}{H\surd(EE+GG)}\,,$$
$$\frac{y}{v} = \frac{-FG\cos(\omega+\delta)+EH\sin(\omega+\delta)}{H\surd(EE+GG)}\,,$$
$$\frac{z}{v} = \frac{-EF\cos(\omega+\delta)-GH\sin(\omega+\delta)}{H\surd(EE+GG)}\,,$$

ita ut iam omnes quantitates variabiles sint determinatae per eandem variabilem v.

111. **Corollarium 1.** Si ponatur $\frac{EH}{FG} = \tan\alpha$ et $\frac{GH}{EF} = \tan\gamma$, formulae posteriores transmutantur in has:

$$\frac{x}{v} = \frac{\surd(EE+GG)}{H}\cos(\omega+\delta)\,,$$
$$\frac{y}{v} = -\frac{\surd(EE+FF)}{H}\cos(\omega+\delta+\alpha)\,,$$
$$\frac{z}{v} = -\frac{\surd(FF+GG)}{H}\cos(\omega+\delta-\gamma)\,,$$

haeque formulae exprimunt cosinus angulorum, quibus recta AB ad ternas directiones principales inclinatur.

112. **Corollarium 2.** Si ducta AY, angulus XAY tanquam longitudo vocetur $=\varphi$, ob $\frac{y}{x} = \tan\varphi$ habebimus hanc longitudinis determinationem

$$\tan\varphi = -\frac{FG}{EE+GG} + \frac{EH\tan(\omega+\delta)}{EE+GG}\,,$$

tum vero angulo YAB tanquam latitudine posito $=\psi$, erit

$$\sin\psi = \frac{-EF\cos(\omega+\delta)-GH\sin(\omega+\delta)}{H\surd(EE+GG)} = -\frac{\surd(FF+GG)}{H}\cos(\omega+\delta-\gamma)\,.$$

113. **Corollarium 3.** Si recta $A☊$ fuerit intersectio plani, in quo corpus B movetur cum plano tabulae, motusque fiat in sensum EB, ita ut in ☊ sit nodus ascendens, erit pro longitudine huius nodi $\tan EA☊ = -\frac{F}{G}$, et pro inclinatione planorum $\tan YNB = -\frac{\surd(FF+GG)}{E}$, seu $\cos YNB = -\frac{E}{H}$, ducta YN ad $A☊$ normali.

114. **Corollarium 4.** Si ponamus $\frac{F}{H} = \cos\alpha$, $\frac{G}{H} = \cos\beta$, $\frac{E}{H} = \cos\gamma$, ut sit

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,;$$

tum vero statuamus

$$\frac{x}{v}=\sin\alpha\cos(\omega+\zeta)\ ,\quad \frac{y}{v}=\sin\beta\cos(\omega+\eta)\ ,\quad \frac{z}{v}=\sin\gamma\cos(\omega+\vartheta)\ ,$$

anguli ζ, η, ϑ ita sunt comparati, ut sit

$$\tan(\vartheta-\eta)=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}\ ,\quad \tan(\zeta-\vartheta)=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}\ ,\quad \tan(\eta-\zeta)=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\ ,$$

unde ordo in his formulis facilius perspicitur.

115. **Scholion.** Evidens est hanc solutionem ad superiorem perducere. Si enim angulus ΩAB ponatur $=\varphi$, qui est angulus, quem corpus B in sua orbita plana tempore t absolvit, erit $\frac{BN}{v}=\sin\varphi$; at est

$$\frac{z}{BN}=\sin YNB=\frac{\sqrt{(FF+GG)}}{H}\ ,$$

ideoque

$$BN=\frac{Hz}{\sqrt{(FF+GG)}}$$

et

$$\sin\varphi=\frac{H}{\sqrt{(FF+GG)}}\cdot\frac{z}{v}=-\cos(\omega+\delta-\gamma)$$

per § 111.

Ergo $\sin\varphi=\sin(\omega+\delta-\gamma-90^\circ)$, ita ut sit $\varphi=\omega+\text{Const.}$ ac $d\varphi=d\omega$, seu

$$d\varphi=-\frac{H\,dv}{v\sqrt{\big(Dvv+4g(A+B)v-HH\big)}}\ ,$$

quae aequatio cum supra inventa plane congruit. Signum enim $-$, quod supra erat $+$, ob signum radicalis ambiguum nihil turbat. Quin etiam poteramus ponere

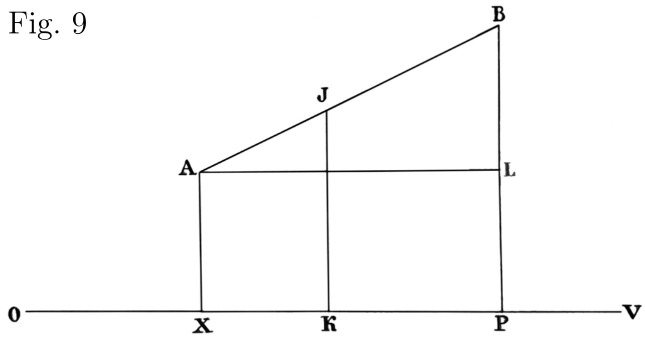
$$\sin\varphi=+\cos(180^\circ+\omega+\delta-\gamma)=\sin(-90^\circ-\omega-\delta+\gamma)\ ,$$

unde deducitur $\varphi=\text{Const.}-\omega$ et $d\varphi=-d\omega$, eademque prorsus aequatio obtinetur. Ceterum cum hic motum corporis B etiam, qualis ex A spectatur, definiverimus, nunc in motus absolutos utriusque corporis inquiramus, quales scilicet ambo ex puncto quodam fixo visi apparerent; ac primo quidem ambos motus in eodem plano absolvi assumamus.

116. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahentia A et B moveantur in eodem plano (Fig. 9), definire eorum motum absolutum.

Solutio. Moveantur ambo corpora A et B, quorum massae iisdem litteris indicentur, in plano tabulae, in quo assumta recta fixa OV, in eaque puncto fixo O, ad quodvis tempus elapsum $=t$ pro utroque corpore coordinatas orthogonales

Fig. 9



OX, XA et OP, PB assignari oportet. Ponamus ergo pro corpore A coordinatas $OX = X$, $XA = Y$, et ducta AL rectae fixae OV parallela, vocatisque distantia $AB = v$ et angulo $LAB = \varphi$, pro corpore B erunt coordinatae

$$OP = X + v\cos\varphi \quad \text{et} \quad PB = Y + v\sin\varphi\,.$$

Iam quia vis, qua corpora se mutuo attrahunt, est $= \frac{AB}{vv}$, corpus A sollicitabitur secundum directiones fixas

$$\text{secundum } OX \quad \text{vi} = \frac{AB}{vv}\cos\varphi\,, \qquad \text{secundum } XA \quad \text{vi} = \frac{AB}{vv}\sin\varphi\,;$$

corpus vero B sollicitabitur

$$\text{secundum } OP \quad \text{vi} = -\frac{AB}{vv}\cos\varphi\,, \qquad \text{secundum } PB \quad \text{vi} = -\frac{AB}{vv}\sin\varphi\,.$$

Sumto ergo elemento temporis dt constante, habebimus has quatuor aequationes:

$$\text{I.} \qquad ddX = \frac{2gB\,dt^2}{vv}\cos\varphi\,,$$

$$\text{II.} \qquad ddY = \frac{2gB\,dt^2}{vv}\sin\varphi\,,$$

$$\text{III.} \quad ddX + dd\cdot v\cos\varphi = -\frac{2gA\,dt^2}{vv}\cos\varphi\,,$$

$$\text{IV.} \quad ddY + dd\cdot v\sin\varphi = -\frac{2gA\,dt^2}{vv}\sin\varphi\,,$$

unde sublatis ddX et ddY supererunt hae duae aequationes:

$$(1) \quad dd\cdot v\cos\varphi = -\frac{2g(A+B)\,dt^2}{vv}\cos\varphi\,,$$

$$(2) \quad dd\cdot v\sin\varphi = -\frac{2g(A+B)\,dt^2}{vv}\sin\varphi\,,$$

quibus definitur motus respectivus corporis B, qualis spectatori in A posito esset appariturus, quippe qui motus per distantiam $AB = v$ et angulum $LAB = \varphi$

determinatur. Conveniuntque hae formulae perfecte cum iis, quas in superiori capite invenimus. Definito autem hoc motu respectivo, pro absoluto deinceps colligimus

$$(A+B)\,ddX + B\,dd\cdot v\cos\varphi = 0 \quad \text{et} \quad (A+B)\,ddY + B\,dd\cdot v\sin\varphi = 0\ ,$$

ac proinde bis integrando

$$(A+B)X + Bv\cos\varphi = Et + \mathfrak{E} \quad \text{et} \quad (A+B)Y + Bv\sin\varphi = Ft + \mathfrak{F}\ ,$$

quibus motus uniformis communis centri inertiae corporum in directum declaratur. Ad motum ergo absolutum utriusque corporis cognoscendum primo motum respectivum investigari convenit, quod, etsi iam in superiori capite est praestitum, solutionem tamen ex binis aequationibus hic expositis petamus. Ac primo quidem haec combinatio $(1)\cdot v\sin\varphi - (2)\cdot v\cos\varphi$ praebet

$$v\sin\varphi\ dd\cdot v\cos\varphi - v\cos\varphi\ dd\cdot v\sin\varphi = 0\ ,$$

quae integrata dat[14]

$$v\sin\varphi\, d\cdot v\cos\varphi - v\cos\varphi\, d\cdot v\sin\varphi = -C\,dt\ ,$$

seu

$$vv\,d\varphi = C\,dt\ .$$

Deinde ista combinatio $d\cdot v\cos\varphi \times (1) + d\cdot v\sin\varphi \times (2)$ praebet

$$\begin{aligned} d\cdot v\cos\varphi \times dd\cdot v\cos\varphi + d\cdot v\sin\varphi \times dd\cdot v\sin\varphi \\ = -\frac{2g(A+B)\,dt^2}{vv}\,(\cos\varphi\ d\cdot v\cos\varphi + \sin\varphi\ d\cdot v\sin\varphi) \\ = -\frac{2g(A+B)\,dt^2}{vv}\,dv\ , \end{aligned}$$

unde integrando impetramus

$$(d\cdot v\cos\varphi)^2 + (d\cdot v\sin\varphi)^2 = D + \frac{4g(A+B)\,dt^2}{v}\ ,$$

sive

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = D\,dt^2 + \frac{4g(A+B)\,dt^2}{v}\ .$$

Quare cum ex illa sit $dt = \frac{vv\,d\varphi}{C}$, fiet

$$CC\,dv^2 + CCvv\,d\varphi^2 = Dv^4\,d\varphi^2 + 4g(A+B)v^3\,d\varphi^2\ ,$$

14 Editio princeps: $-2C\,dt$ loco $-C\,dt$.

hincque
$$d\varphi = \frac{C\,dv}{v\sqrt{\big(Dv^2 + 4g(A+B)v - CC\big)}}\,,$$
atque
$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{\big(Dv^2 + 4g(A+B)v - CC\big)}}\,.$$
Definitis autem ad tempus t quantitatibus v et φ, ex superioribus formulis colligentur coordinatae X et Y pro corpore A, ex quibus huius corporis motus absolutus innotescit, indeque etiam corporis alterius B.

117. **Corollarium 1.** Si J sit commune centrum inertiae amborum corporum, erit
$$(A+B)OK = A \cdot OX + B \cdot OP = (A+B)X + Bv\cos\varphi$$
et
$$(A+B)KJ = A \cdot XA + B \cdot PB = (A+B)Y + Bv\sin\varphi\,,$$
unde in superioribus formulis E est celeritas eius in directione OV, et F in directione KJ.

118. **Corollarium 2.** Positis ergo $E = 0$ et $F = 0$, commune centrum inertiae J quiescet. Ac si punctum O in eo ipso accipiamus, insuper constantes $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$ evanescunt, eritque tum
$$OX = X = -\frac{Bv\cos\varphi}{A+B} \quad \text{et} \quad XA = Y = -\frac{Bv\sin\varphi}{A+B}\,.$$

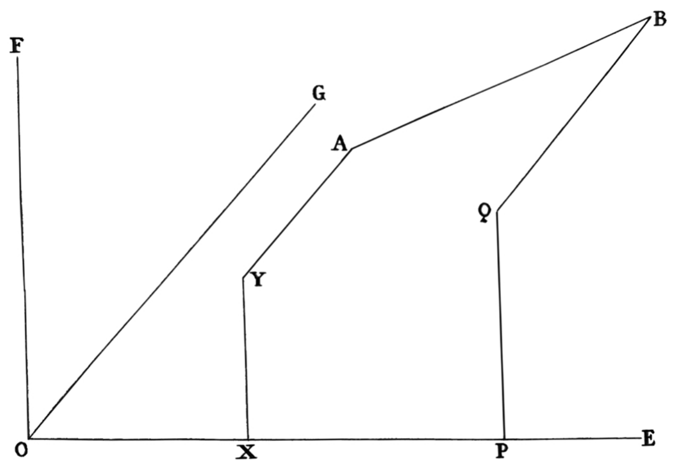
119. **Corollarium 3.** Cum in superiori capite per anomaliam veram s has determinationes invenerimus:
$$v = \frac{f}{1+n\cos s}\,, \quad \varphi = s+\alpha \quad \text{et} \quad t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2}\,,$$
habebimus in genere pro curva, quam corpus A motu absoluto describit, constantibus parumper immutatis,
$$OX = X = \mathfrak{E} + E\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} - \frac{Bf\cos(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)}\,,$$
$$XA = Y = \mathfrak{F} + F\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} - \frac{Bf\sin(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)}\,.$$

120. **Corollarium 4.** Pro curva vero, quam alterum corpus B motu absoluto describit, erunt coordinatae
$$OP = X + v\cos\varphi = \mathfrak{E} + E\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} + \frac{Af\cos(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)}\,,$$
$$PB = Y + v\sin\varphi = \mathfrak{F} + F\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} + \frac{Af\sin(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)}\,;$$
unde patet casu, quo $E = 0$ et $F = 0$, utramque curvam fore sectionem conicam.

121. **Scholion.** Hinc perspicitur egregius consensus inter ambas methodos, quibus sum usus ad motus binorum corporum determinandos, ac simul patet utramque methodum ita inter se cohaerere, ut determinatio motus respectivi praecipuam partem in motus absoluti investigatione constituat. Haec methodus scilicet latius patet quam illa, cum non solum motum respectivum perinde ac illa patefaciat, sed etiam motum absolutum utriusque corporis declaret, atque hoc quidem ita, ut ratio motuum absolutorum facillime e calculo eliminetur, totumque negotium ad motus respectivi determinationem perducatur. Hoc enim cognito nihil aliud superest, nisi ut motus communis centri inertiae, qui semper est uniformis secundum lineam rectam, in computum introducatur. Quare etiam in investigatione motus plurium corporum se mutuo attrahentium semper sufficit motus respectivos, qui spectatori in uno eorum collocato sint apparituri, determinasse. Etsi enim hic unum corpus tanquam quiescens consideratur, tamen facile est deinceps toti systemati eiusmodi motum mente saltem inducere, quo commune centrum inertiae vel ad quietem vel motum uniformem rectilineum redigatur, hocque modo ad motuum absolutorum cognitionem pervenietur. Istud etiam eo clarius patebit ex sequente problemate, ubi motus binorum corporum, quando non in eodem plano absolvuntur, sum evoluturus.

122. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahentia ita moveantur, ut motus eorum non in eodem plano absolvatur, definire utriusque corporis motum absolutum.

Fig. 10



Solutio. Sint iam elapso tempore $= t$ ambo corpora in A et B (Fig. 10), quorum massae iisdem litteris A et B indicentur. Referantur eorum loca ad ternas directiones fixas inter se normales OE, OF, OG, quibus constituantur pro utroque parallelae coordinatae, quas pro A vocemus $OX = X$, $XY = Y$ et $YA = Z$. Pro corpore autem B statuamus primo distantiam $AB = v$, tum vero eius inclinatio ad ternas illas directiones fixas OE, OF, OG indicetur angulis ζ, η, ϑ, ut sit $\cos^2\zeta + \cos^2\eta + \cos^2\vartheta = 1$, hincque coordinatae pro B erunt $OP = X + v\cos\zeta$, $PQ = Y + v\cos\eta$, $QB = z + v\cos\vartheta$, seu posito $v\cos\zeta = x$, $v\cos\eta = y$,

$v\cos\vartheta = z$, ut sit $vv = xx + yy + zz$, habebimus $OP = X + x$, $PQ = Y + y$, $QB = Z + z$. Cum iam vis attractrix secundum AB sit $= \frac{AB}{vv}$, corpus A ab ea sollicitatur:

$$\begin{aligned} &\text{secundum } OE \quad \text{vi} = \frac{AB}{vv}\cos\zeta\,,\\ &\text{secundum } OF \quad \text{vi} = \frac{AB}{vv}\cos\eta\,,\\ &\text{secundum } OG \quad \text{vi} = \frac{AB}{vv}\cos\vartheta\,,\end{aligned}$$

corpus vero B his viribus:

$$\begin{aligned} &\text{secundum } OE \quad \text{vi} = -\frac{AB}{vv}\cos\zeta\,,\\ &\text{secundum } OF \quad \text{vi} = -\frac{AB}{vv}\cos\eta\,,\\ &\text{secundum } OG \quad \text{vi} = -\frac{AB}{vv}\cos\vartheta\,,\end{aligned}$$

unde principia accelerationis suppeditabunt has aequationes:

$$\begin{aligned} ddX &= \frac{2gB}{vv}\,dt^2\cos\zeta\,,\\ ddY &= \frac{2gB}{vv}\,dt^2\cos\eta\,,\\ ddZ &= \frac{2gB}{vv}\,dt^2\cos\vartheta\,,\\ ddX + ddx &= -\frac{2gA}{vv}\,dt^2\cos\zeta\,,\\ ddY + ddy &= -\frac{2gA}{vv}\,dt^2\cos\eta\,,\\ ddZ + ddz &= -\frac{2gA}{vv}\,dt^2\cos\vartheta\,.\end{aligned}$$

Hic quantitates X, Y, Z referuntur ad motum absolutum corporis A, at x, y, z ad motum respectivum, quo corpus B ex A spectatum moveri cernitur. Pro hoc ergo colligimus:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad ddx &= -\frac{2g(A+B)\,dt^2\cos\zeta}{vv} = -\frac{2g(A+B)x\,dt^2}{v^3}\,,\\ \text{II.}\quad ddy &= -\frac{2g(A+B)\,dt^2\cos\eta}{vv} = -\frac{2g(A+B)y\,dt^2}{v^3}\,,\\ \text{III.}\quad ddz &= -\frac{2g(A+B)\,dt^2\cos\vartheta}{vv} = -\frac{2g(A+B)z\,dt^2}{v^3}\,,\end{aligned}$$

ex quibus cum aequatione $xx + yy + zz = vv$ omnes quantitates x, y, z et v ad tempus t determinari oportet. Inde autem primo has aequationes integrabiles deducimus

$$y\,ddx - x\,ddy = 0\,, \quad z\,ddy - y\,ddz = 0\,, \quad x\,ddz - z\,ddx = 0\,,$$

quae integratae dant

$$y\,dx - x\,dy = E\,dt\,, \quad z\,dy - y\,dz = F\,dt\,, \quad x\,dz - z\,dx = G\,dt\,.$$

Quare cum sit $F(y\,dx - x\,dy) = E(z\,dy - y\,dz)$, per yy dividendo nanciscemur $\frac{Fx}{y} = -\frac{Ez}{y} + \text{Const.}$ Similique modo ob $G(z\,dy - y\,dz) = F(x\,dz - z\,dx)$, per zz dividendo adipiscimur $\frac{Gy}{z} = -\frac{Fx}{z} + \text{Const.}$, ex quibus coniunctim deducimus $Fx + Gy + Ez = 0$, qua aequatione motus corporis B ex A spectatus in eodem plano fieri indicatur.

Porro si primam per $2\,dx$, secundam per $2\,dy$ et tertiam per $2\,dz$ multiplicemus, ob $x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$, summa erit

$$2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy + 2\,dz\,ddz = -\frac{4g(A+B)\,dv}{vv}\,dt^2\,,$$

cuius integrale ob dt constans dat

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = D\,dt^2 + \frac{4g(A+B)\,dt^2}{v}\,,$$

ex qua ope aequationum

$$Fx + Gy + Ez = 0\,, \quad xx + yy + zz = vv\,,$$

$$y\,dx - x\,dy = E\,dt\,, \quad z\,dy - y\,dz = F\,dt\,, \quad x\,dz - z\,dx = G\,dt$$

eadem solutio deducitur, quam iam supra dedimus. Denique inventis variabilibus x, y, z motum respectivum spectantibus, ex iis pro motu absoluto corporis A colliguntur coordinatae X, Y, Z per has aequationes:

$$X = \frac{-Bx + \mathfrak{E}t + \mathfrak{e}}{A+B}\,, \quad Y = \frac{-By + \mathfrak{F}t + \mathfrak{f}}{A+B}\,, \quad Z = \frac{-Bz + \mathfrak{G}t + \mathfrak{g}}{A+B}\,.$$

123. **Corollarium 1.** Ex aequationibus differentialibus

$$y\,dx - x\,dy = E\,dt\,, \quad z\,dy - y\,dz = F\,dt\,, \quad x\,dz - z\,dx = G\,dt\,,$$

sine integratione immediate colligitur, multiplicando primam per z, secundam per x, et tertiam per y, summamque sumendo:

$$0 = Ez\,dt + Fx\,dt + Gy\,dt\,, \quad \text{hincque} \quad Ez + Fx + Gy = 0\,.$$

124. **Corollarium 2.** Eaedem aequationes differentiales quadratae et additae, posito

$$EE + FF + GG = HH \ ,$$

praebent

$$HH\,dt^2 = vv(dx^2 + dy^2 + dz^2) - vv\,dv^2 \ ,$$

ideoque

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + \frac{HH\,dt^2}{vv} \ .$$

125. **Corollarium 3.** Si illae aequationes differentiales combinentur cum hac

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv \ ,$$

differentialia dx, dy et dz inde ita definiuntur, ut sit

$$\begin{aligned} dx &= \frac{x\,dv}{v} + \frac{(Ey - Gz)\,dt}{vv} \ , \\ dy &= \frac{y\,dv}{v} + \frac{(Fz - Ex)\,dt}{vv} \ , \\ dz &= \frac{z\,dv}{v} + \frac{(Gx - Fy)\,dt}{vv} \ . \end{aligned}$$

126. **Corollarium 4.** Cum autem sit $Ez + Gy = -Fx$, si ponamus $Ey - Gz = p$, erit quadratis addendis

$$(EE + GG)(yy + zz) = (EE + GG)(vv - xx) = FFxx + pp \ ,$$

ideoque, ob $FF + GG + EE = HH$, erit

$$p = Ey - Gz = \sqrt{\big((EE + GG)vv - HHxx\big)} \ ,$$

hincque

$$\frac{v\,dx - x\,dv}{vv} = d \cdot \frac{x}{v} = \frac{dt}{vv}\sqrt{\left(EE + GG - \frac{HHxx}{vv}\right)} \ .$$

127. **Scholion.** Hae investigationes non solum inserviunt motui absoluto definiendo, etsi in Astronomia parum interest eum nosse, sed imprimis eas ideo hic attulimus, ut intelligatur, quomodo huiusmodi solutiones, ubi plures aequationes differentio-differentiales occurrunt, tractari conveniat. Cum enim in sequentibus omnia a resolutione talium aequationum pendeant, in huiusmodi calculo maxime iuvabit vires analyseos exercuisse, unde haec tractatio utilitate non caritura videtur. Expedito ergo motu duorum corporum sphaericorum, quod quidem argumentum iam passim satis cumulate est pertractatum, antequam casum trium corporum aggrediamur, in motum duorum corporum non sphaericorum inquiramus, ut pateat, quantum discrimen a defectu sphaericitatis proficiscatur. Cum

enim tam solis quam planetarum corpora a figura sphaerica recedant, iam ob hanc solam causam irregularitates quaedam se motui, qui per regulas consuetas in hypothesi corporum sphaericorum determinatur, admiscebunt, quarum cognitio eo magis est necessaria, ne phaenomena hinc oriunda actioni aliorum corporum tribuantur. Hic vero alteri tantum corpori figuram a sphaerica diversam assignabimus, alterum perfecte sphaericum relinquentes; si enim ambo non fuerint sphaerica, primo alterum tanquam sphaericum spectetur, tum vero alterum, quo facto ex combinatione phaenomenorum solutio haud difficulter colligetur, praecipue cum viderimus a defectu figurae sphaericae motus parum perturbari.

CAPUT IV

De motu duorum corporum, quorum alterum tantum est sphaericum

128. **Problema.** Si corpus sphaericum moveatur circa corpus figura quacunque praeditum, quod omni motu rotatorio careat, invenire aequationes, quibus eius motus determinatur.

Solutio. Cum quaestio sit de motu respectivo corporis sphaerici, alterum corpus non sphaericum in quiete considerabimus, quoniam ipsi etiam omnem motum rotatorium adimimus. Sit igitur huius corporis centrum inertiae in J (Fig. 1), eiusque axes principales JA, JB, JC, quorum respectu sint momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, denotante M massam huius corporis, quod tanquam quiescens spectamus. Nunc autem elapso tempore $= t$ alterius corporis sphaerici centrum versetur in H, eiusque massa vocetur $= N$, unde ad planum binis axibus principalibus prioris corporis JA et JB contentum demittatur perpendiculum HG, et ex G ad axem JA ducatur normalis GF, ut habeantur pro eius loco ternae coordinatae $JF = x$, $FG = y$ et $GH = z$; distantia autem ipsa JH vocetur $= v$. Quodsi iam huc denominationes § 38 accommodemus, erit $h = v$, $\cos\alpha = \frac{x}{v}$, $\cos\beta = \frac{y}{v}$ et $\cos\gamma = \frac{z}{v}$, unde corpus N in H sequentibus tribus viribus secundum directiones $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ axibus principalibus parallelas sollicitatur:

$$\text{sec. } H\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1+\frac{3aa}{2vv}\left(3-\frac{5xx}{vv}\right)+\frac{3bb}{2vv}\left(1-\frac{5yy}{vv}\right)+\frac{3cc}{2vv}\left(1-\frac{5zz}{vv}\right)\right),$$
$$\text{sec. } H\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1+\frac{3bb}{2vv}\left(3-\frac{5yy}{vv}\right)+\frac{3cc}{2vv}\left(1-\frac{5zz}{vv}\right)+\frac{3aa}{2vv}\left(1-\frac{5xx}{vv}\right)\right),$$
$$\text{sec. } H\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1+\frac{3cc}{2vv}\left(3-\frac{5zz}{vv}\right)+\frac{3aa}{2vv}\left(1-\frac{5xx}{vv}\right)+\frac{3bb}{2vv}\left(1-\frac{5yy}{vv}\right)\right).$$

A paribus autem viribus, sed contrario modo applicatis corpus M ad corpus in H sollicitatur, quae cum denuo, ob motum respectivum, contrario modo ad corpus in H sint transferendae et in ratione massarum M ad N mutandae, motus respectivus corporis in H sequentibus tribus aequationibus differentio-differentialibus exprimetur, sumto elemento temporis dt constante:

$$ddx = -\frac{2g(M+N)x\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(3aa+bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$
$$ddy = -\frac{2g(M+N)y\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(aa+3bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$
$$ddz = -\frac{2g(M+N)z\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(aa+bb+3cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

ubi notandum esse $vv = xx+yy+zz$. Hinc autem primo colligimus

$$\frac{ddx}{x}-\frac{ddy}{y} = -\frac{2g(M+N)\,dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(aa-bb)}{vv},$$
$$\frac{ddy}{y}-\frac{ddz}{z} = -\frac{2g(M+N)\,dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(bb-cc)}{vv},$$
$$\frac{ddz}{z}-\frac{ddx}{x} = -\frac{2g(M+N)\,dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(cc-aa)}{vv},$$ Orig: 227

indeque porro

$$\frac{y\,ddx-x\,ddy}{(aa-bb)xy} = \frac{z\,ddy-y\,ddz}{(bb-cc)yz} = \frac{x\,ddz-z\,ddx}{(cc-aa)xz},$$

seu

$$(aa-bb)xy\,ddz+(bb-cc)yz\,ddx+(cc-aa)xz\,ddy = 0,$$

quam autem immediate ulterius reducere non licet.

Verum ex tribus illis primis formulis, si brevitatis gratia ponamus

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 = f^2u^2,$$

obtinebimus hanc aequationem integrabilem:

$$\begin{aligned} &dx\,ddx+dy\,ddy+dz\,ddz\\ &\quad= -\frac{2g(M+N)\,dt^2}{v^3}\left(v\,dv+\frac{3(aa+bb+cc)\,dv}{2v}+\frac{3ffu\,du}{vv}-\frac{15ffuu\,dv}{2v^3}\right)\\ &\quad= -2g(M+N)\,dt^2\left(\frac{dv}{vv}+\frac{3(aa+bb+cc)\,dv}{2v^4}+\frac{3ffu\,du}{v^5}-\frac{15ffuu\,dv}{2v^6}\right). \end{aligned}$$

Huius enim integrale est

$$dx^2+dy^2+dz^2 = D\,dt^2+4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{aa+bb+cc}{2v^3}-\frac{3ffuu}{2v^5}\right).$$

Cum autem praeterea aliae integrationes non adsint, hinc solutionem in quantitatibus finitis expressam deducere non licet.

129. **Corollarium 1.** Ob tres variabiles x, y, z per tempus t determinandas requiruntur tres aequationes, unde cum integrali postremo loco inventa adhuc duas coniungi oportet, ac perinde est quaenam ad hunc finem eligantur.

130. **Corollarium 2.** Loco alterius harum commodissime accipi videtur haec, in quam ternae variabiles x, y et z aequaliter ingrediuntur:

$$(aa-bb)xy\,ddz+(bb-cc)yz\,ddx+(cc-aa)xz\,ddy=0\ ,$$

quae etiam ad hanc formam reducitur:

$$aax(y\,ddz-z\,ddy)+bby(z\,ddx-x\,ddz)+ccz(x\,ddy-y\,ddx)=0\ .$$

131. **Corollarium 3.** Loco tertiae vero aequationis pro lubitu una ex his tribus accipietur:

$$\begin{aligned} y\,ddx-x\,ddy &= -\frac{6g(aa-bb)(M+N)xy\,dt^2}{v^5}\ ,\\ z\,ddy-y\,ddz &= -\frac{6g(bb-cc)(M+N)yz\,dt^2}{v^5}\ ,\\ x\,ddz-z\,ddx &= -\frac{6g(cc-aa)(M+N)xz\,dt^2}{v^5}\ . \end{aligned}$$

132. **Scholion 1.** Quomodocunque autem hae aequationes cum ista

$$dx^2+dy^2+dz^2=D\,dt^2+4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{aa+bb+cc}{2v^3}-\frac{3ffuu}{2v^5}\right)$$

posito brevitatis gratia $aaxx+bbyy+cczz=ffuu$ combinentur, solutio problematis maximis difficultatibus involvitur. Quare cum problema latissime pateat ob figuram quamcunque, quam corpori quiescenti tribuimus, casus magis particulares contemplemur; ac primo quidem statim patet, si duo corporis M momenta principalia fuerint inter se aequalia, difficultates illas maximam partem evanescere. Statuamus ergo momenta inertiae respectu axium JA et JB inter se aequalia, seu $bb=aa$, atque evidens est in hac hypothesi perinde esse, sive corpus M quiescat, sive ei motus gyratorius quicunque circa axem tertium JC tribuatur, quoniam omnia momenta respectu axium in plano AJB, quod tanquam quiescens spectamus, sumtorum, sunt inter se aequalia. Pro hoc ergo casu motum respectivum alterius corporis sphaerici N investigemus.

133. **Scholion 2.** Interim tamen conatus exposuisse iuvabit, qui forte aliquando ad solutionem producere valeant. Faciamus statim has substitutiones:

$$\begin{aligned} &x=pv\ , \quad y\,dx-x\,dy=l\,dt\ , \quad 2g(aa-bb)\,(M+N)=A\ ,\\ &y=qv\ , \quad z\,dy-y\,dz=m\,dt\ , \quad 2g(bb-cc)\,(M+N)=B\ ,\\ &z=rv\ , \quad x\,dz-z\,dx=n\,dt\ , \quad 2g(cc-aa)(M+N)=C\ , \end{aligned}$$

ex quibus pro novis litteris concludimus has relationes:

$$pp+qq+rr=1\,,\quad lz+mx+ny=0\,,\quad \text{seu}\quad lr+mp+nq=0\,,$$

tum $A+B+C=0$, item $Acc+Baa+Cbb=0$. Porro, ob $y\,ddx-x\,ddy=dl\,dt$, habebimus

$$dl=-\frac{3Apq\,dt}{v^3}\,,\quad dm=-\frac{3Bqr\,dt}{v^3}\,,\quad dn=-\frac{3Cpr\,dt}{v^3}\,.$$

Deinde cum sit $y\,dx-x\,dy=vv(q\,dp-p\,dq)$, nanciscimur

$$q\,dp-p\,dq=\frac{l\,dt}{vv}\,,\quad r\,dq-q\,dr=\frac{m\,dt}{vv}\,,\quad p\,dr-r\,dp=\frac{n\,dt}{vv}\,;$$

unde fit

$$\frac{(lq-nr)\,dt}{vv}=qq\,dp-pq\,dq-pr\,dr+rr\,dp=dp\,,$$

quia est $-q\,dq-r\,dr=p\,dp$ et $pp+qq+rr=1$. Sicque erit

$$dp=\frac{(lq-nr)\,dt}{vv}\,,\quad dq=\frac{(mr-lp)\,dt}{vv}\,,\quad dr=\frac{(np-mq)\,dt}{vv}\,;$$

atque hinc porro colligitur $r\,dl+p\,dm+q\,dn=0$, $m\,dp+n\,dq+l\,dr=0$; tum vero etiam

$$ccr\,dl+aap\,dm+bbq\,dn=0\,,$$

ideoque

$$Cp\,dm=Bq\,dn\,,\quad Cr\,dl=Aq\,dn\,,\quad Br\,dl=Ap\,dm\,,$$

sive

$$\frac{r\,dl}{A}=\frac{p\,dm}{B}=\frac{q\,dn}{C}=-\frac{3pqr\,dt}{v^3}\,.$$

Ex assumtis autem aequationibus obtinemus

$$dt^2\,(ll+mm+nn)=vv(dx^2+dy^2+dz^2)-vv\,dv^2\,,$$

ita ut nostra aequatio integralis futura sit

$$\begin{aligned}dv^2&+\frac{(ll+mm+nn)\,dt^2}{vv}\\&=D\,dt^2+2g(M+N)\,dt^2\left(\frac{2}{v}+\frac{aa+bb+cc}{v^3}-\frac{3(aapp+bbqq+ccrr)}{v^3}\right)\,,\end{aligned}$$

in qua, quia quantitates $ll+mm+nn$ et $aapp+bbqq+ccrr$ [...][15], investigemus per formulas superiores earum differentialia. Reperiemus ergo

$$l\,dl+m\,dm+n\,dn=-\frac{3\,dt}{v^3}(Alpq+Bmqr+Cnpr)$$

et

$$aap\,dp+bbq\,dq+ccr\,dr=\frac{dt}{vv}\Big((aa-bb)lpq+(bb-cc)mqr+(cc-aa)npr\Big)\ ,$$

seu ob $aa-bb=\dfrac{A}{2g(M+N)}$ erit

$$aap\,dp+bbq\,dq+ccr\,dr=\frac{dt}{2g(M+N)v^2}(Alpq+Bmqr+Cnpr)\ ,$$

ita ut sit

$$aap\,dp+bbq\,dq+ccr\,dr=-\frac{v(l\,dl+m\,dm+n\,dn)}{6g(M+N)}\ .$$

Hinc etiam differentio-differentialia primitiva definire possumus, cum enim sit

$$dx=p\,dv+v\,dp=p\,dv+\frac{(lq-nr)\,dt}{v}\ ,$$

erit

$$ddx=p\,ddv+\frac{(lq-nr)\,dt\,dv}{vv}-\frac{(lq-nr)\,dt\,dv}{vv}+\frac{dt}{v}\,d\,(lq-nr)\ .$$

Est vero

$$d\,(lq-nr)=\frac{-3Apqq\,dt+3Cprr\,dt}{v^3}+\frac{dt}{vv}(lmr-llp-nnp+mnq)\ ,$$

quae ob $lr+nq=-mp$ abit in

$$d\,(lq-nr)=-\frac{3p\,dt}{v^3}(Aqq-Crr)-\frac{p\,dt}{vv}(ll+mm+nn)\ ,$$

ita ut sit

$$ddx=p\,ddv-\frac{p\,dt^2}{v^3}(ll+mm+nn)-\frac{3p\,dt^2}{v^4}(Aqq-Crr)\ ,$$

quae expressio aequalis est isti

$$-\frac{2g(M+N)p\,dt^2}{v^2}\left(1+\frac{3(3aa+bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aapp+bbqq+ccrr)}{2vv}\right)\ .$$

15 Lacuna in manuscripto.

Cum iam sit

$$\begin{aligned} Aqq - Crr &= 2g(M+N)(aaqq - bbqq - ccrr + aarr) \\ &= 2g(M+N)(aa - aapp - bbqq - ccrr)\ , \end{aligned}$$

erit

$$\begin{aligned} ddv = {} & \frac{dt^2\,(ll+mm+nn)}{v^3} \\ & - \frac{2g(M+N)\,dt^2}{v^2}\left(1 + \frac{3(aa+bb+cc) - 9(aapp+bbqq+ccrr)}{2vv}\right)\ , \end{aligned}$$

quae, aequationem integralem per dv multiplicando, facile reducitur.

En ergo octo variabiles t, v, l, m, n, p, q, r, quas determinari oportet ope harum aequationum:

$$\begin{aligned} &1. && pp+qq+rr = 1\ , \\ &2. && lr+mp+nq = 0\ , \\ &3. && dp = \frac{(lq-nr)\,dt}{vv}\ , \\ &4. && dq = \frac{(mr-lp)\,dt}{vv}\ , \\ &5. && dr = \frac{(np-mq)\,dt}{vv}\ , \\ &6. && dl = -\frac{6g(aa-bb)(M+N)pq\,dt}{v^3}\ , \\ &7. && dm = -\frac{6g(bb-cc)(M+N)qr\,dt}{v^3}\ , \\ &8. && dn = -\frac{6g(cc-aa)(M+N)pr\,dt}{v^3}\ , \\ &9. && r\,dl + p\,dm + q\,dn = 0\ , \\ &10. && l\,dr + m\,dp + n\,dq = 0\ , \\ &11. && ccr\,dl + aap\,dm + bbq\,dn = 0\ , \end{aligned}$$

cum quibus aequationem vel differentio-differentialem ddv, vel integralem inde natam combinari oportet.

134. **Problema.** Si corpus M (Fig. 1)[16], quod ut quiescens spectatur, habeat momenta inertiae principalia respectu axium JA et JB aequalia, idque sive quiescat, sive circa axem tertium JC gyretur, definire eius respectu motum alterius corporis sphaerici N.

16 Vide § 38.

Solutio. Retentis omnibus denominationibus, quas in problemate praecedente constituimus, ob $bb = aa$, aequatio nostra integralis erit[17]

$$dx^2+dy^2+dz^2=D\,dt^2+4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{2aa+cc}{2v^3}-\frac{3aa(xx+yy)+3cczz}{2v^5}\right).$$

Praeterea vero habebimus has duas:

$$y\,ddx - x\,ddy = 0 \quad \text{et} \quad x\,ddz - z\,ddx = -\frac{6g(cc-aa)(M+N)xz\,dt^2}{v^5}\,,$$

existente $xx+yy+zz=vv$, quarum illa integrata praebet $y\,dx - x\,dy = E\,dt$. Statuamus praeterea $z\,dy - y\,dz = q\,dt$ et $x\,dz - z\,dx = r\,dt$, eritque

$$dq = \frac{6g(cc-aa)(M+N)yz\,dt}{v^5} \quad \text{et} \quad dr = -\frac{6g(cc-aa)(M+N)xz\,dt}{v^5}\,,$$

ita ut sit $x\,dq + y\,dr = 0$. Tum vero ex illis tribus formulis colligimus $Ez+qx+ry = 0$, atque insuper $(EE+qq+rr)\,dt^2 = vv(dx^2+dy^2+dz^2) - vv\,dv^2$, hincque

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dv^2 + \frac{(EE+qq+rr)\,dt^2}{vv}\,.$$

Ex aequationibus $Ez+qx+ry=0$ et $xx+yy+zz=vv$ concludimus

$$x = \frac{-Eqz + r\sqrt{\big((qq+rr)vv-(EE+qq+rr)zz\big)}}{qq+rr}\,,$$
$$y = \frac{-Erz - q\sqrt{\big((qq+rr)vv-(EE+qq+rr)zz\big)}}{qq+rr}\,.$$

Deinde vero habemus $dz = \frac{z\,dv}{v} - \frac{(qy-rx)\,dt}{vv}$, ideoque

$$dz = \frac{z\,dv}{v} + \frac{dt}{vv}\sqrt{\big((qq+rr)vv-(EE+qq+rr)zz\big)}$$

et

$$d\cdot\frac{z}{v} = \frac{dt}{vv}\sqrt{\left(qq+rr-\frac{(EE+qq+rr)zz}{vv}\right)}\,.$$

Aequatio autem prima hinc reducitur ad hanc formam:

$$dv^2 = D\,dt^2 - \frac{(EE+qq+rr)\,dt^2}{vv} + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{(cc-aa)(vv-3zz)}{2v^5}\right).$$

Ponamus $z=uv$, $q = s\cos\omega$ et $r = s\sin\omega$, eritque

$$dv^2 = D\,dt^2 - \frac{(EE+ss)\,dt^2}{vv} + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{(cc-aa)(1-3uu)}{2v^3}\right),$$

17 Editio princeps: $-3cczz$ loco $+3cczz$.

atque $du = \frac{dt}{vv}\sqrt{(ss - (EE + ss)uu)}$; tum vero[18]

$$x = \frac{-Eu\cos\omega + \sin\omega\sqrt{\big(ss - (EE + ss)uu\big)}}{s} \cdot v\,,$$
$$y = \frac{-Eu\sin\omega - \cos\omega\sqrt{\big(ss - (EE + ss)uu\big)}}{s} \cdot v\,,$$

unde differentialia dq et dr supra definita dant[19]

$$ds = -6g(cc - aa)(M + N) \cdot \frac{u\,dt}{sv^3}\sqrt{\big(ss - (EE + ss)uu\big)}\,,$$
$$s\,d\omega = +6g(cc - aa)(M + N) \cdot \frac{Euu\,dt}{sv^3}\,.$$

Eliminato ergo dt primo pro determinatione harum trium quantitatum v, u, s hae duae aequationes oriuntur:

$$dv^2\,\big(ss - (EE + ss)uu\big) \\ = du^2\,\Big(Dv^4 - (EE + ss)vv + 4g(M + N)v\,\big(v^2 + \tfrac{1}{2}(cc - aa)(1 - 3uu)\big)\Big)$$

et

$$s\,ds = -6g(cc - aa)(M + N)\frac{u\,du}{v}\,,$$

quae si resolvi possent, ex iis deinceps angulus ω et tempus t facile determinaretur. Sed vereor ne omnis labor hic nequicquam consumatur.

135. **Scholion.** Neque ergo hunc casum, etiamsi in suo genere facilis videatur, calculus expedire sinit. Verum si ponamus corpus B in ipso plano AJB, in quod axes principales aequalia momenta inertiae habentes incidunt, moveri, calculi difficultates superare licet, qui casus propterea meretur, ut omni cura evolvatur. Cum autem corpus M ita comparatum accipiatur, ut bina momenta inertiae, quae axibus JA et JB respondent, sint inter se aequalia, ei quasi unicus axis JC relinquitur, quoniam omnes axes in plano AJB assumti pari proprietate sunt praediti, sectionem per hoc planum factam tanquam aequatorem corporis spectare poterimus, praecipue cum corpori motum rotatorium quemcunque circa axem JC tribuere liceat. Quomodocunque scilicet corpus M circa axem JC gyretur, si alterum corpus B in ipso eius aequatoris plano AJB moveatur, motum eius calculo definire poterimus, id quod in sequente problemate praestabimus.

136. **Problema.** Si corpus M, momenta inertiae respectu axium JA et JB aequalia habens (Fig. 11), utcunque gyretur circa axem JC, alterumque corpus N in ipso illius plano aequatoris AJB moveatur, huius motum respectivum definire.

18 Editio princeps: $-E\cos\omega$ loco $-Eu\cos\omega$; $-E\sin$ loco $-Eu\sin\omega$.
19 Editio princeps: $Eu\,dt$ loco $Euu\,dt$.

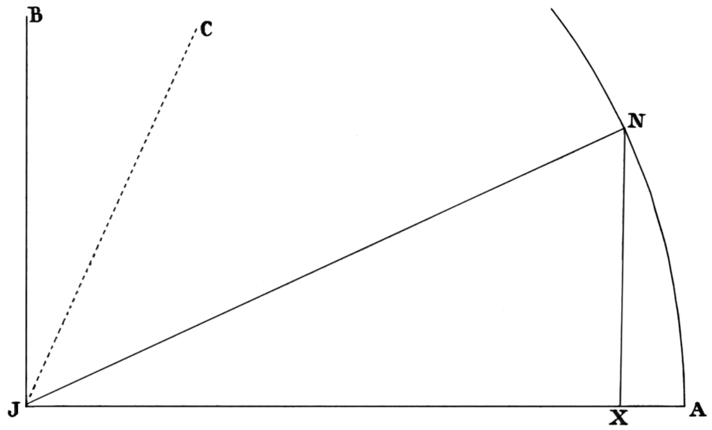


Fig. 11

Solutio. Cum sit $bb = aa$, omnia momenta inertiae ad axes in plano aequatoris sumtos relata sunt $= Maa$, momentum inertiae autem respectu axis $JC = Mcc$, circa quem corpus gyratur. Deinde ob applicatam $z = 0$, si corpus N in plano aequatoris tempore $= t$ confecerit arcum AN, ponamusque coordinatas $JX = x$, $XN = y$ et distantiam $JN = v$, ut sit $xx + yy = vv$, motus quaesitus his duabus aequationibus continetur:

$$dx^2 + dy^2 = D\,dt^2 + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{2aa+cc}{2v^3} - \frac{3aa}{2v^3}\right)$$

et

$$y\,dx - x\,dy = E\,dt\,.$$

Cum ergo sit $y\,dy + x\,dx = v\,dv$, erit

$$EE\,dt^2 + vv\,dv^2 = (yy+xx)(dx^2+dy^2) = vv(dx^2+dy^2)\,,$$

ideoque

$$dv^2 + \frac{EE\,dt^2}{vv} = D\,dt^2 + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}\right)$$

et

$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{\left(Dvv + 4g(M+N)v - EE + \frac{2g(cc-aa)(M+N)}{v}\right)}}\,.$$

Praeterea vero posito angulo $AJN = \varphi$, ut sit $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$, erit $y\,dx - x\,dy = -vv\,d\varphi$, hincque sumto E negativo, $d\varphi = \frac{E\,dt}{vv}$, ac propterea

$$d\varphi = \frac{E\,dv}{v\sqrt{\left(Dvv + 4g(M+N)v - EE + \frac{2g(cc-aa)}{v}(M+N)\right)}}\,.$$

Statuamus $v = \frac{f}{u}$, ut obtineamus $dt = \frac{ff\,d\varphi}{Euu}$ et

$$d\varphi = -\frac{E\,du}{\sqrt{\left(Dff + 4g(M+N)fu - EEuu + \frac{2g}{f}(cc-aa)(M+N)u^3\right)}}\,.$$

Ponamus $u = 1 + n\cos s$, ut ob $du = -n\,ds\sin s$ differentiale du et propterea etiam dv duobus casibus evanescat: $s = 0°$ et $s = 180°$, ac necesse est, ut quoque denominator seu formula irrationalis evanescat iisdem casibus, quod fieri nequit, nisi ea factorem habeat $\sin s$. Facta autem substitutione $u = 1 + n\cos s$, quantitas signo radicali involuta abit in hanc formam, posito brevitatis causa $\frac{2g}{f}(cc-aa)(M+N) = L$:

$$\begin{aligned}
&+ Dff + 4g(M+N)f - EE + L\\
&+ \big(4ng(M+N)f - 2nEE + 3nL\big)\cos s\\
&+ (3nnL - nnEE)\cos^2 s\\
&+ n^3L\cos^3 s\,,
\end{aligned}$$

scribamus pro $\cos^2 s$ valorem $1 - \sin^2 s$, ut sit $\cos^3 s = \cos s - \sin^2 s\cos s$, fietque haec quantitas

$$\begin{aligned}
&+ Dff + 4g(M+N)f - (1+nn)EE + (1+3nn)L\\
&+ \big(4ng(M+N)f - 2nEE + n(3+nn)L\big)\cos s\\
&+ nn\,(EE - 3L - nL\cos s)\sin^2 s\,,
\end{aligned}$$

ac membra a $\sin^2 s$ immunia seorsim ad nihilum reducantur, ut constantes D et E per integrationes inductae per constantes novas assumtas f et n determinentur, quo pacto obtinebimus

$$EE = 2fg(M+N) + \tfrac{1}{2}(3+nn)L$$

et

$$Dff + 2(1-nn)fg(M+N) - \tfrac{1}{2}(1-nn)^2L = 0\,,$$

seu

$$Dff = -2(1-nn)fg(M+N) + \tfrac{1}{2}(1-nn)^2L\,,$$

unde denominator irrationalis prodit

$$n\sin s\sqrt{\left(2fg(M+N) - \tfrac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s\right)}$$

hincque

$$d\varphi = \frac{E\,ds}{\sqrt{\left(2fg(M+N) - \frac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s\right)}}$$

et

$$dt = \frac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2\sqrt{\left(2fg(M+N)-\frac{1}{2}(3-nn)L-nL\cos s\right)}}\,,$$

unde haud difficulter quantitates φ et t per variabilem s, ex eaque etiam $v = \frac{f}{1+n\cos s}$ definire licet.

137. **Corollarium 1.** Si $n = 0$, ob $v = f$ corpus N in circulo circa J revolvetur motu uniformi, eritque celeritas angularis

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{E}{ff} = \frac{1}{ff}\sqrt{\left(2fg(M+N)+\frac{3g}{f}(cc-aa)(M+N)\right)}$$

posito pro L eius valore, ex quo haec celeritas erit quoque

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{2g(M+N)}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)}\,.$$

138. **Corollarium 2.** At si $n > 1$, corpus N ita movebitur, ut absolutis angulis $s = 0°$, $360°$, $2\cdot 360°$, $3\cdot 360°$, etc. semper ad eandem distantiam minimam $v = \frac{f}{1+n}$ revertatur, angulis autem $s = 180°$, $3\cdot 180°$, $5\cdot 180°$, etc. absolutis, ad distantiam maximam $v = \frac{f}{1-n}$ perveniat. Illis scilicet casibus in abside ima, his vero in abside summa versabitur.

139. **Corollarium 3.** Cum autem anguli s non sint angulis φ aequales, loca absidum non iisdem angulis $AJN = \varphi$ successive respondebunt, unde hoc motu linea absidum mobilis est censenda, numerus vero n, quo discrimen inter distantiam maximam et minimam definitur, haud incongrue excentricitas, angulus s vero anomalia vera dicetur.

140. **Corollarium 4.** Si pro L valorem assumtum restituamus, erit

$$d\varphi = \frac{ds\;\sqrt{\left(1+\frac{(3+nn)(cc-aa)}{2ff}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{(3-nn)(cc-aa)}{2ff}-\frac{n(cc-aa)\cos s}{ff}\right)}}$$

et

$$dt\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2\;\sqrt{\left(1-\frac{(3-nn)(cc-aa)}{2ff}-\frac{n(cc-aa)\cos s}{ff}\right)}}\,.$$

Ab harum ergo duarum formularum integratione tota problematis solutio pendet.

141. **Scholion 1.** Fieri posse videtur, ut formulae hae irrationales adeo fiant imaginariae, id quod etiam in formula $\sqrt{\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)}$ locum haberet, si esset $2ff + 3cc < 3aa$, quo casu vis attractrix in distantia f, quae est $= \frac{MN}{ff}\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)$, fuerit negativa, quod utique est absurdum. Verum meminisse oportet formulas, quas supra pro vi attractrice invenimus, expressis verbis ex hac

hypothesi esse deductas, quod distantia, quae hic est $= f$, fit praegrandis prae corporis attrahentis magnitudine, a qua litterae a et c pendent. Quare in omnibus his solutionibus hoc primarium est requisitum, ut quantitas f vehementer excedat a et c, hincque fractio $\frac{cc-aa}{ff}$ semper sit quam minima. Atque ob hanc causam formulae inventae semper realiter motum quaesitum pro nostro quidem instituto definire sunt censendae. Si enim motus ita esset comparatus, ut corpus N nimis prope ad alterum accederet, tum ne quidem eius determinationem hic quidem suscipere liceret.

142. **Scholion 2.** Cum igitur quantitas $\frac{cc-aa}{ff}$ per hypothesin sit valde exigua, approximationibus adhibendis adipiscemur has formulas:

$$d\varphi = ds\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}+\frac{n(cc-aa)}{2ff}\cos s\right)$$

et

$$dt\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2}\left(1+\frac{(3-nn)(cc-aa)}{4ff}+\frac{n(cc-aa)}{2ff}\cos s\right),$$

quarum illius integrale est

$$\varphi = \text{Const.}+\left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)s+\frac{n(cc-aa)}{2ff}\sin s\,,$$

altera vero, prout excentricitas n fuerit unitate vel minor vel maior vel eidem aequalis, singulari modo integrari debet, pro quo negotio ea in hanc formam transfundatur[20]:

$$dt\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2}\left(1+\frac{(1-nn)(cc-aa)}{4ff}\right)+\frac{(cc-aa)\,ds}{2(1+n\cos s)}\,.$$

Iam vero casu $n<1$ supra ostendimus esse

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}$$

et

$$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\arccos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}-\frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\,,$$

deinde casu, quo $n=1$,

$$\int\frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s}\quad\text{et}\quad\int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}\,.$$

20 Editio princeps:
$$dt\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff\,ds}{(1+n\cos s)^2}\left(1+\frac{(1-nn)(cc-aa)}{4ff}+\frac{(cc-aa)\,ds}{2(1+n\cos s)}\right)$$

Tum vero casu, quo $n > 1$,

$$\int \frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}} \log \frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

$$\int \frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Hinc ergo pro casu $n < 1$ habebimus

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}} \arccos \frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{nff\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)} + \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(1-nn)}} \arccos \frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n(cc-aa)\sin s}{4(1+n\cos s)}.$$

Tum vero pro casu $n = 1$

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2} + \frac{(cc-aa)\sin s}{2(1+\cos s)}.$$

Ac denique pro casu $n > 1$

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{nff\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{ff}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s} - \frac{n(cc-aa)\sin s}{4(1+n\cos s)} + \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(nn-1)}} \log \frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Hunc quidem casum, quo $n > 1$, quoniam in mundo nusquam locum habere videtur, relinquentes, alterum, quo $n < 1$ accuratius persequamur, et quo pacto motus commodissime definiri atque ad datum tempus assignari possit, videamus. Manifestum autem est hunc motum parum a motu in ellipsi facto, quem supra exposuimus, fore diversum.

143. **Problema.** Determinationem motus, quo corpus N in casu praecedentis problematis circa corpus M in plano aequatoris revolvitur, ad calculum revocare.

Solutio. Primo cum s exprimat anomaliam veram corporis N, hoc est eius longitudinem ab abside ima computatam, littera vero φ longitudinem veram denotet a directione quapiam fixa computatam, ab eadem hac directione fixa longitudo absidis imae erit $= \varphi - s$, quae ergo ita definitur, ut sit

$$\varphi - s = \text{Const.} + \frac{(cc-aa)(3s+n\sin s)}{2ff},$$

unde patet lineam absidum non quiescere, sed in consequentia proferri, si sit $cc > aa$; sin autem fuerit $cc < aa$, retro moveri. Corpus scilicet N ab abside ima egressum ad absidem summam appellet confecto angulo $\varphi = \left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)180^\circ$, hoc est maiori quam 180°, si $cc > aa$; contra autem minori, si $cc < aa$. In genere autem inventa anomalia vera $= s$, erit longitudo

$$\varphi = \text{Const.} + \left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff}\right) s + \frac{n(cc-aa)}{2ff} \sin s\,.$$

Sin autem anomaliam veram s spectemus ut datam, erit distantia $JN = v = \frac{f}{1+n\cos s}$, ubi f contemplamur ut semiparametrum orbitae, et n eius excentricitatem, etiamsi orbita non sit elliptica. Tum vero pro relatione inter tempus t et anomaliam veram s commode exprimenda introducatur anomalia excentrica σ, ita ut sit

$$\cos\sigma = \frac{n+\cos s}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad \sin\sigma = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}\,,$$

unde vicissim ex data σ fit

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1-n\cos\sigma} \quad \text{et} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma}\,.$$

His positis habebimus

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \text{Const.} + \frac{ff(\sigma - n\sin\sigma)}{(1-nn)\sqrt{(1-nn)}} + \frac{(cc-aa)(3\sigma - n\sin\sigma)}{4\sqrt{(1-nn)}}\,,$$

unde vicissim pro dato tempore t primo anomalia excentrica σ, ex hacque porro vera s, hincque tam longitudo φ quam distantia $JN = v$ definiri poterit.

144. **Corollarium 1.** Cum fractio $\frac{cc-aa}{ff}$ sit quam minima, motus lineae absidum erit tardissimus, atque singulis revolutionibus corporis N tantum per angulum $\frac{3(cc-aa)}{2ff}\cdot 360^\circ = \frac{cc-aa}{ff}\cdot 540^\circ$ progredietur.

145. **Corollarium 2.** Tempus porro integrae revolutionis, quo corpus ab abside vel ima vel summa egressum iterum ad eandem revertitur, confecto angulo $\varphi = \left(1+\frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)360^\circ$, reperitur ponendo $s = 360^\circ$, unde fit quoque $\sigma = 360^\circ = 2\pi$. Ex quo tempus unius revolutionis erit

$$= \frac{2\pi ff}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fg(M+N)}} + \frac{3\pi(cc-aa)}{2(1-nn)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2fg(M+N)}}\,,$$

vel posito semiaxe transverso $\frac{f}{1-nn} = k$, fiet hoc tempus

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2g(M+N)}}\left(2k\sqrt{k} + \frac{3(cc-aa)}{2(1-nn)\sqrt{k}}\right).$$

146. **Corollarium 3.** Si anomaliam mediam seu angulum tempori proportionalem, qui absoluta una revolutione evadat $= 360°$, introducamus, eamque ponamus $= \tau$, debet esse

$$t\surd 2fg(M+N) = \tau\left(\frac{ff}{(1-nn)\surd(1-nn)} + \frac{3(cc-aa)}{4\surd(1-nn)}\right),$$

hincque fiet

$$\tau = \sigma - n\left(1 - \frac{(1-nn)(cc-aa)}{2ff}\right)\sin\sigma,$$

unde, ut supra, facile ex data anomalia media τ anomalia excentrica σ colligitur.

147. **Scholion 1.** Ut intelligamus quanta huiusmodi perturbatio ob figuram corporum coelestium non sphaericam oriri debeat, tribuamus corpori M, quod ex materia constet homogenea, figuram sphaeroidis elliptici, revolutione ellipsis circa axem CJ geniti, cuius alter semiaxis JC, circa quem fit revolutio, sit $= C$, alter vero seu semidiameter aequatoris $= A$, ita ut hoc sphaeroides sit compressum si $A > C$, elongatum vero si $A < C$. Iam supra § 44 vidimus fore pro nostris momentis inertiae $aa = bb = \frac{1}{5}(AA+CC)$ et $cc = \frac{2}{5}AA$, unde fit $cc - aa = \frac{1}{5}(AA-CC)$. Corpus ergo sphaeroidicum compressum, cuiusmodi est sol et terra ac sine dubio omnes planetae principales, efficit, ut lineae absidum progrediantur, quae regrederentur, si sphaeroides esset oblongum. Iam in terra est quasi $A = \frac{201}{200}C$ et $AA - CC = \frac{1}{100}CC$, ergo $cc - aa = \frac{1}{500}CC$. Hinc si statuatur $f = 60C$, ut fere evenit in luna, erit $\frac{cc-aa}{ff} = \frac{1}{500\cdot 60\cdot 60}$. Quare hinc linea absidum orbitae lunaris singulis revolutionibus seu mensibus progrederetur per $\frac{1}{500\cdot 60\cdot 60}\cdot 540° = 1''5'''$, et unius anni intervallo per $13''$, qui effectus prae eo, qui ab aliis causis oritur, facile negligi potest. In sole autem $cc - aa$ multo minus est quam $\frac{1}{500}CC$, unde in planetis primariis hinc nulla perturbatio sensibilis oriri est censenda. In Jove autem, quia ob tam celerem motum vertiginis est circiter $A = \frac{11}{10}C$, erit $AA - CC = \frac{1}{5}CC$ hincque $cc - aa = \frac{1}{25}CC$. Cum iam pro primo satellite sit quasi $f = 6C$, una revolutione huius satellitis linea absidum progreditur per angulum $\frac{1}{25\cdot 6\cdot 6}\cdot 540° = 36'$, siquidem orbitam eius in plano aequatoris Jovis statuamus, unde cum hic effectus producatur tempore $42\frac{1}{2}$ horarum, intervallo unius diei erit $20'$ et unius anni $121°45'$, cuiusmodi velox absidum motus nusquam alibi est observatus; in reliquis autem Jovis satellitibus multo minor esse debet, ob maiorem eorum distantiam. At Saturnus, si annulum cum eo coniunctim spectemus, referet sphaeroides multo magis compressum, ex quo in eius satellitibus multo velocior motus absidum generari debet. Hic certe maxime notatu est dignum in orbitis satellitum Jovis, ac praecipue primi, tam enormem lineae absidum mutabilitatem inesse debere, quae tantum a figura Jovis non sphaerica proficiscatur; quod phaenomenon, si per observationes confirmari posset, mirifice theoriae attractionis universalitatem confirmaret.

148. **Scholion 2.** Quanquam in hoc motu, quem hic definivimus, tam via a corpore descripta, quam temporis ratio areis proportionalis maxime est transcen-

dens, tamen calculum ita commode administrare licuit, ut determinatio motus vix difficilior, quam in casu ellipsis simplicis evaderet. Totum scilicet discrimen huc est perductum, ut linea absidum mobilis statueretur, dum reliqua omnia prorsus cum motu elliptico supra exposito conveniunt. Hoc compendio Astronomi iam pridem feliciter sunt usi, dum motus planetarum primariorum ita repraesentant, ac si in ellipsibus mobilibus circa solem revolverentur, in motu autem lunae insuper tam excentricitatem quam parametrum ellipsis variabilem statui oportere agnoverunt; quae idea eximium calculi alias intricatissimi compendium largitur. Atque non solum haec ita se habent, quando curva percursa sita est in eodem plano, sed etiam quando eius planum est variabile; tum autem huius variabilitatis rationem singulari modo ita ad quodpiam planum fixum referri convenit, ut ad quodvis tempus tam intersectio quam inclinatio planorum definiatur.

149. **Scholion 3.** Hoc modo approximationem institui conveniet, quando formulae analyticae, quibus motus determinatur, resolutionem non admittunt, quemadmodum in hoc capite usu venit, ubi hunc solum postremum casum, quo corpus M bina momenta inertiae respectu axium JA et JB aequalia habere, alterumque corpus N in ipso horum axium plano AJB moveri ponebatur, expedire licuit. Fundamentum autem huius approximationis in hoc est situm, quod inter vires corpus N sollicitantes una prae ceteris eminet, quae ad punctum quasi fixum J dirigitur et quadratis distantiarum reciproce est proportionalis, reliquae autem vires prae hac sint valde exiguae. Tum enim motus corporis N non multum a ratione motus in sectione conica facti differet, cuius aberrationem tantum ab ista lege definivisse sufficiet. Quemadmodum ergo his casibus ope approximationis ad solutionem pervenire liceat, in sequente capite generatim explicabimus, in quo duplex investigatio erit instituenda, prout motus corporis N vel in eodem plano absolvetur, vel secus.

CAPUT V

Determinatio motus corporis, quando inter vires quibus sollicitatur, una ad punctum fixum tendens quadrato distantiae ab eo est reciproce proportionalis, reliquae vero vires prae illa sunt valde parvae

150. **Problema.** Si corpus N circa punctum quasi fixum J in eodem plano moveatur (Fig. 11), atque ad id trahatur vi quadrato distantiae reciproce proportionali, praeterea vero a viribus quibuscunque illius respectu valde parvis, corporis motum definire.

Solutio. Elapso tempore T sit distantia $JN = v$ et angulus $AJN = \varphi$, ut sint

$$JX = x = v\cos\varphi \quad \text{et} \quad XN = y = v\sin\varphi\,.$$

Ponamus iam vim secundum directionem NJ esse $= \dfrac{LN}{vv}$, ac praeterea adesse vires valde parvas NP et NQ, secundum directiones JX et XN agentes, et habebimus has aequationes:

$$ddx = -2g\,dt^2\left(\frac{Lx}{v^3} + P\right) \quad \text{et} \quad ddy = -2g\,dt^2\left(\frac{Ly}{v^3} + Q\right)\,,$$

unde concludimus: $x\,ddy - y\,ddx = -2g\,dt^2\,(Qx - Py)$, hincque integrando

$$x\,dy - y\,dx = -2g\,dt\int dt\,(Qx - Py)\,,$$

seu

$$vv\,d\varphi = -2g\,dt\int v\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,.$$

Statuamus nunc $v = \dfrac{p}{1 + q\cos s}$, ubi non solum angulus s, qui denotet anomaliam veram, sed etiam semiparameter p et excentricitas q sint quantitates variabiles, quarum variabilitas autem sit valde parva utpote a viribus P et Q proficiscens, quae si evanescerent, utique tam p quam q forent quantitates constantes. Ponamus brevitatis gratia $S = -2g\int v\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)$, ut habeamus

$$d\varphi = \frac{S\,dt\,(1 + q\cos s)^2}{pp}\,.$$

Deinde ex primis aequationibus concludimus

$$x\,ddx + y\,ddy = -2g\,dt^2\left(\frac{L}{v} + Px + Qy\right)\,;$$

at est

$$x\,ddx+y\,ddy+dx^2+dy^2=d\cdot v\,dv=v\,ddv+dv^2 \quad \text{et} \quad dx^2+dy^2=dv^2+vv\,dd\varphi^2\ ,$$

hincque

$$x\,ddx+y\,ddy=v\,ddv-vv\,d\varphi^2\ ,$$

seu

$$ddv-v\,d\varphi^2=-2g\,dt^2\left(\frac{L}{vv}+P\cos\varphi+Q\sin\varphi\right)\ ,$$

ubi, si pro $d\varphi$ valorem inventum substituamus, nanciscemur

$$\frac{ddv}{dt}=\frac{SS\,dt\,(1+q\cos s)^3}{p^3}-\frac{2gL\,dt\,(1+q\cos s)^2}{pp}-2g\,dt\,(P\cos\varphi+Q\sin\varphi)\ .$$

Hic primum observo, si praeter P et Q etiam excentricitas q evanesceret, prodire debere $ddv=0$, unde necesse est sit $SS=2gLp$ et $S=\sqrt{2gLp}$. Quare habebimus

$$dS=\frac{dp}{2\sqrt{p}}\sqrt{2gL}=-2gv\,dt\,(Q\cos\varphi-P\sin\varphi)\ ,$$

ideoque

$$dp=\frac{-4g\,dt\,(Q\cos\varphi-P\sin\varphi)p\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\sqrt{2gL}} \quad \text{et} \quad d\varphi=\frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}}\ .$$

Tum vero nostra aequatio adhuc resolvenda erit

$$\frac{ddv}{dt}=\frac{2gLq\,dt\ \cos s}{pp}(1+q\cos s)^2-2g\,dt\,(P\cos\varphi+Q\sin\varphi)\ .$$

Iam quia per hypothesin dum fit $\sin s=0$, etiam $\frac{dv}{dt}$ evanescere debet, statuamus $\frac{dv}{dt}=Vq\sin s$, eritque

$$Vq\,dt\sin s=dv=-\frac{4g\,dt\,(Q\cos\varphi-P\sin\varphi)p\sqrt{p}}{(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}-\frac{p\,d\cdot q\cos s}{(1+q\cos s)^2}\ ,$$

ita ut sit

$$d\cdot q\cos s=-\frac{Vq\,dt\sin s(1+q\cos s)^2}{p}-\frac{4g\,dt\,(Q\cos\varphi-P\sin\varphi)\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\ .$$

Porro autem, ob $\frac{ddv}{dt}=q\,dV\sin s+V\,d\cdot q\sin s$, erit

$$d\cdot q\sin s=-\frac{q\,dV\sin s}{V}+\frac{2gLq\,dt\cos s}{Vpp}(1+q\cos s)^2-\frac{2g\,dt\,(P\cos\varphi+Q\sin\varphi)}{V}\ ,$$

ex quibus duabus aequationibus concluditur

$$\begin{aligned} dq = &-\frac{Vq\,dt\sin s\cos s(1+q\cos s)^2}{p} - \frac{4g\,dt\cos s(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}} \\ &- \frac{q\,dV\sin^2 s}{V} + \frac{2gLq\,dt\sin s\cos s}{Vpp}(1+q\cos s)^2 \\ &- \frac{2g\,dt\sin s(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)}{V}\,, \end{aligned}$$

quae expressio evanescere debet casu $P=0$ et $Q=0$, ubi simul V fieret constans, ex qua conditione prodit

$$VV = \frac{2gL}{p} \quad \text{et} \quad V = \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad dv = q\,dt\sin s\sqrt{\frac{2gL}{p}}\,.$$

Praeterea ob

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{2p} = \frac{2g\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\sqrt{2gL}}\,,$$

erit

$$\begin{aligned} d\cdot q\cos s &= -\frac{q\,dt\sin s(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} - \frac{4g\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}} \\ d\cdot q\sin s &= \frac{q\,dt\cos s(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} - \frac{2g\,dt\,(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}} \\ &\quad - \frac{2gq\,dt\sin s(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\sqrt{2gL}}\,, \end{aligned}$$

unde colligimus

$$\begin{aligned} dq = &-\frac{2g\,dt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\bigg(2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\cos s \\ &+ (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\sin s + \frac{q(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin^2 s}{1+q\cos s}\bigg)\,, \\ q\,ds = &\frac{q\,dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} + \frac{2g\,dt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\bigg(2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s \\ &- (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\cos s - \frac{q(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s\cos s}{1+q\cos s}\bigg)\,, \end{aligned}$$

ita ut hinc sit

$$\begin{aligned} ds = &\frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} + \frac{2g\,dt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\bigg(\frac{2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s}{q} \\ &- \frac{(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\cos s}{q} - \frac{(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s\cos s}{1+q\cos s}\bigg)\,. \end{aligned}$$

Inde autem variatio excentricitatis q definitur, aeque ac semiparametri p, quibus inventis pro ipso motu erit

$$v = \frac{p}{1+q\cos s} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}}\ .$$

Cum deinde $\varphi - s$ designet longitudinem absidis imae, et haec erit variabilis, habebiturque

$$\begin{aligned} d(\varphi - s) = \frac{2g\,dt\,\sqrt{p}}{q\sqrt{2gL}}\Bigg(& (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\cos s \\ & - 2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s + \frac{q(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s\cos s}{1+q\cos s}\Bigg) \end{aligned}$$

sicque omnia, quae ad motus determinationem attinent, sunt determinata.

151. **Corollarium 1.** Si ponamus

$$Q\cos\varphi - P\sin\varphi = T \quad \text{et} \quad Q\sin\varphi + P\cos\varphi = U\,,$$

ut aequationes resolvendae sint

$$v\,dd\varphi + 2\,dv\,d\varphi = -2gT\,dt^2 \quad \text{et} \quad ddv - v\,d\varphi^2 = -\frac{2gL\,dt^2}{vv} - 2gU\,dt^2\ ,$$

eae posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$ ita resolventur, ut sit

1. $$d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{p}}\sqrt{2gL}\ ,$$

2. $$d\varphi - ds = \frac{2g\,dt\,\sqrt{p}}{q\sqrt{2gL}}\left(U\cos s - 2T\sin s + \frac{qT\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right)\ ,$$

3. $$dp = -\frac{4gTp\,dt\,\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\sqrt{2gL}}\ ,$$

4. $$dq = -\frac{2g\,dt\,\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\left(2T\cos s + U\sin s + \frac{qT\sin^2 s}{1+q\cos s}\right)\ .$$

152. **Corollarium 2.** Si ex formulis N° 2, 3, 4 quantitates T et U elidantur, pervenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq\cos s + q(d\varphi - ds)\sin s}{1+q\cos s}\ ,$$

quae integrata quatenus licet dat

$$l\,\frac{p}{1+q\cos s} = \int\frac{q\,d\varphi\sin s}{1+q\cos s} = \int\frac{q\,dt\,(1+q\cos s)\sin s}{p\sqrt{p}}\sqrt{2gL}\ .$$

153. **Corollarium 3.** Cum quantitates P et Q sint per hypothesin valde parvae, erunt quantitates p et q fere constantes et $d\varphi = ds$, unde fit

$$dt = \frac{p\,ds\,\sqrt{p}}{(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}\,,$$

cuius integrale spectatis p et q ut constantibus exhiberi poterit, quod cum sit prope verum, sufficiet deinceps hunc valorem pro dt in formulis 2, 3, 4 posuisse, ex iisque sumta sola s pro variabili, valores proxime veros pro $\varphi - s$, p et q elicuisse.

154. **Corollarium 4.** Hoc autem pro dt valore inducto, aequationes nostrae evolvendae erunt:

$$2.\quad d\varphi - ds = \frac{pp\,ds}{Lq(1+q\cos s)^2}\left(U\cos s - 2T\sin s + \frac{qT\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right)\,,$$

$$3.\quad dp = -\frac{2Tp^3\,ds}{L(1+q\cos s)^3}\,,$$

$$4.\quad dq = -\frac{pp\,ds}{L(1+q\cos s)^2}\left(2T\cos s + U\sin s + \frac{qT\sin^2 s}{1+q\cos s}\right)\,.$$

Revera autem in his formulis pro ds scribi oporteret $d\varphi$, sed quia saltem proxime est $d\varphi = ds$, iis in appropinquatione uti licebit.

155. **Scholion 1.** Hoc modo solutio problematis ad determinationem motus in ellipsi variabili perducitur, ita ut ratio motus similis sit illi, quam supra pro casu duorum corporum sphaericorum assignavimus, praeterquam quod hic elementa ellipsis omnia variabilia statuantur. Primo enim tam semiparameter ellipsis p quam excentricitas q est variabilis, tum vero etiam ipsa linea absidum mobilis assumitur, denotante angulo s anomaliam veram, secundum eandem ideam, quam supra constituimus. Atque haec reductio eo magis est notatu digna, quod quaedam operationes prorsus pro arbitrio nostro sint institutae, ex quo apparet infinitis aliis modis etiam posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$ relationem inter differentialia dp, dq, ds et $d\varphi$ ita constitui posse, ut motus rationi satisfiat. Loco enim determinationum $SS = 2gLp$ et $VV = \frac{2gL}{p}$, eosdem valores quantitatibus quibusdam exiguis per vires T et V definiendis augere liceret, quo pacto conditiones propositae aeque impleri possent, ut scilicet facto tam $q = 0$ quam $\sin s = 0$, evanescat $\frac{dv}{dt}$, insuperque casu $T = 0$, $V = 0$ et $q = 0$ prodeat $\frac{ddv}{dt^2} = 0$. Cum enim loco unius variabilis v tres novae p, q et s introducantur, mirum non est binarum determinationem arbitrio nostro relinqui, quam ita constitui convenit, ut calculus commodissimus reddatur, in quo quidem negotio saepenumero maxima difficultas deprehenditur. Atque in evolutione quidem, qua hic sumus usi, parum congruere videtur, quod expressio pro $d\varphi - ds$ inventa per excentricitatem q sit divisa, qua conditione determinatio motus lineae absidum lubrica redditur,

praecipue quando excentricitas q est valde parva. Siquidem calculum perfecte expedire liceret, nullum incommodum hinc esset metuendum, quoniam perpetuo absides ibi existunt, ubi distantia v est vel maxima vel minima, ita ut hic nulli incertitudini locus relinquatur. At cum approximatione contenti esse debeamus, ob hanc causam haud levia impedimenta occurrere possunt.

156. **Scholion 2.** Solutioni igitur summam extensionem tribuamus, et cum aequationes propositae sint[21]

$$v\,dd\varphi + 2\,dv\,d\varphi = -2gT\,dt^2\,, \qquad ddv - v\,d\varphi^2 = -\frac{2gL\,dt^2}{vv} - 2gU\,dt^2\,,$$

posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, statuamus $-2g\int Tv\,dt = \surd 2gp(L+X) = \frac{vv\,d\varphi}{dt}$, eritque

$$-\frac{2gTp\,dt}{1+q\cos s} = \frac{dp}{2\surd p}\surd 2g(L+X) + \frac{dX\,\surd 2gp}{2\surd(L+X)}\,,$$

hincque

$$dp = -\frac{2Tp\,dt\,\surd 2gp}{(1+q\cos s)\surd(L+X)} - \frac{p\,dX}{L+X}$$

et

$$d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\surd 2gp(L+X)}{pp}\,.$$

Porro statuatur $\frac{dv}{dt} = q\sin s\,\sqrt{\frac{2g(L+Y)}{p}}$, eritque primo

$$q\,dt\sin s\,\sqrt{\frac{2g(L+Y)}{p}} = -\frac{2Tp\,dt\,\surd 2gp}{(1+q\cos s)^2\surd(L+X)} - \frac{p\,dX}{(1+q\cos s)(L+X)} - \frac{p\,d\cdot q\cos s}{(1+q\cos s)^2}\,,$$

unde colligimus

$$d\cdot q\cos s = -\frac{q\,dt\sin s(1+q\cos s)^2\surd 2g(L+Y)}{p\surd p} - \frac{2T\,dt\,\surd 2gp}{\surd(L+X)} - \frac{(1+q\cos s)\,dX}{(L+X)}\,.$$

Deinde ex forma $\frac{dv}{dt}$ assumta deducimus

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{\surd 2g(L+Y)}{\surd p}\,d\cdot q\sin s - \frac{q\,dp\sin s\surd 2g(L+Y)}{2p\surd p} + \frac{q\,dY\sin s\surd 2g}{2\surd p(L+Y)}\,,$$

seu

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{\surd 2g(L+Y)}{\surd p}\,d\cdot q\sin s + \frac{2gTq\,dt\sin s\surd(L+Y)}{(1+q\cos s)\surd(L+X)} + \frac{q\,dX\sin s\surd 2g(L+Y)}{2(L+X)\surd p} + \frac{q\,dY\sin s\surd 2g}{2\surd p(L+Y)}\,.$$

21 Editio princeps: Usque ad finem paragraphes 158, V loco U.

At ex aequatione proposita est

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{2g\,dt\,(1+q\cos s)^3(L+X)}{pp} - \frac{2gL\,dt\,(1+q\cos s)^2}{pp} - 2gU\,dt\,,$$

seu

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{2gLq\,dt\cos s(1+q\cos s)^2}{pp} + \frac{2gX\,dt\,(1+q\cos s)^3}{pp} - 2gU\,dt\,,$$

qua expressione cum praecedente collata fit

$$\begin{aligned} d\cdot q\sin s = {} & \frac{2gLq\,dt\cos s(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} + \frac{2gX\,dt\,(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} - \frac{2gU\,dt\sqrt{p}}{\sqrt{2g(L+Y)}} \\ & - \frac{Tq\,dt\sin s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{q\,dX\sin s}{2(L+X)} - \frac{q\,dY\sin s}{2(L+Y)}\,. \end{aligned}$$

Hinc concludimus fore

$$\begin{aligned} dq = {} & \frac{2gX\,dt\sin s(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} - \frac{2gU\,dt\sin s\sqrt{p}}{\sqrt{2g(L+Y)}} - \frac{dX\cos s(1+q\cos s)}{L+X} \\ & - \frac{q\,dX\sin^2 s}{2(L+X)} - \frac{2gYq\,dt\sin s\cos s(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} - \frac{2T\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} \\ & - \frac{Tq\,dt\sin^2 s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{q\,dY\sin^2 s}{2(L+Y)}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\,ds = {} & \frac{2gLq\,dt\,(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} + \frac{2gYq\,dt\sin^2 s(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} + \frac{2T\,dt\sin s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} \\ & + \frac{dX\sin s(1+q\cos s)}{L+X} + \frac{2gX\,dt\cos s(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} - \frac{U\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+Y)}} \\ & - \frac{q\,dX\sin s\cos s}{2(L+X)} - \frac{Tq\,dt\sin s\cos s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{q\,dY\sin s\cos s}{2(L+Y)}\,. \end{aligned}$$

Si iam quantitates arbitrariae X et Y ita accipi possent, ut haec postrema expressio per q fieret divisibilis, incommodum supra memoratum tolleretur, id quod eveniret, si fieret

$$\frac{2gX\,dt\cos s}{p\sqrt{2gp(L+Y)}} + \frac{2T\,dt\sin s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{U\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+Y)}} + \frac{dX\sin s}{L+X} = 0\,,$$

vel formulae per q multiplicatae.

En ergo has determinationes, quae ob binas arbitrarias X et Y, maxime generales sunt habendae

1. $$d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g(L+X)}}{p\sqrt{p}} \quad \text{existente} \quad v = \frac{p}{1+q\cos s}\,,$$

$$2.\quad d\varphi - ds = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g}}{p\sqrt{p(L+Y)}}\Big(\sqrt{(L+X)(L+Y)} - L - Y\sin^2 s - \frac{1}{q}X\cos s(1+q\cos s)\Big) - \frac{2T\,dt\sin s\sqrt{2gp}}{q\sqrt{(L+X)}} + \frac{U\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{q\sqrt{(L+Y)}} + \frac{T\,dt\sin s\cos s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} + \frac{dX\sin s\cos s}{2(L+X)} + \frac{dY\sin s\cos s}{2(L+Y)} - \frac{dX\sin s(1+q\cos s)}{q(L+X)}\,,$$

$$3.\qquad dp = -\frac{2Tp\,dt\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{p\,dX}{L+X}\,,$$

$$4.\qquad dq = \frac{dt\sin s(1+q\cos s)^2\sqrt{2g}}{p\sqrt{p(L+Y)}}\Big(X(1+q\cos s) - Yq\cos s\Big) - \frac{2T\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{U\,dt\sin s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+Y)}} - \frac{Tq\,dt\sin^2 s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{q\,dX\sin^2 s}{2(L+X)} - \frac{q\,dY\sin^2 s}{2(L+Y)} - \frac{dX\cos s(1+q\cos s)}{L+X}\,.$$

Notandum autem est quantitates X et Y valde parvas capi debere, easque quatenus a p et q pendent, pro constantibus esse habendas; sin autem insuper angulum φ vel s involvant, in earum differentiatione loco $d\varphi$ vel ds scribi posse

$$\frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g(L+X)}}{p\sqrt{p}}\,.$$

Denique meminisse iuvabit esse $dv = q\,dt\sin s\sqrt{\frac{2g(L+Y)}{p}}$.

157. **Scholion. 3.** Ut pro litteris X et Y quovis casu commodissimi valores eligantur, id efficiendum videtur, ut quantitatum p et q variabilitas tam exigua reddatur quam fieri potest. Quodsi enim fieri queat, ut hae duae quantitates p et q evadant constantes, nullum est dubium, quin tum motus simplicissimo modo repraesentetur. Semper quidem has litteras X et Y ita definire liceret, ut fieret tam $dp = 0$ quam $dq = 0$, verum tum plerumque reliquae formulae nimis prodirent complicatae, quam ut hinc ullum commodum consequeremur; quare in hoc negotio ita versari conveniet, ut si non commode formulae pro dp et dq inventae ad nihilum redigi queant, eae saltem tam parvae efficiantur, quam fieri poterit, neque tamen ad hoc valores nimis perplexi pro X et Y adhibeantur: id enim imprimis cavendum est, ne hi valores unquam limites quantitatum prae L valde exiguarum superent. Quo igitur hoc iudicium ratione formulae dq facilius instituatur, plerumque conveniet eam ita transformari, ut quantitas v cum suo differentiali dv, ponendo

$$1+q\cos s = \frac{p}{v} \quad \text{et} \quad q\,dt\sin s = \frac{dv\sqrt{p}}{\sqrt{2g(L+Y)}}\,,$$

introducatur. Hoc modo obtinebimus

$$dq = \frac{p\,dv}{qvv(L+Y)}\left(\frac{pX}{v} - \frac{pY}{v} + Y\right) - \frac{2T\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{p\,dX\cos s}{v(L+X)}$$
$$- \frac{Up\,dv}{q(L+Y)} - \frac{Tv\,dv\sin s}{\sqrt{(L+X)(L+Y)}} - \frac{q\,dX\sin^2 s}{2(L+X)} - \frac{q\,dY\sin^2 s}{2(L+Y)}\,.$$

Cum autem sit

$$dp = -\frac{2Tv\,dt\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{p\,dX}{L+X}\,,$$

si hinc iam valorem idoneum pro X elegerimus, habebimus

$$dq = \frac{p\,dv}{qv^3(L+Y)}(pX - pY + vY) + \frac{dp\cos s}{v} - \frac{Up\,dv}{q(L+Y)}$$
$$- \frac{Tv\,dv\sin s}{\sqrt{(L+X)(L+Y)}} + \frac{q\,dp\sin^2 s}{2p}$$
$$+ \frac{Tqv\,dt\sin^2 s\sqrt{2gp}}{p\sqrt{(L+X)}} - \frac{q\,dY\sin^2 s}{2(L+Y)}\,,$$

ubi termini littera T affecti se mutuo destruunt. Multiplicemus per q, et ob $q\cos s = \frac{p}{v} - 1$ et $qq\sin^2 s = qq - \left(\frac{p}{v} - 1\right)^2$, habebimus

$$q\,dq = \frac{p\,dv}{v^3(L+Y)}(pX - pY + vY) + \frac{dp\,(p-v)}{vv} - \frac{Up\,dv}{L+Y}$$
$$+ \frac{qq\,dp}{2p} - \frac{dp\,(p-v)^2}{2pvv} - \frac{dY\,\left(qqvv - (p-v)^2\right)}{2vv(L+Y)}$$

quae reducitur ad hanc formam commodiorem[22]:

$$q\,dq = \frac{p\,dv\,(pX - pY + vY - Uv^3)}{v^3(L+Y)} - \frac{dp\,(1-qq)}{2p} - \frac{dY\,\left(qqvv - (p-v)^2\right)}{2vv(L+Y)}\,,$$

unde quovis casu haud difficulter maxime idoneus valor pro Y assumendus colligitur. Vel si ponamus $\frac{p}{1-qq} = r$, fiet

$$\frac{dr}{r} = \frac{2r\,dv\,(pX - pY + vY - Uv^3) + v\,dY\,(pr - 2rv + vv)}{v^3(L+Y)}\,,$$

quae formula, si ad nihilum redigi possit, commodissimam solutionem suppeditabit. Videamus ergo quantum fructum hinc colligere queamus pro casu praecedentis capitis, ubi corpus N circa alterum M in plano AJB movetur.

22 Recte:
$$q\,dq = \frac{p\,dv\,(pX - pY + vY - Uv^3)}{v^3(L+Y)} - \frac{dp\,(1-qq)}{2p} + \frac{p\,dp}{2v^2} - \frac{dY\,\left(qqvv - (p-v)^2\right)}{2vv(L+Y)}$$

158. **Problema.** Si corpus sphaericum N circa corpus M figura quacunque praeditum, quod omni motu gyratorio destitutum ponitur, ita moveatur, ut perpetuo in plano binorum axium principalium AJB maneat, eius motum definire.

Solutio. Maneant omnia ut in problemate § 128, ac tantum opus est, ut hic ponamus $z = 0$, unde fiet $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$. Quodsi iam illas formulas ad has, quibus hic utimur, accommodemus, habebimus $L = M + N$ et

$$P = \frac{3L\cos\varphi}{2v^4}\left(3aa + bb + cc - 5aa\cos^2\varphi - 5bb\sin^2\varphi\right) ,$$
$$Q = \frac{3L\sin\varphi}{2v^4}\left(aa + 3bb + cc - 5aa\cos^2\varphi - 5bb\sin^2\varphi\right) ,$$

unde deducimus

$$T = \frac{3L(bb-aa)\sin\varphi\cos\varphi}{v^4} = \frac{3L(bb-aa)\sin 2\varphi}{2v^4}$$
$$U = \frac{3L}{4v^4}\Big(2cc - aa - bb + 3(bb-aa)\cos 2\varphi\Big) .$$

Statuamus brevitatis gratia $bb - aa = n$ et $2cc - aa - bb = 2m$, eritque

$$T = \frac{3nL\sin 2\varphi}{2v^4} \quad \text{et} \quad U = \frac{3mL}{2v^4} + \frac{9nL\cos 2\varphi}{4v^4} .$$

Ponatur nunc $v = \dfrac{p}{1+q\cos s}$, et cum invenerimus

$$dp = -\frac{3nL\,dt\sin 2\varphi\sqrt{2gp}}{v^3\sqrt{(L+X)}} - \frac{p\,dX}{L+X} ,$$

notetur esse $d\varphi = \dfrac{dt\sqrt{2gp(L+X)}}{vv}$, unde fit

$$dp = -\frac{3nL\,d\varphi\sin 2\varphi}{v(L+X)} - \frac{p\,dX}{L+X} ,$$

ad quem valorem diminuendum ponamus

$$X = \frac{3nL}{2pv}(\alpha + \cos 2\varphi) + \beta , \quad \text{fietque} \quad dp = \frac{3nL(\alpha+\cos 2\varphi)}{2(L+X)}\left(\frac{dp}{pv} + \frac{dv}{vv}\right) ,$$

ubi dp est quam minimum, et dv involvit excentricitatem q tanquam factorem. Nunc pro expressione dq diminuenda habebimus

$$\begin{aligned}\frac{v^3\,dr}{r}(L+Y) = 2r\,dv&\left(\frac{3nL(\alpha+\cos 2\varphi)}{2v} + \beta p - pY + vY - \frac{3mL}{2v} - \frac{9nL\cos 2\varphi}{4v}\right)\\ &+ v\,dY\,(pr - 2rv + vv) ,\end{aligned}$$

ubi est $r = \dfrac{p}{1-qq}$. Statuamus $Y = \zeta + \dfrac{\eta}{v}$, fietque haec expressio

$$2r\,dv\left(\frac{3\alpha nL}{2v} - \frac{3nL\cos 2\varphi}{4v} + \beta p - \frac{3mL}{2v} - p\zeta - \frac{p\eta}{v} + v\zeta + \eta\right)$$
$$-\,\eta\,dv\left(\frac{pr}{v} - 2r + v\right) + (v\,d\zeta + d\eta)(pr - 2rv + vv)\ ,$$

ut iam termini $v\,dv$ destruantur, sit $\eta = 2r\zeta$; pro terminis autem dv prodit

$$2r\eta - 2pr\zeta + 2r\eta + 2\beta pr = 0 \quad \text{seu} \quad 2\eta - p\zeta + \beta p = 0\ ,$$

hincque $\beta = \zeta\left(1 - \dfrac{4r}{p}\right)$. Tum vero termini $\dfrac{dv}{v}$ tollentur sumendo

$$3\alpha nLr - \tfrac{3}{2}nLr\cos 2\varphi - 3mLr - 3pr\eta = 0\ ,$$

hincque

$$\zeta = \frac{\alpha nL}{2pr} - \frac{nL\cos 2\varphi}{4pr} - \frac{mL}{2pr}\ .$$

Verum ne variabilitas anguli φ in differentiatione novum momentum introducat, omittamus hic potius terminum $\cos 2\varphi$, ponamusque $\alpha = 0$, ut sit

$$X = \frac{3nL\cos 2\varphi}{2pv} + \frac{mL(4r-p)}{2ppr} \quad \text{et} \quad Y = -\frac{mL(2r+v)}{2prv}\ .$$

Vel eodem res redibit, si ponamus $\zeta = 0$, $\eta = 0$, $\beta = 0$, ut sit $Y = 0$ et $\alpha n = m$, ideoque

$$X = \frac{3L}{2pv}(m + n\cos 2\varphi)\ ,$$

eritque

$$\frac{v^3\,dr}{r}(L+Y) = -\frac{3nLr\,dv\cos 2\varphi}{2v}\ ,$$

seu

$$\frac{dr}{rr} = -\frac{3n\,dv\cos 2\varphi}{2v^4}\ .$$

Deinde vero pro motu lineae absidum habemus in genere

$$d\varphi - ds = \frac{dt\sqrt{2gp}}{vv\sqrt{(L+Y)}}\left(\sqrt{(L+X)(L+Y)} - L - Y\sin^2 s - \frac{pX\cos s}{qv}\right)$$
$$+\,\frac{dp\sin s}{qv} - \frac{dp\sin s\cos s}{2p} + \frac{U\,dt\cos s\sqrt{2gp}}{q\sqrt{(L+Y)}} + \frac{dY\sin s\cos s}{2(L+Y)}\ .$$

Cum nunc sit $Y = 0$ et $\sqrt{(L+X)(L+Y)} = L + \frac{1}{2}X$, erit

$$d\varphi - ds = \frac{3\,dt\,(m + n\cos 2\varphi)\sqrt{2gLp}}{4pv^3} + \frac{3n\,dt\cos s\cos 2\varphi\sqrt{2gLp}}{4qv^4}$$
$$+\,\frac{dp\sin s}{qv} - \frac{dp\sin s\cos s}{2p}$$

existente $d\varphi = \frac{dt\,\sqrt{2gLp}}{vv}\left(1+\frac{3(m+n\cos 2\varphi)}{4pv}\right)$, unde fit

$$ds = \frac{dt\,\sqrt{2gLp}}{vv} - \frac{3n\,dt\cos s\cos 2\varphi\sqrt{2gLp}}{4qv^4} - \frac{dp\sin s}{qv} + \frac{dp\sin s\cos s}{2p}\,.$$

Est vero[23] $dp = \frac{3L(m+n\cos 2\varphi)}{2(L+X)}\left(\frac{dp}{pv}+\frac{dv}{vv}\right)$ et $dv = \frac{q\,dt\sin s\sqrt{2gLp}}{p}$, ideoque

$$dp = \frac{3(m+n\cos 2\varphi)q\,dt\sin s\sqrt{2gLp}}{2pvv}\,.$$

Cum igitur sit proxime $\frac{dt\,\sqrt{2gLp}}{vv} = ds$, erit[24] $dp = \frac{3(m+n\cos 2\varphi)q\,ds\sin s}{2p}$ atque

$$\frac{dr}{rr} = -\frac{3nq\,ds\sin s\cos 2\varphi}{2pvv}$$

et[25]

$$\begin{aligned} d\varphi - ds = {} & \frac{3m\,ds}{4pp}\left(1+2\sin^2 s+q\cos s+q\sin^2 s\cos s\right) \\ & + \frac{3n\,ds\cos 2\varphi}{4pp}\left(1-2\cos 2s-\frac{\cos s}{q}+2q\sin^2 s\cos s\right)\,, \end{aligned}$$

in quibus formulis iam p et q ut constantes et $d\varphi = ds$ spectari possunt. Denique vero ope formulae $d\varphi = \ldots$ omnia ad tempus t revocari poterunt.

159. **Alia solutio eiusdem problematis.** Cum ista solutio formulis differentialibus nimium sit implicata, quoniam eae ex differentio-differentialibus sunt immediate deductae, aliam viam tentemus ad hunc casum accommodatam. Cum enim aequationes principales sint

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad v\,dd\varphi + 2\,dv\,d\varphi = -\frac{3ngL\,dt^2\sin 2\varphi}{v^4}\,, \\ &\text{II.} \quad ddv - v\,d\varphi^2 = -\frac{2gL\,dt^2}{vv} - \frac{3gLm\,dt^2}{v^4} - \frac{9gLn\,dt^2\cos 2\varphi}{2v^4}\,, \end{aligned}$$

prima per v multiplicata, prius membrum integrabile habebit, integrali existente $vv\,d\varphi$. Integrabile ergo quoque fiet, si multiplicetur per $2v^3\,d\varphi$, quo pacto in altero membro elementum dt e signo integrali tolletur; prodibit enim

$$v^4\,d\varphi^2 = 2gL\,dt^2\left(C - 3n\int\frac{d\varphi\sin 2\varphi}{v}\right)\,.$$

23 Editio princeps: $\left(\frac{dp}{pv}-\frac{dv}{vv}\right)$ loco $\left(\frac{dp}{pv}+\frac{dv}{vv}\right)$.
24 Editio princeps: dt loco ds.
25 Recte:
$$d\varphi - ds = \frac{3m\,ds}{4pp}\left(1+2\sin^2 s+q\cos s+q\sin^2 s\cos s\right) + \frac{3n\,ds\cos 2\varphi}{4pp}\left(3+2q\cos s+\frac{\cos s}{q}\right)$$

Sit brevitatis gratia $\int \frac{d\varphi \sin 2\varphi}{v} = S$, ut habeamus $v^4\, d\varphi^2 = 2gL\, dt^2\, (C - 3nS)$. Deinde prima per $2v\, d\varphi$ et altera per $2\, dv$ multiplicatae, in una summa efficiunt

$$\begin{aligned} &2vv\, d\varphi\, dd\varphi + 2v\, dv\, d\varphi^2 + 2\, dv\, ddv \\ &\quad = 2gL\, dt^2 \left(-\frac{2\, dv}{vv} - \frac{3m\, dv}{v^4} - \frac{3n\, d\varphi \sin 2\varphi}{v^3} - \frac{9n\, dv \cos 2\varphi}{2v^4} \right) , \end{aligned}$$

quae integrata dat

$$dv^2 + vv\, d\varphi^2 = 2gL\, dt^2 \left(D + \frac{2}{v} + \frac{m}{v^3} + \frac{3n \cos 2\varphi}{2v^3} \right) .$$

Cum ergo inde sit $2gL\, dt^2 = \frac{v^4\, d\varphi^2}{C - 3nS}$, hinc commode tempus t eliminatur, obtineturque

$$(C - 3nS) \left(dv^2 + vv\, d\varphi^2 \right) = v^4\, d\varphi^2 \left(D + \frac{2}{v} + \frac{2m + 3n \cos 2\varphi}{2v^3} \right)$$

et

$$d\varphi = \frac{dv\, \sqrt{(C - 3nS)}}{vv\, \sqrt{\left(D + \frac{2}{v} + \frac{2m + 3n \cos 2\varphi}{2v^3} - \frac{C - 3nS}{vv} \right)}} .$$

Iam quoties dv evanescit, necesse est, ut formula irrationalis denominatoris evanescat, quod cum duobus casibus evenire debeat, quibus angulus quidem s fit vel $0°$ vel $180°$, denominator factorem habebit $\sin s$. Statuamus ergo $v = \frac{p}{1 + q \cos s}$, et denominator erit

$$\begin{aligned} D &+ \frac{2}{p} + \frac{2m + 3n \cos 2\varphi}{2p^3} - \frac{C - 3nS}{pp} \\ &+ \frac{2q \cos s}{p} + \frac{3q \cos s (2m + 3n \cos 2\varphi)}{2p^3} - \frac{2q \cos s (C - 3nS)}{pp} \\ &+ \frac{3qq \cos^2 s (2m + 3n \cos 2\varphi)}{2p^3} - \frac{qq \cos^2 s (C - 3nS)}{pp} \\ &+ \frac{q^3 \cos^3 s (2m + 3n \cos 2\varphi)}{2p^3} . \end{aligned}$$

Fiat nunc[26]

$$D + \frac{2}{p} + \frac{2m + 3n \cos 2\varphi}{2p^3} - \frac{C - 3nS}{pp} + \frac{3qq(2m + 3n \cos 2\varphi)}{2p^3} - \frac{qq(C - 3nS)}{pp} = 0 ,$$

$$2 + \frac{3(2m + 3n \cos 2\varphi)}{2pp} - \frac{2(C - 3nS)}{p} + \frac{qq(2m + 3n \cos 2\varphi)}{2pp} = 0 ,$$

26 Editio princeps: $1 + \frac{3(2m+3n \cos 2\varphi)}{2pp} - \frac{2(C-3nS)}{p} + \frac{qq(2m+3n \cos 2\varphi)}{2pp} = 0$

eritque formula irrationalis in denominatore

$$\frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(C-3nS-\frac{3(2m+3n\cos 2\varphi)}{2p}-\frac{q\cos s(2m+3n\cos 2\varphi)}{2p}\right)}$$

et

$$\frac{dv}{vv}=\frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1-\frac{(3+q\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)}{2p(C-3nS)}\right)}\;.$$

Iam ex illis aequationibus quantitates p et q definiantur, quae si esset $m=0$ et $n=0$, prodirent: $p=C$ et $qq=1+CD$, atque hi erunt quasi valores medii ipsarum p et q, qui statuantur f et k, ut sit $C=f$ et $D=\frac{kk-1}{f}$. Deinde cum m et n sint quantitates valde parvae, in terminis per m et n affectis scribere licebit $p=f$ et $q=k$, sicque habebimus[27]

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}+\frac{(3+kk)(2m+3n\cos 2\varphi)}{4f^3}+\frac{3nS}{ff}$$

et

$$\frac{qq}{pp}=\frac{kk}{ff}+\frac{(1+3kk)(2m+3n\cos 2\varphi)}{2f^4}+\frac{3nS(1+kk)}{f^3}\;,$$

unde fit

$$p=f-\frac{(3+kk)(2m+3n\cos 2\varphi)}{4f}-3nS$$

et

$$qq=kk+\frac{(1-k^4)(2m+3n\cos 2\varphi)}{2ff}+\frac{3n(1-kk)S}{f}\;.$$

Quoniam nunc habemus valores litterarum p et q, ob $v=\frac{p}{1+q\cos s}$ erit

$$S=\int\frac{d\varphi\,(1+q\cos s)\sin 2\varphi}{p}$$

et

$$\frac{dv}{vv}=\frac{dp}{pp}-\frac{dq\cos s}{p}+\frac{q\,ds\sin s}{p}+\frac{q\,dp\cos s}{pp}\;,$$

seu

$$\frac{dv}{vv}=\frac{dp}{pp}-\frac{(p\,dq-q\,dp)\cos s}{pp}+\frac{q\,ds\sin s}{p}\;.$$

At est superioribus formulis differentiandis

$$\frac{dp}{pp}=\frac{3n(3+kk)\,d\varphi\sin 2\varphi}{2f^3}-\frac{3n(1+q\cos s)\,d\varphi\sin 2\varphi}{ffp}\;,$$

27 Editio princeps: $2f^3$ loco $4f^3$.

seu[28]

$$\left[\frac{dp}{pp}\right] = \frac{3n(1-2k\cos s+kk)\,d\varphi\sin 2\varphi}{2f^3}$$

et[29]

$$\frac{2q(p\,dq-q\,dp)}{p^3} = -\frac{3n(1+3kk)\,d\varphi\sin 2\varphi}{f^4} + \frac{3n(1+kk)\,d\varphi\,(1+k\cos s)\sin 2\varphi}{f^4}\,,$$

$$\frac{p\,dq-q\,dp}{pp} = \frac{3n\,d\varphi\sin 2\varphi((1+kk)\cos s-2k)}{2f^3}\,,$$

ex quibus colligitur

$$\frac{dv}{vv} = \frac{3n(1+kk)\,d\varphi\sin^2 s\sin 2\varphi}{2f^3} + \frac{q\,ds\sin s}{p}\,.$$

At est

$$\begin{aligned}\frac{dv}{vv} &= \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1-\frac{(3+k\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)}{2ff}\right)}\\ &= \frac{q\,d\varphi\sin s}{p} - \frac{k(3+k\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)\,d\varphi\sin s}{4f^3}\,.\end{aligned}$$

Ergo

$$d\varphi - ds = \frac{p\,d\varphi}{4f^3q}\Big(6n(1+kk)\sin s\sin 2\varphi + k(3+k\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)\Big)\,.$$

Hic iam spectatis p et q ut constantibus, nempe $p=f$ et $q=k$, erit

$$\begin{aligned}d\varphi - ds = \frac{d\varphi}{4ffk}\Big(&6mk + 2mkk\cos s + 9nk\cos 2\varphi\\ &+ 3n\left(1+\tfrac{3}{2}kk\right)\cos(2\varphi-s) - 3n\left(1+\tfrac{1}{2}kk\right)\cos(2\varphi+s)\Big)\,.\end{aligned}$$

Cum igitur proxime sit $d\varphi = ds$, erit integrando

$$\begin{aligned}\varphi - s = \text{Const.} &+ \frac{3m\varphi}{2ff} + \frac{mk\sin s}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff}\\ &+ \frac{3n(2+3kk)\sin(2\varphi-s)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\sin(2\varphi+s)}{8ffk}\,,\end{aligned}$$

qua aequatione relatio inter longitudinem φ et anomaliam veram s exprimitur. Tum vero quia S per quantitatem minimam n multiplicatur, sufficiet posuisse

$$dS = \frac{d\varphi}{f}\left(\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}k\sin(2\varphi-s) + \tfrac{1}{2}k\sin(2\varphi+s)\right)\,,$$

28 Editio princeps: $\sin\varphi$ loco $\sin 2\varphi$.
29 Editio princeps: $(1+kk\cos s-2k)$ loco $((1+kk)\cos s-2k)$.

unde fit

$$S = -\frac{\cos 2\varphi}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi - s)}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi + s)}{6f}\,,$$

hincque deducimus

$$\begin{aligned} p = {} & f - \frac{m(3+kk)}{2f} - \frac{3n(1+kk)\cos 2\varphi}{4f} \\ & + \frac{3nk\cos(2\varphi - s)}{2f} + \frac{3nk\cos(2\varphi + s)}{6f}\,, \\ qq = kk & + \frac{m(1-k^4)}{ff} + \frac{3nkk(1-kk)\cos 2\varphi}{2ff} \\ & - \frac{3nk(1-kk)\cos(2\varphi - s)}{2ff} - \frac{3nk(1-kk)\cos(2\varphi + s)}{6ff}\,. \end{aligned}$$

Denique ut omnia ad tempus t reducamus, habemus

$$dt\sqrt{2gL} = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2\sqrt{(f-3nS)}} = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{f}} + \frac{3nS}{2f\sqrt{f}}\right)\,,$$

cuius integratio per praecedentes formulas in potestate est censenda. Cum enim sit

$$\begin{aligned} d\varphi = ds\Bigg(1 + \frac{3m}{2ff} + \frac{mk\cos s}{2ff} + \frac{9n\cos 2\varphi}{4ff} & + \frac{3n(2+3kk)\cos(2\varphi - s)}{8ffk} \\ & - \frac{3n(2+kk)\cos(2\varphi + s)}{8ffk}\Bigg)\,, \end{aligned}$$

$$pp = ff - m(3+kk) - \tfrac{3}{2}n(1+kk)\cos 2\varphi + 3nk\cos(2\varphi - s) + nk\cos(2\varphi + s)\,,$$

$$1 + \frac{3nS}{2f} = 1 - \frac{3n\cos 2\varphi}{4ff} - \frac{3nk\cos(2\varphi - s)}{4ff} - \frac{nk\cos(2\varphi + s)}{4ff}\,,$$

erit

$$\begin{aligned} pp\,d\varphi\left(1 + \frac{3nS}{2f}\right) = ff\,ds\Bigg(1 & - \frac{m(3+2kk)}{2ff} + \frac{mk\cos s}{2ff} - \frac{3nkk\cos 2\varphi}{2ff} \\ & + \frac{3n(2+9kk)\cos(2\varphi - s)}{8ffk} - \frac{3n(2-kk)\cos(2\varphi + s)}{8ffk}\Bigg)\,. \end{aligned}$$

Porro est

$$\begin{aligned} q = k & + \frac{m(1-k^4)}{2ffk} + \frac{3nk(1-kk)\cos 2\varphi}{4ff} \\ & - \frac{3n(1-kk)\cos(2\varphi - s)}{4ff} - \frac{n(1-kk)\cos(2\varphi + s)}{4ff}\,, \end{aligned}$$

unde tandem concluditur $dt\sqrt{2fgL} = \dfrac{ff\,ds}{(1+k\cos s)^2} + \dfrac{ffW\,ds}{(1+k\cos s)^3}$ existente

$$\begin{aligned} W = &-\frac{3m(2+kk)}{4ff} - \frac{m(1+kk)\cos s}{ffk} + \frac{mkk\cos 2s}{4ff} + \frac{n(8-5kk)\cos 2\varphi}{8ff} \\ &+ \frac{3n(2+7kk)\cos(2\varphi-s)}{8ffk} + \frac{3n(6+5kk)\cos(2\varphi-2s)}{16ff} \\ &- \frac{3n(2+kk)\cos(2\varphi+s)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\cos(2\varphi+2s)}{16ff}\,. \end{aligned}$$

160. **Corollarium 1.** Formula $\varphi - s$ exprimit longitudinem absidis imae, unde si corpus N nunc fuerit in abside ima, ad absidem summam pertinget confecto angulo φ, ut ob $s = 180° = \pi$ sit

$$\varphi - \pi = \frac{3m\pi}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} + \frac{3n(2+3kk)\sin(2\varphi-\pi)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\sin(2\varphi+\pi)}{8ffk}\,,$$

seu

$$\varphi - \pi = \frac{3m\pi}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} - \frac{n(1+2kk)\sin 2\varphi}{2ffk}\,,$$

ubi, ob $2\varphi = 2\pi$ proxime et neglectis terminis binas dimensiones litterarum m et n involventibus, erit $\varphi = \pi + \dfrac{3m\pi}{2ff}$.

161. **Corollarium 2.** At dum absolvitur anomalia vera $s = 2\lambda\pi$, existente λ numero integro valde magno, ob $\varphi = 2\lambda\pi + \dfrac{3\lambda m\pi}{ff}$, proxime erit

$$\varphi = 2\lambda\pi + \frac{3\lambda m\pi}{ff} + \frac{9n}{8ff}\sin\frac{6\lambda m\pi}{ff} + \frac{n(1+2kk)}{2ffk}\sin\frac{6\lambda m\pi}{ff}\,;$$

unde si sit $\dfrac{6\lambda m}{ff} = \dfrac{1}{2}$, seu $\lambda = \dfrac{ff}{12m}$, post $\dfrac{ff}{2m}$ revolutiones anomaliae verae, erit[30]

$$\varphi = 2\lambda\pi + \frac{1}{4}\pi + \frac{9n}{8ff} + \frac{n(1+2kk)}{2ffk}\,.$$

162. **Corollarium 3.** Si esset $n = 0$, promotio lineae absidum in singulis revolutionibus anomaliae verae s foret eadem, scilicet $= \dfrac{3m\pi}{ff} = \dfrac{3(cc-aa)}{ff}\pi$, uti iam supra invenimus. Sed si n non est $= 0$, singulis revolutionibus anomaliae verae non amplius aequalis progressio lineae absidum respondet, quod tamen discrimen demum post plures revolutiones fit sensibile.

163. **Corollarium 4.** Relatio inter angulos φ et s ita definitur, ut sit

$$\begin{aligned} \varphi = \zeta + s + \frac{3ms}{2ff} + \frac{mk\sin s}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} \\ + \frac{3n(2+3kk)\sin(2\varphi-s)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\sin(2\varphi+s)}{8ffk}\,, \end{aligned}$$

30 Editio princeps: $4ff$ loco $8ff$.

ubi in posterioribus terminis pro φ scribi potest $\zeta + s + \frac{3ms}{2ff}$, neque vero hic terminum $\frac{3ms}{2ff}$ omittere licet, cum is crescente cum tempore angulo s ad valorem quantumvis magnum assurgere possit. Constans autem ζ non est arbitraria, sed denotat longitudinem absidis imae ab axe principali JA.

164. **Scholion 1.** Pro quavis ergo anomalia vera s et angulo constante ζ definiri potest longitudo corporis N seu angulus $AJN = \varphi$, qua cognita porro semiparameter p et excentricitas q orbitae ellipticae variabilis innotescit, unde concluditur distantia $JN = v = \frac{p}{1+q\cos s}$. Superest autem, ut relatio inter tempus t et angulum s assignetur, seu ut haec aequatio

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{ff\,ds}{(1+k\cos s)^2} + \frac{ffW\,ds}{(1+k\cos s)^3}$$

integretur, quod negotium, quia φ per s datur, concedendum est. Est enim

$$\begin{aligned}
\int\frac{ds}{1+k\cos s} &= \frac{1}{\sqrt{(1-kk)}}\ \arccos\frac{k+\cos s}{1+k\cos s}\,,\\
\int\frac{ds}{(1+k\cos s)^2} &= \frac{1}{(1-kk)^{\frac{3}{2}}}\ \arccos\frac{k+\cos s}{1+k\cos s} - \frac{k\sin s}{(1-kk)(1+k\cos s)}\,,\\
\int\frac{ds}{(1+k\cos s)^3} &= \frac{2+kk}{2(1-kk)^{\frac{5}{2}}}\ \arccos\frac{k+\cos s}{1+k\cos s} - \frac{k\sin s}{2(1-kk)(1+k\cos s)^2}\\
&\quad - \frac{3k\sin s}{2(1-kk)^2(1+k\cos s)}\,.
\end{aligned}$$

Reliquae partes exigunt integrationem huiusmodi formulae $\int\frac{ds\cos(\alpha s+\beta)}{(1+k\cos s)^3}$, quae si k fuerit fractio valde parva, facile per seriem evolvitur; posito enim

$$\frac{1}{(1+k\cos s)^3} = A + B\cos s + C\cos 2s + D\cos 3s + E\cos 4s + \text{etc.}$$

reperitur integrale $\int\frac{ds\cos(\alpha s+\beta)}{(1+k\cos s)^3}$ ita expressum

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{\alpha}\sin(\alpha s+\beta) + \frac{B\sin(\alpha s - s+\beta)}{2(\alpha-1)} + \frac{C\sin(\alpha s-2s+\beta)}{2(\alpha-2)} + \text{etc.}\\
&\qquad + \frac{B\sin(\alpha s+s+\beta)}{2(\alpha+1)} + \frac{C\sin(\alpha s+2s+\beta)}{2(\alpha+2)} + \text{etc.}\,,
\end{aligned}$$

verum nisi k sit fractio valde parva, haec series parum iuvat.

165. **Scholion 2.** At si k est quantitas valde exigua, aliud incommodum nascitur, quod in nostris formulis termini per k divisi nimis fiant magni, ideoque

determinatio anguli $\varphi - s$ nimis incerta reddatur. Operae ergo pretium erit casum, quo $k = 0$, data opera evolvisse, quo fit

$$p = f - \frac{3(2m + 3n\cos 2\varphi)}{4f} - 3nS \quad \text{et} \quad qq = \frac{2m + 3n\cos 2\varphi}{2ff} + \frac{3nS}{f}\,,$$

quae formula autem locum habere nequit, nisi sit positiva; si enim fieret negativa, hoc indicio esset quantitatem k evanescere non posse, vel tum etiam $\cos s$ imaginarium esse proditurum, ita ut hoc casu positio $v = \frac{p}{1 + k\cos s}$ contradictionem involveret. Casu autem, quo qq prodit positivum, reperitur

$$d\varphi = ds + \frac{3n\,d\varphi \sin s \sin 2\varphi}{f\sqrt{(4m + 6n\cos 2\varphi + 12fnS)}}\,,$$

existente

$$S = \int \frac{d\varphi \sin 2\varphi}{f} = -\frac{\cos 2\varphi}{2f}\,,$$

ita ut sit

$$d\varphi = ds + \frac{3n\,d\varphi \sin s \sin 2\varphi}{2f\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad qq = \frac{m}{ff} \quad \text{et} \quad p = f - \frac{3m}{2f} - \frac{3n\cos 2\varphi}{4f}\,,$$

ideoque $q = \frac{\sqrt{m}}{f}$, sicque excentricitas q constans. Tum erit

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{d\varphi\left(ff - 3m - \frac{9}{4}n\cos 2\varphi\right)}{\left(1 + \frac{\sqrt{m}}{f}\cos s\right)^2}\,,$$

seu

$$= d\varphi\,\left(ff - 2f\cos s\sqrt{m} - 3m - \tfrac{9}{4}n\cos 2\varphi\right)\,.$$

Solutio ergo huius casus pendet a resolutione huius aequationis

$$d\varphi = ds + \frac{3n\,d\varphi \sin s \sin 2\varphi}{2f\sqrt{m}}\,,$$

ex qua, si $\frac{n}{\sqrt{m}}$ est quantitas valde parva, concluditur

$$\varphi = \zeta + s + \frac{3n\sin(2\varphi - s)}{4f\sqrt{m}} - \frac{n\sin(2\varphi + s)}{4f\sqrt{m}}\,.$$

Reliquis autem casibus, praecipue si m esset $= 0$, alia tractatio requireretur, in valorem scilicet ipsius S accuratius inquiri oporteret, quod difficultatibus haud esset cariturum.

166. **Scholion 3.** Solutio nostri problematis posterior ideo priori est anteferenda, quod binarum aequationum differentio-differentialium propositarum una integratio successerit. In genere igitur, si idem usu veniat, solutio facilior obtineri

potest. Propositis enim his duabus aequationibus[31]

$$v\,dd\varphi + 2\,dv\,d\varphi = -gLT\,dt^2 \quad \text{et} \quad ddv - v\,d\varphi^2 = -gL\,dt^2\left(\frac{2}{vv} + U\right) ,$$

multiplicetur prior per $2v^3\,d\varphi$, ut prodeat

$$v^4\,d\varphi^2 = 2gL\,dt^2\left(C - \int Tv^3\,d\varphi\right) = 2gL\,dt^2(C - S) ,$$

posito $\int Tv^3\,d\varphi = S$. Deinde priori per $2v\,d\varphi$, et posteriori per $2\,dv$ multiplicata, summa praebet

$$d\cdot\left(vv\,d\varphi^2 + dv^2\right) = -2gL\,dt^2\left(Tv\,d\varphi + U\,dv + \frac{2\,dv}{vv}\right) .$$

Quodsi iam fuerit $Tv\,d\varphi + U\,dv$ integrabile, ponatur integrale

$$\int(Tv\,d\varphi + U\,dv) = \frac{R}{v^3} ,$$

ut habeamus

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2gL\,dt^2\left(D + \frac{2}{v} - \frac{R}{v^3}\right) ,$$

hinc eliminando dt^2 adipiscemur

$$(C - S)\,dv^2 = v^4\,d\varphi^2\left(D + \frac{2}{v} - \frac{R}{v^3} - \frac{(C-S)}{vv}\right)$$

et

$$\frac{dv}{vv}\surd(C - S) = d\varphi\,\sqrt{\left(D + \frac{2}{v} - \frac{(C-S)}{vv} - \frac{R}{v^3}\right)} .$$

Statuamus $v = \dfrac{p}{1 + q\cos s}$, sitque[32]

$$D + \frac{2}{p} - \frac{R(1+3qq)}{p^3} - \frac{(1+qq)(C-S)}{pp} = 0 \quad \text{et} \quad 2 - \frac{R(3+qq)}{pp} - \frac{2(C-S)}{p} = 0 ,$$

ut fiat formula irrationalis

$$\sqrt{\left(D + \frac{2}{v} - \frac{(C-S)}{vv} - \frac{R}{v^3}\right)} = \frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(C - S + \frac{R(3 + q\cos s)}{p}\right)} ,$$

hincque

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1 + \frac{R(3+q\cos s)}{p(C-S)}\right)} .$$

31 Editio princeps: Usque ad finem paragraphes 167, V loco U.

32 Recte:
$$D + \frac{2}{p} - \frac{R(1+\frac{3}{2}qq)}{p^3} - \frac{(1+\frac{1}{2}qq)(C-S)}{pp} = 0 \quad \text{et} \quad 2 - \frac{R(3+\frac{3}{4}qq)}{pp} - \frac{2(C-S)}{p} = 0$$

Inde autem cum R et S sint quantitates valde parvae, posito $C = f$ et $D = \frac{kk-1}{f}$, ut fiat proxime $p = f$ et $q = k$, colligitur

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{S}{ff} - \frac{(3+kk)R}{2f^3} \quad \text{et} \quad p = f - S + \frac{(3+kk)R}{2f},$$

$$\frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} + \frac{(1+kk)S}{f^3} - \frac{(1+3kk)R}{f^4},$$

unde fit

$$qq = kk + \frac{(1-kk)S}{f} - \frac{(1-k^4)R}{ff}.$$

Deinde ob

$$\frac{dp}{pp} = -\frac{dS}{ff} + \frac{(3+kk)\,dR}{2f^3} \quad \text{et} \quad \frac{p\,dq - q\,dp}{pp} = \frac{(1+kk)\,dS}{2ffk} - \frac{(1+3kk)\,dR}{2f^3k},$$

erit[33]

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds\sin s}{p} - \frac{dS}{ff} - \frac{(1+kk)\,dS\cos s}{2ffk} + \frac{(3+kk)\,dR}{2f^3} + \frac{(1+3kk)\,dR\cos s}{2f^3k}.$$

Est vero etiam $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\left(1 + \frac{(3+k\cos s)R}{2ff}\right)$, unde

$$\frac{q\sin s}{p}(d\varphi - ds) = -\frac{dS}{ff} - \frac{(1+kk)\,dS\cos s}{2ffk} + \frac{(3+kk)\,dR}{2f^3}$$
$$+ \frac{(1+3kk)\,dR\cos s}{2f^3k} - \frac{k(3+k\cos s)R\sin s}{2f^3}\,d\varphi.$$

Denique est[34]

$$dt\sqrt{2fgL} = vv\,d\varphi\left(1 + \frac{S}{2f}\right) = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2}\left(1 + \frac{S}{2f}\right),$$

ubi notandum est esse ob $dv = \frac{kvv\,d\varphi\sin s}{f}$ in terminis minimis

$$dS = Tv^3\,d\varphi \quad \text{et} \quad dR = \frac{3kRv\,d\varphi\sin s}{f} + Tv^4\,d\varphi + \frac{kUv^5\,d\varphi\sin s}{f},$$

unde fit[35]

$$\frac{q}{p}(d\varphi - ds) = \frac{(1+kk)Tv^4\sin s}{2f^3}\,d\varphi$$
$$+ \frac{Rv\,d\varphi}{2f^4}\left(6k + (3+5kk)\cos s + 9k^3 - k^3\cos^2 s\right)$$
$$+ \frac{Uv^5\,d\varphi}{2f^4}\left(k(3+kk) + (1+3kk)\cos s\right).$$

33 Editio princeps: dS loco ds; $dS\cos S$ loco $dS\cos s$.
34 Editio princeps: $\frac{S}{f}$ loco $\frac{S}{2f}$.
35 Editio princeps: $3k^3$ loco $9k^3$; v^4 loco v^5.

167. **Scholion 4.** Aliam formam habitura esset solutio, si formula integralis $\int(Tv\,d\varphi + U\,dv)$ non $\frac{R}{v^3}$, sed $\frac{R}{v^\lambda}$, vel aggregato ex pluribus huiusmodi formulis aequalis poneretur. Ponamus ergo

$$\int(Tv\,d\varphi + U\,dv) = -\mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{B}}{v} - \frac{\mathfrak{C}}{vv} - \frac{D}{v^3} - \frac{E}{v^4} - \frac{F}{v^5} - \text{etc.}\,,$$

existente

$$\int Tv^3\,d\varphi = S \quad \text{et} \quad dt\sqrt{2fgL} = vv\,d\varphi\left(1 + \frac{S}{2f}\right)\,,$$

habebimus ergo[36]

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{(f-S)} = d\varphi\,\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f} + \mathfrak{A} + \frac{2+\mathfrak{B}}{v} - \frac{f-S-\mathfrak{C}}{vv} + \frac{D}{v^3} + \frac{E}{v^4} + \frac{F}{v^5} + \text{etc.}\right)}\,,$$

ubi quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, D, E, F et S ut valde parvae sunt spectandae. Ponamus brevitatis gratia

$$\frac{kk-1}{f} + \mathfrak{A} = A\,, \quad 2 + \mathfrak{B} = B \quad \text{et} \quad -f + S + \mathfrak{C} = C\,,$$

ut formula irrationalis sit

$$\sqrt{\left(A + \frac{B}{v} + \frac{C}{vv} + \frac{D}{v^3} + \frac{E}{v^4} + \frac{F}{v^5}\right)}\,,$$

quae posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$ ita comparata esse debet, ut factorem obtineat $\sin s$, seu ut evanescat posito tam $s = 0°$ quam $s = 180°$. Quocirca efficiendum est, ut fiat

$$A + B\left(\frac{1\pm q}{p}\right) + C\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^2 + D\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^3 + \text{etc.} = 0\,,$$

fiant ergo necesse est $\frac{1+q}{p}$ et $\frac{1-q}{p}$ binae radices huius aequationis

$$A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.} = 0\,,$$

quae reiectis terminis minimis habebit hanc formam $\frac{kk-1}{f} + 2z - fzz = 0$, unde fit $z = \frac{1\pm k}{f}$, ita ut sit proxime $p = f$ et $q = k$. Ponatur iam in terminis minimis $p = f$ et $q = k$, et habebimus

$$\frac{kk-1}{f} + \mathfrak{A} + \frac{2(1\pm q)}{p} + \frac{\mathfrak{B}(1\pm k)}{f} - \frac{f(1\pm q)^2}{pp} + \frac{(S+\mathfrak{C})(1\pm k)^2}{ff} + \frac{D(1\pm k)^3}{f^3} + \frac{E(1\pm k)^4}{f^4} + \frac{F(1\pm k)^5}{f^5} = 0\,,$$

36 Editio princeps: $2 - \mathfrak{B}$ loco $2 + \mathfrak{B}$.

quae ob signa ambigua resolvitur in has duas:

$$\frac{kk-1}{f}+\mathfrak{A}+\frac{2}{p}+\frac{\mathfrak{B}}{f}-\frac{f(1+qq)}{pp}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1+kk)}{ff}$$
$$+\frac{D(1+3kk)}{f^3}+\frac{E(1+6kk+k^4)}{f^4}+\frac{F(1+10kk+5k^4)}{f^5}=0\,,$$
$$\frac{2q}{p}+\frac{\mathfrak{B}k}{f}-\frac{2fq}{pp}+\frac{2(S+\mathfrak{C})k}{ff}$$
$$+\frac{D(3k+k^3)}{f^3}+\frac{E(4k+4k^3)}{f^4}+\frac{F(5k+10k^3+k^5)}{f^5}=0\,.$$

Ponamus iam $\frac{1}{p}=\frac{1+x}{f}$, et prior aequatio abit in hanc:

$$\frac{kk}{f}+\mathfrak{A}+\frac{\mathfrak{B}}{f}-\frac{fqq}{pp}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1+kk)}{ff}+\frac{D(1+3kk)}{f^3}+\text{etc.}=0\,,$$

unde deducimus

$$\frac{qq}{pp}=\frac{kk}{ff}+\frac{\mathfrak{A}}{f}+\frac{\mathfrak{B}}{ff}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1+kk)}{f^3}+\frac{D(1+3kk)}{f^4}$$
$$+\frac{E(1+6kk+k^4)}{f^5}+\frac{F(1+10kk+5k^4)}{f^6}+\text{etc.}\,;$$

altera autem per q multiplicata, qui factor in terminis minimis abit in k, praebet

$$\frac{2x}{f}=\frac{\mathfrak{B}}{f}+\frac{2(\mathfrak{C}+S)}{ff}+\frac{D(3+kk)}{f^3}+\frac{E(4+4kk)}{f^4}+\frac{F(5+10kk+k^4)}{f^5}\,,$$

unde deducimus[37]

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}+\frac{\mathfrak{B}}{2f}+\frac{\mathfrak{C}+S}{ff}+\frac{D(3+kk)}{2f^3}+\frac{E(4+4kk)}{2f^4}+\frac{F(5+10kk+k^4)}{2f^5}+\text{etc.}\,,$$
$$p=f\left(1-\frac{\mathfrak{B}}{2}-\frac{\mathfrak{C}+S}{f}-\frac{D(3+kk)}{2ff}-\frac{E(4+4kk)}{2f^3}-\frac{F(5+10kk+k^4)}{2f^4}-\text{etc.}\right),$$
$$qq=kk+\mathfrak{A}f+\mathfrak{B}(1-kk)+\frac{(\mathfrak{C}+S)(1-kk)}{f}$$
$$+\frac{D(1-k^4)}{ff}+\frac{E(1+2kk-3k^4)}{f^3}+\frac{F(1+5kk-5k^4-k^6)}{f^4}\,.$$

Tum autem formula irrationalis induit hanc formam

$$\frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(f-S-\mathfrak{C}-\frac{D(3+k\cos s)}{f}-\frac{E\,(6+4k\cos s+kk(1+\cos^2 s))}{ff}\right.}$$
$$\left.-\frac{F\,(10+10k\cos s+5kk(1+\cos^2 s)+k^3\cos s(1+\cos^2 s))}{f^3}\right)\,,$$

37 Editio princeps: $\frac{\mathfrak{C}-S}{f}$ loco $\frac{\mathfrak{C}+S}{f}$.

unde concludimus

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p} - \frac{k\,d\varphi\sin s}{2ff}\left(\mathfrak{C} + \frac{D(3+k\cos s)}{f} + \frac{E\,(6+4k\cos s+kk(1+\cos^2 s))}{ff} + \text{etc.}\right).$$

Est vero etiam $\dfrac{dv}{vv} = \dfrac{q\,ds\sin s}{p} + \dfrac{dp}{pp} - \dfrac{p\,dq - q\,dp}{pp}\cos s$, unde

$$\begin{aligned}\frac{q\sin s}{p}(d\varphi - ds) = \frac{k\,d\varphi\sin s}{2ff}\Bigg(\mathfrak{C} &+ \frac{D(3+k\cos s)}{f} \\ &+ \frac{E\,(6+4k\cos s+kk(1+\cos^2 s))}{ff} \\ &+ \frac{F\,(10+10k\cos s+kk(5+k\cos s)(1+\cos^2 s))}{f^3}\Bigg) \\ + \frac{dp}{pp} - \frac{(p\,dq - q\,dp)\cos s}{pp}&,\end{aligned}$$

ubi quidem haec differentialia ipsarum dp et dq non tam commode exprimere licet quam ante. Quoties autem unico termino constat integrale $\int(Tv\,d\varphi + U\,dv)$, toties posterius membrum reduci potest ad formam per $k\sin s$ multiplicatam. Est autem in genere

$$\begin{aligned}\frac{dp}{pp} - \frac{(pdq-qdp)\cos s}{pp} = &-\frac{Tv^3 d\varphi}{2ffk}(2k+(1+kk)\cos s) \\ &-\frac{d\mathfrak{A}\cos s}{2k} - \frac{d\mathfrak{B}(k+\cos s)}{2fk} - \frac{d\mathfrak{C}(2k+(1+kk)\cos s)}{2ffk} \\ &-\frac{dD\,(3k+k^3+(1+3kk)\cos s)}{2f^3k} \\ &-\frac{dE\,(4k+4k^3+(1+6kk+k^4)\cos s)}{2f^4k} \\ &-\frac{dF\,(5k+10k^3+k^5+(1+10kk+5k^4)\cos s)}{2f^5k} - \text{etc.},\end{aligned}$$

quae expressio transmutatur in hanc formam:

$$\begin{aligned}&-\frac{(2k+(1+kk)\cos s)\,vv}{2ffk}\left(Tv\,d\varphi + d\mathfrak{A} + \frac{d\mathfrak{B}}{v} + \frac{d\mathfrak{C}}{vv} + \frac{dD}{v^3} + \frac{dE}{v^4} + \frac{dF}{v^5} + \text{etc.}\right) \\ &+\frac{vv\sin^2 s}{2ff}\left(\begin{aligned} d\mathfrak{A}\left(1+\frac{f}{v}\right) + \frac{d\mathfrak{B}}{v} - \frac{dD}{fvv}(1+kk) - \frac{dE}{ffvv}\left(1+3kk+\frac{(1+kk)f}{v}\right) \\ -\frac{dF}{f^3vv}\left(1+6kk+k^4+\frac{(1+3kk)f}{v}+\frac{(1+kk)ff}{vv}\right)\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

At ex aequatione assumta est

$$d\mathfrak{A}+\frac{d\mathfrak{B}}{v}+\frac{d\mathfrak{C}}{vv}+\frac{dD}{v^3}+\text{etc.}=-Tv\,d\varphi-U\,dv+\frac{\mathfrak{B}\,dv}{vv}+\frac{2\mathfrak{C}\,dv}{v^3}+\text{etc.}\ ,$$

ita ut prius membrum superioris aequationis abeat in

$$+\frac{(2k+(1+kk)\cos s)}{2ffk}vv\,dv\left(U-\frac{\mathfrak{B}}{vv}-\frac{2\mathfrak{C}}{v^3}-\frac{3D}{v^4}-\frac{4E}{v^5}-\frac{5F}{v^6}-\text{etc.}\right)\ .$$

Quare cum in terminis his minimis sit $dv=\frac{k\,d\varphi\sin s}{f}vv$, evidens est totam aequationem praecedentem dividi posse per $\sin s$; reperitur enim

$$\begin{aligned}d\varphi-ds=\frac{d\varphi}{2f}\Bigg(&\mathfrak{C}+\frac{D(3+k\cos s)}{f}+\frac{E\,(6+kk+4k\cos s+kk\cos^2 s)}{ff}\\&+\frac{F\,(10+5kk+k(10+kk)\cos s+5kk\cos^2 s+k^3\cos^3 s))}{f^3}\Bigg)\\&+\frac{(2k+(1+kk)\cos s)}{2ffk}v^4\,d\varphi\left(U-\frac{\mathfrak{B}}{vv}-\frac{2\mathfrak{C}}{v^3}-\frac{3D}{v^4}-\frac{4E}{v^5}-\frac{5F}{v^6}-\text{etc.}\right)\\&+\frac{vv\sin s}{2fk}\Bigg(d\mathfrak{A}+\frac{f}{v}\left(d\mathfrak{A}+\frac{d\mathfrak{B}}{f}\right)-\frac{(1+kk)}{fvv}\left(dD+\frac{dE}{v}+\frac{dF}{vv}+\text{etc.}\right)\\&\qquad-\frac{(1+3kk)}{ffvv}\left(dE+\frac{dF}{v}+\text{etc.}\right)-\frac{(1+6kk+k^4)}{f^3vv}(dF+\text{etc.})\Bigg)\end{aligned}$$

atque haec est methodus generalis huiusmodi problemata tractandi, quoties formula $Tv\,d\varphi+U\,dv$ est integrabilis. Deinde etiam pro formula $\int Tv^3\,d\varphi$, quam posuimus $=S$, sive sit integrabilis sive minus, poni poterit $\frac{S}{v^\lambda}$, pro numero dimensionum, quas v in ea obtinet, unde solutio saepe commodior reddi potest, ad quod haec solutio pariter extenditur.

168. **Tertia solutio problematis propositi.** Instituantur omnia ut in solutione secunda § 159, sed ponatur

$$\int\frac{d\varphi\sin 2\varphi}{v}=\frac{Q}{v}$$

erit

$$v^4\,d\varphi^2=2gL\,dt^2\left(f-\frac{3nQ}{v}\right)\ ,$$

ac porro per integrationem

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\left(f-\frac{3nQ}{v}\right)}=d\varphi\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{v}-\frac{f}{vv}+\frac{2m+3n\cos 2\varphi+6nQ}{2v^3}\right)}\ .$$

Hinc posito $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$, ut fiat

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\left(f - \frac{3nQ}{v}\right)} = \frac{q\,d\varphi \sin s}{p}\sqrt{\left(f - \frac{(3 + q\cos s)(2m + 3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2p}\right)} ,$$

seu quia Q est valde parvum,

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi \sin s}{p}\sqrt{\left(1 - \frac{6nQ}{fp} - \frac{(2m + 3n\cos 2\varphi)(3 + q\cos s)}{2fp}\right)} ,$$

statui debet

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{(3 + kk)(2m + 3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2f^3}$$

et

$$\frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} + \frac{(1 + 3kk)(2m + 3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2f^4} ,$$

unde fit

$$p = f - \frac{(3 + kk)(2m + 3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{4f}$$

et

$$qq = kk + \frac{(1 - k^4)(2m + 3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2ff} .$$

Cum nunc sit $v\,dQ - Q\,dv = v\,d\varphi \sin 2\varphi$, ideoque

$$dQ = d\varphi \sin 2\varphi + \frac{Q\,dv}{v} = d\varphi \sin 2\varphi + \frac{kQv\,d\varphi \sin s}{f} ,$$

quia in terminis minimis est $dv = \frac{kvv\,d\varphi \sin s}{f}$, erit[38]

$$\frac{dp}{pp} = -\frac{3nkQv\,d\varphi \sin s(3 + kk)}{f^4} ,$$

$$\frac{2q(p\,dq - q\,dp)}{p^3} = \frac{3nkQv\,d\varphi \sin s(1 + 3kk)}{f^5} ,$$

ob $\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} - \frac{(p\,dq - q\,dp)\cos s}{pp} + \frac{q\,ds \sin s}{p}$ habebimus[39]

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds \sin s}{p} - \frac{3nQv\,d\varphi \sin s}{2f^4}\Big(2k(3 + kk) + (1 + 3kk)\cos s\Big) .$$

38 Editio princeps: $\frac{2q(p\,dq - q\,dp)}{p^3} = -\frac{3nkQv\,d\varphi \sin s(1+3kk)}{f^5}$.
39 Editio princeps: $\big(2k(3 + kk) - (1 + 3kk)\cos s\big)$ loco $\big(2k(3 + kk) + (1 + 3kk)\cos s\big)$.

Est vero ex superioribus

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi \sin s}{p} - \frac{3nkQ\,d\varphi \sin s}{f^3} - \frac{k(2m+3n\cos 2\varphi)(3+k\cos s)\,d\varphi \sin s}{4f^3}\ ,$$

unde concludimus[40]

$$d\varphi - ds = \frac{d\varphi\,(2m+3n\cos 2\varphi)(3+k\cos s)}{4ff} - \frac{3nQv\,d\varphi}{2f^3k}\Big(2k(2+kk)+(1+kk)\cos s\Big)\ .$$

Cum iam sit

$$\frac{Q}{v} = \frac{1}{f}\int d\varphi\ \left(\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}k\sin(2\varphi - s) + \tfrac{1}{2}k\sin(2\varphi+s)\right)\ ,$$

et proxime $d\varphi = ds$, erit

$$\frac{Q}{v} = -\frac{\cos 2\varphi}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi - s)}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi+s)}{6f}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2\varphi + 2Q}{v} &= -\frac{k\cos(2\varphi - s)}{2f} + \frac{k\cos(2\varphi+s)}{6f}\\ &= -\frac{k}{3f}\,(\cos 2\varphi\cos s + 2\sin 2\varphi \sin s)\ ,\end{aligned}$$

hincque

$$p = f - \frac{m(3+kk)}{2f} - \frac{nk(3+kk)\,(\cos(2\varphi+s) - 3\cos(2\varphi - s))}{8f(1+k\cos s)}\ ,$$

$$qq = kk + \frac{m(1-k^4)}{ff} + \frac{nk(1-k^4)\,(\cos(2\varphi+s) - 3\cos(2\varphi-s))}{4ff(1+k\cos s)}\ .$$

Invento valore ipsius Q, accuratius relatio inter $d\varphi$ et ds definitur, indeque vera relatio inter φ et s, qua cognita habebitur

$$dt\,\sqrt{2fgL} = \frac{vv\,d\varphi}{\sqrt{\left(1+\frac{n}{2ff}\big(3\cos 2\varphi + 3k\cos(2\varphi - s) + k\cos(2\varphi+s)\big)\right)}}\ ,$$

seu[41]

$$dt\,\sqrt{2fgL} = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2} - \frac{n\,d\varphi\,(3\cos 2\varphi + 3k\cos(2\varphi - s) + k\cos(2\varphi+s))}{4(1+k\cos s)^2}\ .$$

Verum haec solutio minus idonea videtur quam secunda.

169. **Problema.** Si corpus N (Fig. 12) circa punctum quasi fixum J non in eodem plano moveatur, ad quod, praeter vim quadratis distantiarum reciproce

40 Editio princeps: $\big(2k(2+kk) - (1+5kk)\cos s\big)$ loco $\big(2k(2+kk)+(1+kk)\cos s\big)$.

41 Editio princeps: $4ff(1+k\cos s)^2$ loco $4(1+k\cos s)^2$.

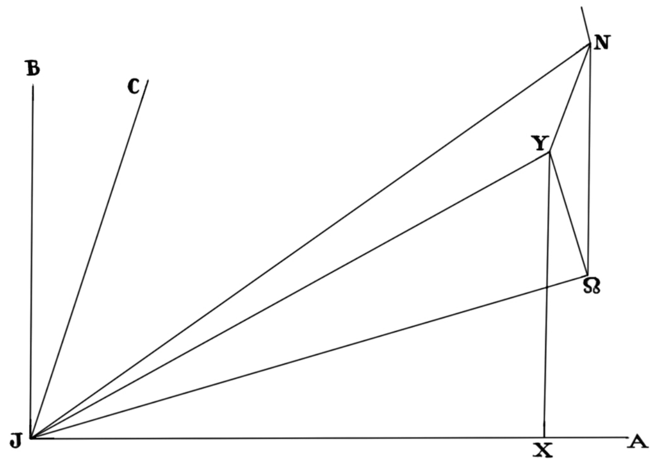


Fig. 12

proportionalem, sollicitetur viribus exiguis quibuscunque, eius motum tam in longitudinem quam in latitudinem definire.

Solutio. Referatur motus ad planum fixum AJB, in quo sumta recta fixa JA, sint coordinatae orthogonales $JX = x$, $XY = y$ et[42] $YN = z$, ac ponatur distantia $JN = \sqrt{(xx+yy+zz)} = v$. Quibus positis sumtoque elemento temporis dt constante, motus huiusmodi tribus aequationibus exprimetur:

$$ddx = -2gL\,dt^2\left(\frac{x}{v^3} + X\right)$$
$$ddy = -2gL\,dt^2\left(\frac{y}{v^3} + Y\right)$$
$$ddz = -2gL\,dt^2\left(\frac{z}{v^3} + Z\right) ,$$

ubi quantitates X, Y, Z ut valde parvae sunt spectandae. Consideretur elementum Nn seu directio motus, in qua nunc corpus movetur, quae cum puncto fixo J continet planum, cuius intersectio cum plano assumto AJB sit recta $J☊$, quae vocatur linea nodorum, ac terminus quidem ☊ nodus ascendens, ubi corpus supra planum AJB ascendere incipit. Hic duae res notandae occurrunt, primo longitudo nodi ascendentis seu angulus $AJ☊ = \psi$ et inclinatio plani $☊JN$ ad planum fixum AJB, quae sit $= \omega$. Ex Y ad $J☊$ ducatur normalis $Y☊$, iunctaque $N☊$, quae etiam ad $J☊$ erit normalis, fiet angulus $Y☊N = \omega$. Statuatur nunc angulus $☊JN = \sigma$, erit $N☊ = v\sin\sigma$ et $J☊ = v\cos\sigma$, hincque $YN = v\sin\sigma\sin\omega = z$ et $☊Y = v\sin\sigma\cos\omega$, unde ob $XY☊ = AJ☊ = \psi$ concluditur

$$x = v\cos\sigma\cos\psi - v\sin\sigma\cos\omega\sin\psi \quad \text{et} \quad y = v\cos\sigma\sin\psi + v\sin\sigma\cos\omega\cos\psi .$$

Quo autem facilius relationem inter hos angulos σ, ω, ψ eorumque differentialia investigemus, re ad trigonometriam sphaericam perducta, sit (Fig. 13) ar-

42 Editio princeps: $YZ = z$.

Fig. 13

cus $A☊ = \psi$, $☊\omega = d\psi$, $☊N = \sigma$, angulus $B☊N = \omega$, $B\omega n = \omega + d\omega$ et $\omega n = \sigma + d\sigma$. Ducto $\omega\pi$ perpendiculo in $☊N$ erit $☊\pi = d\psi\cos\omega$, et ob[43] $\omega N = \pi N$ habebimus $\sigma - d\psi\cos\omega = \sigma + d\sigma - Nn$, unde fit $d\sigma = Nn - d\psi\cos\omega$. Tum vero est

$$\sin\omega : \sin(\omega + d\omega) = \sin(\sigma - d\psi\cos\omega) : \sin\sigma\ ,$$

seu

$$\sin\omega : \sin\omega + d\omega\cos\omega = \sin\sigma - d\psi\cos\sigma\cos\omega : \sin\sigma\ ,$$

hincque dividendo

$$\sin\omega : d\omega\cos\omega = \sin\sigma : d\psi\cos\sigma\cos\omega$$

unde fit

$$d\omega\sin\sigma = d\psi\cos\sigma\sin\omega \quad \text{seu} \quad d\omega = \frac{d\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}\ .$$

His notatis resumamus nostras aequationes differentio-differentiales, ex quibus concludimus[44]

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2gL\,dt^2\left(2D + \frac{2}{v} - 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right)\ ,$$

ubi est $Nn = \surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. At est angulus elementaris

$$NJn = \frac{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dv^2)}{v} = d\sigma + d\psi\cos\omega\ ,$$

unde concludimus

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dv^2 + vv(d\sigma + d\psi\cos\omega)^2 \\ &= 2gL\,dt^2\left(2D + \frac{2}{v} - 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right)\ . \end{aligned}$$

Statuamus brevitatis [gratia] ergo $d\sigma + d\psi\cos\omega = d\varphi$, ut sit

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2gL\,dt^2\left(2D + \frac{2}{v} - 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right)\ .$$

43 Editio princeps: $\omega Y = \pi N$.
44 Editio princeps: D loco $2D$.

Tum vero ob $z = v\sin\sigma\sin\omega$ habebimus

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\sigma\cos\psi}{\sin\sigma\sin\omega} - \frac{\cos\omega\sin\psi}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos\sigma\sin\psi}{\sin\sigma\sin\omega} + \frac{\cos\omega\cos\psi}{\sin\omega} ,$$

unde per differentiationem, ob $d\omega = \dfrac{d\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}$, colligimus

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{zz} = -\frac{d\varphi\cos\psi}{\sin^2\sigma\sin\omega} \quad \text{et} \quad \frac{z\,dy - y\,dz}{zz} = -\frac{d\varphi\sin\psi}{\sin^2\sigma\sin\omega} ,$$

hincque porro

$$z\,dx - x\,dz = -vv\,d\varphi\cos\psi\sin\omega \quad \text{et} \quad z\,dy - y\,dz = -vv\,d\varphi\sin\psi\sin\omega .$$

Est vero ex aequationibus principalibus

$$z\,ddx - x\,ddz = 2gL\,dt^2(Zx - Xz) \quad \text{et} \quad z\,ddy - y\,ddz = 2gL\,dt^2(Zy - Yz) ,$$

quarum illa per $2(z\,dx - x\,dz)$, haec vero per $2(z\,dy - y\,dz)$ multiplicata et integrata dabit

$$(z\,dx - x\,dz)^2 = v^4\,d\varphi^2\cos^2\psi\sin^2\omega = 4gL\,dt^2 \int vv\,d\varphi\cos\psi\sin\omega(Xz - Zx) ,$$

$$(z\,dy - y\,dz)^2 = v^4\,d\varphi^2\sin^2\psi\sin^2\omega = 4gL\,dt^2 \int vv\,d\varphi\sin\psi\sin\omega(Yz - Zy) ,$$

quibus additis prodit

$$v^4\,d\varphi^2\sin^2\omega = 4gL\,dt^2 \int v^3\,d\varphi\sin\omega\Big(\sin\sigma\sin\omega(X\cos\psi + Y\sin\psi) - Z\cos\sigma\Big) .$$

At si illae aequationes differentientur, indeque differentiale ipsius $v^4\,d\varphi^2\sin^2\omega$ eliminetur, obtinebimus

$$v\,d\varphi\,d\psi\sin\omega = 2gL\,dt^2\sin\sigma\Big(\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega\Big) ,$$

ita ut sit

$$d\psi = \frac{2gL\,dt^2\sin\sigma}{v\,d\varphi}\,(Y\cos\psi - X\sin\psi - Z\cot\omega) .$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\int v^3\,d\varphi\sin\omega\Big(\sin\sigma\sin\omega(X\cos\psi + Y\sin\psi) - Z\cos\sigma\Big) = S ,$$

ut sit $v^4\,d\varphi^2\sin^2\omega = 4gL\,dt^2(C + S)$, fietque[45]

$$dv^2 = 4gL\,dt^2\left(D + \frac{1}{v} - \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \frac{C + S}{vv\sin^2\omega}\right) ,$$

45 Editio princeps: Usque ad finem paragraphes 169, $\frac{C-S}{vv\sin^2\omega}$ loco $\frac{C+S}{vv\sin^2\omega}$.

seu

$$dv^2(C+S) = v^4\, d\varphi^2 \sin^2\omega \left(D + \frac{1}{v} - \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \frac{C+S}{vv\sin^2\omega}\right) ,$$

ac praeterea

$$d\psi = \frac{v^3\, d\varphi \sin\omega \sin\sigma}{2(C+S)} \Big(\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega\Big) .$$

Cum igitur X, Y, Z sint quantitates valde parvae, erit etiam S quantitas minima, et anguli ψ et ω fere constantes, ita ut sit proxime $d\varphi = d\sigma$, accuratius autem $d\sigma = d\varphi - d\psi\cos\omega$. Denique vero erit

$$\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = \frac{v^3\, d\varphi\cos\sigma}{2(C+S)} \Big(\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega\Big) ,$$

et aequationis huius

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{(C+S)} = d\varphi\sin\omega \sqrt{\left(D + \frac{1}{v} - \frac{C+S}{vv\sin^2\omega} - \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right)}$$

resolutio est instituenda ut ante docuimus.

170. **Corollarium 1.** Uti ω inclinatio orbitae et ψ longitudo nodi ascendentis vocari solet, ita angulus ☊$JN = \sigma$ argumentum latitudinis et angulus φ longitudo in orbita appellatur, quae autem tantum ficta, cum tam linea nodorum quam inclinatio continuo mutetur.

171. **Corollarium 2.** Si vires exiguae ita fuerint comparatae, ut sit

$$\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega = 0 ,$$

tum ob $d\psi = 0$ et $d\omega = 0$ tam linea nodorum quam inclinatio nullam patitur mutationem, ideoque corpus N in eodem perpetuo plano feretur.

172. **Corollarium 3.** Cum autem angulus in plano AJB sumtus AJY vocetur corporis longitudo, ea erit $= \psi + \operatorname{arc}\tan(\tan\sigma\cos\omega)$, tum vero latitudo corporis, quae est angulus YJN, est angulus, cuius sinus est $\frac{z}{v} = \sin\sigma\sin\omega$.

173. **Scholion.** Haec methodus motum corporis ad planum fixum reducendi illi multum anteferenda videtur, qua ipsa corporis longitudo seu angulus AJY in calculum introducitur, quo pacto formulae satis intricatae redduntur. Hoc igitur incommodum hic maximam partem sustulimus, dum angulum σ, quo argumentum latitudinis denotatur, ac praeterea longitudinem in orbita seu angulum φ induximus, quoniam hoc modo formulae $z\,dx - x\,dz$ et $z\,dy - y\,dz$ tam commode exprimuntur, unde etiam fit

$$y\,dx - x\,dy = -vv\,d\varphi\cos\omega \quad \text{atque} \quad y\,ddx - x\,ddy = 2gL\,dt^2(Yx - Xy) .$$

Haec ergo per $2(y\,dx - x\,dy)$ multiplicata et integrata dabit

$$(y\,dx - x\,dy)^2 = 4gL\,dt^2 \int vv\,d\varphi \cos\omega (Xy - Yx) = v^4\,d\varphi^2 \cos^2\omega\ ,$$

quae etsi iam in praecedentibus contineatur, saepe ingentem usum praestat, uti in sequente problemate patebit. Hinc scilicet commode relatio inter dt et $d\varphi$ desumi poterit. Deinde etiam vis huius methodi in hoc consistit, quod elementum temporis dt penitus e formulis integralibus exclusimus, quo deinceps commode ex calculo eliminari posset.

174. **Problema.** Si corpus M, cuius momenta inertiae respectu axium JA et JB sint aequalia, circa tertium axem JC utcunque gyretur, ac circa id corpus sphaericum N quomodocunque moveatur, huius corporis N motum definire.

Solutio. Plano axium JA et JB (Fig. 12), quod quasi est corporis M planum aequatoris, pro plano fixo assumto, sit Maa momentum inertiae respectu axium JA et JB, at Mcc respectu axis JC. Pro motu ergo secundum problema praecedens definiendo habebimus ex § 128 has aequationes:

$$\begin{aligned}
ddx &= -\frac{2g(M+N)x\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(4aa+cc)}{2vv} - \frac{15(aaxx+aayy+cczz)}{2v^4}\right),\\
ddy &= -\frac{2g(M+N)y\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(4aa+cc)}{2vv} - \frac{15(aaxx+aayy+cczz)}{2v^4}\right),\\
ddz &= -\frac{2g(M+N)z\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(2aa+3cc)}{2vv} - \frac{15(aaxx+aayy+cczz)}{2v^4}\right),
\end{aligned}$$

quibus comparatis cum ante assumtis erit $L = M + N$ et

$$\begin{aligned}
X &= \frac{3x(4aa+cc)}{2v^5} - \frac{15x(aaxx+aayy+cczz)}{2v^7},\\
Y &= \frac{3y(4aa+cc)}{2v^5} - \frac{15y(aaxx+aayy+cczz)}{2v^7},\\
Z &= \frac{3z(2aa+3cc)}{2v^5} - \frac{15z(aaxx+aayy+cczz)}{2v^7},
\end{aligned}$$

hinc ob $x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$ erit

$$\begin{aligned}
X\,dx + Y\,dy + Z\,dz &= \frac{3(4aa+cc)(x\,dx+y\,dy)}{2v^5} + \frac{3(2aa+3cc)z\,dz}{2v^5}\\
&\quad - \frac{15\,dv\,(aaxx+aayy+cczz)}{2v^6}\\
&= \frac{3(4aa+cc)\,dv}{2v^4} - \frac{3(aa-cc)z\,dz}{v^5} - \frac{15aa\,dv}{2v^4}\\
&\quad + \frac{15(aa-cc)zz\,dv}{2v^6}\,.
\end{aligned}$$

Ergo[46]

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \frac{(aa-cc)}{2v^3} - \frac{3(aa-cc)zz}{v^5}\ ,$$

hincque

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 4gL\,dt^2\left(D + \frac{1}{v} + \frac{(cc-aa)}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{v^5}\right)\ .$$

Cum nunc ex paragraphe praecedente sit $y\,ddx - x\,ddy = 0$, erit

$$y\,dx - x\,dy = -vv\,d\varphi\cos\omega = -E\,dt\sqrt{4gL} \quad \text{et} \quad vv\,d\varphi^2 = \frac{4gLEE\,dt^2}{vv\cos^2\omega}\ ,$$

hincque

$$dv^2 = 4gL\,dt^2\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{v^5} - \frac{EE}{vv\cos^2\omega}\right)$$

et

$$dv^2 = \frac{v^4\,d\varphi^2\cos^2\omega}{EE}\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{v^5} - \frac{EE}{vv\cos^2\omega}\right)\ ,$$

seu[47]

$$\frac{E\,dv}{vv} = d\varphi\cos\omega\sqrt{\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)\sin^2\sigma\sin^2\omega}{v^3} - \frac{EE}{vv\cos^2\omega}\right)}\ ,$$

atque $2E\,dt\sqrt{gL} = vv\,d\varphi\cos\omega$. Deinde vero habemus

$$v^4\,d\varphi^2\cos^2\psi\sin^2\omega = 12gL(aa-cc)\,dt^2\int\frac{xz\,d\varphi\cos\psi\sin\omega}{v^3}$$

et

$$v^4\,d\varphi^2\sin^2\psi\sin^2\omega = 12gL(aa-cc)\,dt^2\int\frac{yz\,d\varphi\sin\psi\sin\omega}{v^3}\ ,$$

quibus additis fit

$$v^4\,d\varphi^2\sin^2\omega = 12gL(aa-cc)\,dt^2\int\frac{d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega}{v}\ .$$

Cum porro sit $v^4\,d\varphi^2\cos^2\omega = 4gLEE\,dt^2$, erit differentiando

$$2v^4\,d\varphi^2\,d\omega\sin\omega\cos\omega + \sin^2\omega\cdot d\,(v^4\,d\varphi^2) = 12gL(aa-cc)\,dt^2\cdot\frac{d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega}{v}$$

et

$$-2v^4\,d\varphi^2\,d\omega\sin\omega\cos\omega + \cos^2\omega\cdot d\,(v^4\,d\varphi^2) = 0\ ,$$

46 Editio princeps: Hic et infra, $2v^5$ loco v^5.
47 Editio princeps: $2v^3$ loco v^3.

unde concluditur

$$2v^4\,d\varphi^2\,d\omega\sin\omega\cos\omega = 12gL(aa-cc)\,dt^2\cdot\frac{d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega\cos^2\omega}{v}\,,$$

seu

$$d\varphi\,d\omega = \frac{6gL(aa-cc)\,dt^2\sin\sigma\cos\sigma\sin\omega\cos\omega}{v^5}\,,$$

ideoque

$$d\omega = \frac{3(aa-cc)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin\omega\cos^3\omega}{2EEv}$$

et

$$d\psi = \frac{d\omega\sin\sigma}{\cos\sigma\sin\omega} = \frac{3(aa-cc)\,d\varphi\sin^2\sigma\cos^3\omega}{2EEv}\,.$$

Initio igitur, ob $aa-cc$ minimum, elementa ψ et ω ut constantia spectantur, et cum sit $d\varphi = d\sigma + d\psi\cos\omega$, differentialia $d\varphi$ et $d\sigma$ pro aequalibus habentur. Ponatur iam $EE = F\cos^2\omega$ et[48] $\frac{1}{2}(cc-aa)(1-3\sin^2\sigma\sin^2\omega) = G$, ut habeamus

$$\frac{E\,dv}{vv} = d\varphi\cos\omega\sqrt{\left(D+\frac{1}{v}-\frac{F}{vv}+\frac{G}{v^3}\right)}\,.$$

Ponatur nunc $v = \dfrac{p}{1+q\cos s}$, fiatque

$$D + \frac{(1\pm q)}{p} - F\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^2 + G\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^3 = 0\,,$$

ut sit

$$D+\frac{1}{p}-\frac{F(1+qq)}{pp}+\frac{G(1+3qq)}{p^3} = 0 \quad \text{et} \quad 1-\frac{2F}{p}+\frac{G(3+qq)}{pp} = 0\,,$$

ubi cum G sit valde parvum, sit $F = \dfrac{f}{2}+u$, ut prodeat valor prope verus $p = f$, eritque

$$EE = \tfrac{1}{2}f\cos^2\omega + u\cos^2\omega = \text{Constanti}\,.$$

Sit ε valor medius inclinationis et $EE = \frac{1}{2}f\cos^2\varepsilon$, erit

$$u = \frac{f(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{2\cos^2\omega}\,,$$

atque

$$1-\frac{f}{p}-\frac{(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{\cos^2\omega}+\frac{G(3+kk)}{ff} = 0\,,$$

48 Recte: $\frac{1}{2}(cc-aa)(1-6\sin^2\sigma\sin^2\omega) = G$.

et hinc
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{(\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega)}{f\cos^2\omega} + \frac{G(3+kk)}{f^3}\,.$$
Tum vero prior aequatio erit
$$D + \frac{1}{p} - \frac{f(1+qq)}{2pp} - \frac{(1+kk)(\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega)}{2f\cos^2\omega} + \frac{G(1+3kk)}{f^3} = 0\,.$$
Sit constans $D = \frac{kk-1}{2f}$, eritque
$$\frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} - \frac{(1+kk)(\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega)}{ff\cos^2\omega} + \frac{2G(1+3kk)}{f^4}\,,$$
ideoque
$$p = f + \frac{f(\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega)}{\cos^2\omega} - \frac{G(3+kk)}{f}$$
et
$$qq = kk - \frac{(1-kk)(\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega)}{\cos^2\omega} + \frac{2G(1-k^4)}{ff}\,,$$
unde formula irrationalis abit in
$$\frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(\frac{f}{2} + \frac{f(\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega)}{2\cos^2\omega} - \frac{G(3+k\cos s)}{f}\right)}\,,$$
ut ob $E = \frac{\cos\varepsilon\sqrt{f}}{\sqrt{2}}$ sit
$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s\cos\omega}{p\cos\varepsilon}\sqrt{\left(1 + \frac{\cos^2\varepsilon - \cos^2\omega}{\cos^2\omega} - \frac{2G(3+k\cos s)}{ff}\right)}\,,$$
seu
$$\begin{aligned}\frac{dv}{vv} &= \frac{q\sin s}{p}\,d\varphi\sqrt{\left(1 - \frac{2G(3+k\cos s)\cos^2\omega}{ff\cos^2\varepsilon}\right)}\\ &= \frac{q\sin s}{p}\left(d\varphi - \frac{G\,d\varphi\,(3+k\cos s)\cos^2\omega}{ff\cos^2\varepsilon}\right)\,.\end{aligned}$$
Per differentiationem autem obtinemus
$$\begin{aligned}\frac{dp}{pp} &= \frac{3(cc-aa)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1-2k\cos s+kk)}{f^3}\,,\\ \frac{p\,dq - q\,dp}{pp} &= \frac{3(cc-aa)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(\cos s - 2k + kk\cos s)}{f^3}\,,\end{aligned}$$

hincque concludimus[49]

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds\sin s}{p} + \frac{3(cc-aa)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1-kk)\sin^2 s}{f^3}$$
$$= \frac{q\,d\varphi\sin s}{p} - \frac{k(cc-aa)(1-3\sin^2\sigma\sin^2\omega)\,d\varphi\,(3+k\cos s)\cos^2\omega\sin s}{2f^3\cos^2\varepsilon}\,,$$

ita ut sit[50]

$$d\varphi - ds = \frac{3(cc-aa)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1-kk)\sin s}{ffk} + \frac{(cc-aa)(1-3\sin^2\sigma\sin^2\omega)(3+k\cos s)\,d\varphi\cos^2\omega}{2ff\cos^2\varepsilon}\,.$$

Cum igitur in his terminis minimis liceat ponere $\omega = \varepsilon$, quae est inclinatio media, erit[51]

$$d\varphi - ds = \frac{(cc-aa)(3+k\cos s)\,d\varphi}{2ff} - \frac{3(cc-aa)(3+k\cos s)\,d\varphi\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma}{2ff} + \frac{3(cc-aa)(1-kk)\,d\varphi\sin^2\varepsilon\sin s\sin\sigma\cos\sigma}{ffk}\,,$$

ubi statuere licet $d\varphi = ds = d\sigma$. Tum vero habetur

$$p = \frac{f\cos^2\varepsilon}{\cos^2\omega} - \frac{(cc-aa)(1-3\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma)(3+kk)}{2f}\,,$$
$$qq = \frac{kk\cos^2\varepsilon}{\cos^2\omega} + 1 - \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\omega} + \frac{(cc-aa)(1-3\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma)(1-k^4)}{ff}\,,$$

ac praeterea

$$d\psi = -\frac{3(cc-aa)(1+k\cos s)\,d\varphi\cos\varepsilon\sin^2\sigma}{ff}\,,$$
$$d\omega = -\frac{3(cc-aa)(1+k\cos s)\,d\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\sigma\cos\sigma}{ff}\,,$$

eritque $d\varphi = d\sigma + d\psi\cos\varepsilon$, ac tandem pro tempore

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{vv\,d\varphi\cos\omega}{\cos\varepsilon} = \frac{pp\,d\varphi\cos\omega}{\cos\varepsilon(1+q\cos s)^2}\,,$$

49 Recte: $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds\sin s}{p} + \frac{3(cc-aa)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1+kk)\sin^2 s}{f^3}$.

50 Recte: $d\varphi - ds = \frac{3(cc-aa)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1+kk)\sin s}{ffk}$.

51 Recte: $d\varphi - ds = \frac{(cc-aa)(3+k\cos s)\,d\varphi}{2ff} - \frac{3(cc-aa)(3+k\cos s)\,d\varphi\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma}{2ff} + \frac{3(cc-aa)(1+kk)\,d\varphi\sin^2\varepsilon\sin s\sin\sigma\cos\sigma}{ffk}$.

quae formulae omnes in terminis minimis sine difficultate integrari possunt; postrema tantum formula maiorem solertiam postulat. Ponamus enim ad abbreviandum $\frac{cc-aa}{ff}=n$ et evolutis productis sinuum et cosinuum adipiscemur

$$\begin{aligned}
d\psi &= -\tfrac{3}{2}n\,d\varphi\cos\varepsilon\left(1+k\cos s-\cos 2\sigma-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma-s)-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma+s)\right),\\
d\omega &= -\tfrac{3}{2}n\,d\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left(\sin 2\sigma+\tfrac{1}{2}k\sin(2\sigma-s)+\tfrac{1}{2}k\sin(2\sigma+s)\right),\\
d\varphi-ds &= \tfrac{1}{2}n\,d\varphi(3+k\cos s)-\tfrac{3}{4}n\,d\varphi\sin^2\varepsilon\Bigg(3+k\cos s-3\cos 2\sigma\\
&\qquad -\frac{2-kk}{2k}\cos(2\sigma-s)+\frac{2-3kk}{2k}\cos(2\sigma+s)\Bigg),\\
d\varphi-d\sigma &= -\tfrac{3}{2}n\,d\varphi\cos^2\varepsilon\left(1+k\cos s-\cos 2\sigma-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma-s)-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma+s)\right).
\end{aligned}$$

Hic igitur totum negotium pendet ab integratione huiusmodi formulae

$$\int d\varphi\cos(\mu s+\nu\sigma),$$

ad quam accurate evolvendam ponamus brevitatis gratia

$$d\varphi = ds+\alpha\,d\varphi+P\,d\varphi \quad \text{et} \quad d\varphi = d\sigma+\beta\,d\varphi+Q\,d\varphi,$$

ut sit

$$\alpha = \tfrac{3}{2}n-\tfrac{9}{4}n\sin^2\varepsilon, \qquad \beta = -\tfrac{3}{2}n\cos^2\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
P = \tfrac{1}{2}nk\cos s-\tfrac{3}{4}n\sin^2\varepsilon\Bigg(&k\cos s-3\cos 2\sigma\\
&-\frac{2-kk}{2k}\cos(2\sigma-s)+\frac{2-3kk}{2k}\cos(2\sigma+s)\Bigg)
\end{aligned}$$

et

$$Q = -\tfrac{3}{2}n\cos^2\varepsilon\left(k\cos s-\cos 2\sigma-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma-s)-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma+s)\right).$$

Quare cum hinc conficiatur $d\varphi = \frac{\mu\,ds+\nu\,d\sigma+d\varphi\,(\mu P+\nu Q)}{\mu+\nu-\alpha\mu-\beta\nu}$, erit

$$\int d\varphi\cos(\mu s+\nu\sigma) = \frac{\sin(\mu s+\nu\sigma)}{\mu+\nu-\alpha\mu-\beta\nu}+\int\frac{d\varphi\,(\mu P+\nu Q)\cos(\mu s+\nu\sigma)}{\mu+\nu-\alpha\mu-\beta\nu}.$$

Tum vero cum $\mu P+\nu Q$ habeat huiusmodi formam

$$A\cos s+B\cos 2\sigma+C\cos(2\sigma-s)+D\cos(2\sigma+s),$$

haec per $\cos(\mu s+\nu\sigma)$ multiplicata denuo in simplices cosinus evolvitur, quorum singuli praebent formulas similes integrandas. Qui etsi videntur ob parvitatem reiiciendi, tamen si in iis fiat $\mu+\nu=0$, ob denominatorem $-\alpha\mu-\beta\nu$ minimum ad notabilem valorem exsurgere possunt.

175. **Corollarium 1.** Cum sit

$$d\omega = -\tfrac{3}{2}n\,d\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon\big(\sin 2\sigma + \tfrac{1}{2}k\sin(2\sigma-s) + \tfrac{1}{2}k\sin(2\sigma+s)\big)$$

patet duobus casibus inclinationem orbitae nullam pati mutationem, altero quo $\varepsilon = 0°$, seu corpus N in ipso plano aequatoris AJB movetur, altero quo $\varepsilon = 90°$, seu corpus N in plano ad aequatorem perpendiculari fertur; atque hoc casu etiam linea nodorum est fixa. Ceteris ergo paribus inclinatio obnoxia erit maximae variationi, quando inclinatio ε est 45°.

176. **Corollarium 2.** Pro motu lineae nodorum invenimus longitudinem nodi ascendentis

$$\begin{aligned}\psi = \text{Const.} - \tfrac{3}{2}n\varphi\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}n\cos\varepsilon\bigg(k\int d\varphi\cos s - \int d\varphi\cos 2\sigma\\ - \tfrac{1}{2}k\int d\varphi\cos(2\sigma-s) - \tfrac{1}{2}k\int d\varphi\cos(2\sigma+s)\bigg),\end{aligned}$$

pro motu autem lineae absidum erit longitudo absidis imae

$$\begin{aligned}\varphi - s = \text{Const.} + \tfrac{3}{2}n\left(1-\tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right)\varphi + \tfrac{1}{2}nk\left(1-\tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right)\int d\varphi\cos s\\ + \tfrac{3}{4}n\sin^2\varepsilon\bigg(3\int d\varphi\cos 2\sigma + \frac{2-kk}{2k}\int d\varphi\cos(2\sigma-s)\\ - \frac{2-3kk}{2k}\int d\varphi\cos(2\sigma+s)\bigg)\end{aligned}$$

et pro argumento latitudinis σ habemus $\varphi = \sigma + \psi\cos\varepsilon$.

177. **Corollarium 3.** Si partes integrales reiiciamus, innotescet vero proxime motus medius tam lineae nodorum quam lineae absidum, ac si $n = \dfrac{cc-aa}{ff}$ sit numerus positivus, linea nodorum regreditur, idque eo minus, quo maior fuerit inclinatio. Linea autem absidum progreditur, quamdiu $\sin^2\varepsilon < \frac{2}{3}$, seu $\varepsilon < 54°44'$; sin autem fuerit $\varepsilon > 54°44'$, etiam linea absidum regreditur.

178. **Corollarium 4.** Cum sit proxime $d\varphi = ds = d\sigma$, erunt integralium valores proximi

$$\int d\varphi\cos s = \sin s\ ,$$

$$\int d\varphi\cos 2\sigma = \tfrac{1}{2}\sin 2\sigma\ ,$$

$$\int d\varphi\cos(2\sigma-s) = \sin(2\sigma-s)\ ,$$

$$\int d\varphi\cos(2\sigma+s) = \tfrac{1}{3}\sin(2\sigma+s)\ ,$$

unde praeter motum medium utriusque lineae nodorum et absidum, anomaliae periodicae definiri possunt.

179. **Scholion.** Hae determinationes recte se habere sunt censendae, dummodo fractio $n = \frac{cc-aa}{ff}$ satis fuerit parva, ut termini quadrato nn affecti pro nihilo haberi queant. Sin autem eveniat, ut haec fractio non sit adeo parva, tum iam superiores formulae accuratius evolvi deberent, ut termini per nn multiplicati simul comprehenderentur; hoc autem modo in formulas nimis prolixas incideremus. Verum hinc statim ii termini excludi poterunt, qui nullius plane momenti videbuntur, iis tantum retentis, qui per integrationem insignes coëfficientes adipiscuntur, cuiusmodi est $\cos(2\sigma - 2s)$, unde per integrationem oritur

$$\int d\varphi \cos(2\sigma - 2s) = \frac{\sin(2\sigma - 2s)}{2\alpha - 2\beta} = \frac{2\sin(2\sigma - 2s)}{3n(2 - 3\sin^2\varepsilon + 2\cos^2\varepsilon)} ,$$

qui terminus, etsi ex ordine per nn multiplicato nascitur, tamen ob denominatorem exiguum ad ordinem per n multiplicatum elevatur. Deinde etiam si excentricitas k fuerit exigua, per integrationes ulterius productas anguli absoluti satis notabiles exsurgere possunt. Scilicet integratio $\int d\varphi \cos(2\sigma - s)$ ducit ad formam

$$\frac{\sin(2\sigma - s)}{1 + \alpha - 2\beta} + \frac{\int d\varphi(2Q - P)\cos(2\sigma - s)}{1 + \alpha - 2\beta} ,$$

at in $2Q - P$ continetur membrum

$$\tfrac{3}{2}nk\cos^2\varepsilon\cos(2\sigma - s) - \frac{3n(2 - kk)}{8k}\sin^2\varepsilon\cos(2\sigma - s) ,$$

quod per $2\cos(2\sigma - s)$ divisum[52] praebet quantitatem constantem

$$\tfrac{3}{4}nk\cos^2\varepsilon - \frac{3n(2 - kk)}{16k}\sin^2\varepsilon ,$$

ita ut inde oritur angulus absolutus

$$\left(\tfrac{3}{4}nk\cos^2\varepsilon - \frac{3n(2 - kk)}{16k}\sin^2\varepsilon\right)\varphi$$

ad motum medium adiiciendus. Simili modo ex formula

$$\int d\varphi \cos(2\sigma + s) = \frac{\sin(2\sigma + s)}{3 - \alpha - 2\beta} + \frac{\int d\varphi\,(2Q + P)\cos(2\sigma + s)}{3 - \alpha - 2\beta} ,$$

ob $2Q + P$ complectentem terminum

$$\left(\tfrac{3}{2}nk\cos^2\varepsilon - \frac{3n(2 - 3kk)}{8k}\sin^2\varepsilon\right)\cos(2\sigma + s) ,$$

52 Editio princeps: per $\cos(2\sigma - s)$ multiplicatum loco per $2\cos(2\sigma - s)$ divisum.

nascetur angulus absolutus

$$\left(\tfrac{1}{4}nk\cos^2\varepsilon - \frac{n(2-3kk)}{16k}\sin^2\varepsilon\right)\varphi\,.$$

Cum deinde in motu lineae absidum hi anguli denuo per

$$\frac{3n(2-kk)}{8k}\sin^2\varepsilon \quad \text{et} \quad -\frac{3n(2-3kk)}{8k}\sin^2\varepsilon$$

multiplicari debeant, fieri potest, ut inde motus medius non parum afficiatur. Verum si hi termini alicuius sint momenti, etiam ipsas formulas principales accuratius evolvi oporteret, quod autem negotium hic suscipi non convenit, cum nondum satis constet, quibusnam casibus id utilitatem esset habiturum. Quod denique ad integrationem formulae

$$\int \frac{pp\,d\varphi\cos\omega}{\cos\varepsilon(1+q\cos s)^2} = t\sqrt{2fgL}$$

attinet, in ea vires analyseos experiri oportet, ac tutissima quidem methodus videtur, postquam loco $d\varphi$ valor $ds + \alpha\,d\varphi + P\,d\varphi$ est positus, formulam

$$\frac{pp\,ds\cos\omega}{\cos\varepsilon(1+q\cos s)^2}$$

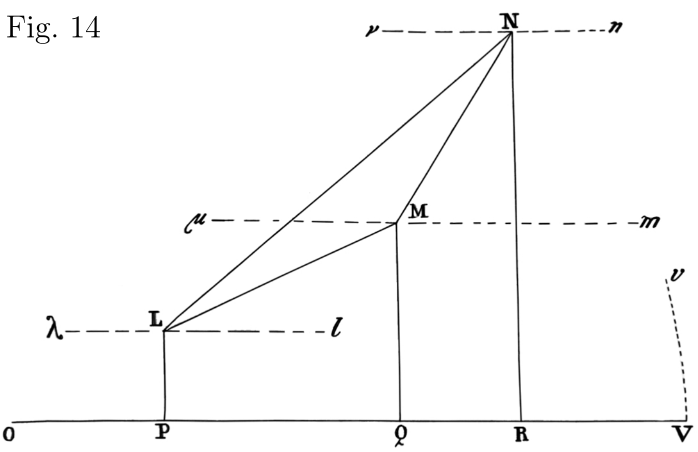
ita integrare, quasi p, q et ω essent constantes, tum vero invento integrali correctiones ex harum quantitatum variabilitate oriundas investigare. Atque haec de motu duorum corporum se mutuo attrahentium sufficere videntur, ex quo ad considerationem trium corporum progrediamur.

CAPUT VI

De motu trium corporum sphaericorum se mutuo attrahentium in genere

180. **Problema.** Si tria corpora sphaerica L, M, N (Fig. 14) se mutuo attrahentia moveantur in eodem plano, eorum motum per calculum definire.

Fig. 14



Solutio. Elapso tempore $= t$ versentur corpora in L, M, N in plano tabulae, in quo sumta recta fixa OV, ad quam eorum situs referatur, per puncta L, M, N agantur rectae $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$ ipsi OV parallelae, simulque ad eam perpendicula LP, MQ, NR. Quodsi iam longitudinem cuiusque corporis ex altero spectati per angulum a recta OV in sensum Vv sumtum aestimemus, statuamus

longitudinem corporis	M	ex	L	spectati	$lLM = \zeta$
longitudinem corporis	N	ex	M	spectati	$mMN = \eta$
longitudinem corporis	L	ex	N	spectati	$nNL = \vartheta$

qui postremus angulus ϑ in figura duobus rectis maior est intelligendus. Atque iidem anguli duobus rectis vel aucti vel minuti exhibebunt longitudinem corporum L, M, N ex M, N, L spectatorum. Ponamus nunc distantias $LM = x$, $MN = y$ et $NL = z$, erunt coordinatae

$$OQ = OP + x\cos\zeta\,, \qquad QM = PL + x\sin\zeta$$
$$OR = OQ + y\cos\eta\,, \qquad RN = QM + y\sin\eta$$
$$OP = OR + z\cos\vartheta\,, \qquad PL = RN + z\sin\vartheta$$

hincque colligimus

$$x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta = 0 \quad \text{et} \quad x\sin\zeta + y\sin\eta + z\sin\vartheta = 0\,,$$

ac porro

$$\begin{aligned} x\sin(\zeta-\vartheta)+y\sin(\eta-\vartheta)&=0\ ,\\ x\sin(\zeta-\eta)+z\sin(\vartheta-\eta)&=0\ ,\\ y\sin(\eta-\zeta)+z\sin(\vartheta-\zeta)&=0\ ,\end{aligned}$$

ideoque

$$x:y:z=\sin(\eta-\vartheta):\sin(\vartheta-\zeta):\sin(\zeta-\eta)\ ,$$

unde relatio inter distantias et angulos ita commodissime exhibetur, ut sit

$$\begin{aligned} x&=v\sin(\eta-\vartheta)\ ,\\ y&=v\sin(\vartheta-\zeta)\ ,\\ z&=v\sin(\zeta-\eta)\ ,\end{aligned}$$

ubi v denotat diametrum circuli triangulo LMN circumscripti. Si iam massae corporum litteris cognominibus L, M, N exprimantur, corpus L a reliquis sollicitatur

$$\text{sec. } OP \text{ vi } =\frac{LM\cos\zeta}{xx}-\frac{LN\cos\vartheta}{zz}\quad\text{et sec. } PL \text{ vi } =\frac{LM\sin\zeta}{xx}-\frac{LN\sin\vartheta}{zz}\ ,$$

corpus vero M a reliquis sollicitatur

$$\text{sec. } OQ \text{ vi } =\frac{MN\cos\eta}{yy}-\frac{LM\cos\zeta}{xx}\quad\text{et sec. } QM \text{ vi } =\frac{MN\sin\eta}{yy}-\frac{LM\sin\zeta}{xx}\ ,$$

et corpus N a reliquis sollicitatur

$$\text{sec. } OR \text{ vi } =\frac{LN\cos\vartheta}{zz}-\frac{MN\cos\eta}{yy}\quad\text{et sec. } RN \text{ vi } =\frac{LN\sin\vartheta}{zz}-\frac{MN\sin\eta}{yy}\ ,$$

unde sequentes aequationes adipiscemur:

$$\begin{aligned} dd\cdot OP&=2gdt^2\left(\frac{M\cos\zeta}{xx}-\frac{N\cos\vartheta}{zz}\right), & dd\cdot PL&=2gdt^2\left(\frac{M\sin\zeta}{xx}-\frac{N\sin\vartheta}{zz}\right),\\ dd\cdot OQ&=2gdt^2\left(\frac{N\cos\eta}{yy}-\frac{L\cos\zeta}{xx}\right), & dd\cdot QM&=2gdt^2\left(\frac{N\sin\eta}{yy}-\frac{L\sin\zeta}{xx}\right),\\ dd\cdot OR&=2gdt^2\left(\frac{L\cos\vartheta}{zz}-\frac{M\cos\eta}{yy}\right), & dd\cdot RN&=2gdt^2\left(\frac{L\sin\vartheta}{zz}-\frac{M\sin\eta}{yy}\right),\end{aligned}$$

ex quibus colligimus sequentes:

$$dd\cdot x\cos\zeta = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+M)\cos\zeta}{xx}+\frac{N\cos\eta}{yy}+\frac{N\cos\vartheta}{zz}\right),$$
$$dd\cdot x\sin\zeta = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+M)\sin\zeta}{xx}+\frac{N\sin\eta}{yy}+\frac{N\sin\vartheta}{zz}\right),$$

$$dd\cdot y\cos\eta = 2g\,dt^2\left(-\frac{(M+N)\cos\eta}{yy}+\frac{L\cos\vartheta}{zz}+\frac{L\cos\zeta}{xx}\right),$$
$$dd\cdot y\sin\eta = 2g\,dt^2\left(-\frac{(M+N)\sin\eta}{yy}+\frac{L\sin\vartheta}{zz}+\frac{L\sin\zeta}{xx}\right),$$

$$dd\cdot z\cos\vartheta = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+N)\cos\vartheta}{zz}+\frac{M\cos\zeta}{xx}+\frac{M\cos\eta}{yy}\right),$$
$$dd\cdot z\sin\vartheta = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+N)\sin\vartheta}{zz}+\frac{M\sin\zeta}{xx}+\frac{M\sin\eta}{yy}\right),$$

quae porro transformantur in has:

$$\text{I.}\quad 2\,dx\,d\zeta + x\,dd\zeta = 2g\,dt^2\left(\frac{N\sin(\eta-\zeta)}{yy}+\frac{N\sin(\vartheta-\zeta)}{zz}\right)$$
$$\text{II.}\quad ddx - x\,d\zeta^2 = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+M)}{xx}+\frac{N\cos(\eta-\zeta)}{yy}+\frac{N\cos(\vartheta-\zeta)}{zz}\right)$$
$$\text{III.}\quad 2\,dy\,d\eta + y\,dd\eta = 2g\,dt^2\left(\frac{L\sin(\vartheta-\eta)}{zz}+\frac{L\sin(\zeta-\eta)}{xx}\right)$$
$$\text{IV.}\quad ddy - y\,d\eta^2 = 2g\,dt^2\left(-\frac{(M+N)}{yy}+\frac{L\cos(\vartheta-\eta)}{zz}+\frac{L\cos(\zeta-\eta)}{xx}\right)$$
$$\text{V.}\quad 2\,dz\,d\vartheta + z\,dd\vartheta = 2g\,dt^2\left(\frac{M\sin(\zeta-\vartheta)}{xx}+\frac{M\sin(\eta-\vartheta)}{yy}\right)$$
$$\text{VI.}\quad ddz - z\,d\vartheta^2 = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+N)}{zz}+\frac{M\cos(\zeta-\vartheta)}{xx}+\frac{M\cos(\eta-\vartheta)}{yy}\right),$$

ex harum aequationum I, III et V colligimus hanc integralem:

$$LMxx\,d\zeta + MNyy\,d\eta + LNzz\,d\vartheta = C\,dt\,,$$

deinde ex I et II deducimus

$$d\cdot\left(dx^2+xx\,d\zeta^2\right) = 4g\,dt^2\left(-\frac{(L+M)\,dx}{xx}+\frac{N\left(dx\cos(\eta-\zeta)+x\,d\zeta\sin(\eta-\zeta)\right)}{yy}+\frac{N\left(dx\cos(\vartheta-\zeta)+x\,d\zeta\sin(\vartheta-\zeta)\right)}{zz}\right),$$

quae ita repraesentetur

$$\begin{aligned}\frac{d\cdot(dx^2+xx\,d\zeta^2)}{4gN\,dt^2} = &-\frac{(L+M)\,dx}{Nxx}\\ &+\frac{d\cdot x\cos(\eta-\zeta)+x\,d\eta\sin(\eta-\zeta)}{yy}\\ &+\frac{d\cdot x\cos(\vartheta-\zeta)+x\,d\vartheta\sin(\vartheta-\zeta)}{zz}\,,\end{aligned}$$

similesque ex reliquis ortae erunt

$$\begin{aligned}\frac{d\cdot(dy^2+yy\,d\eta^2)}{4gL\,dt^2} = &-\frac{(M+N)\,dy}{Lyy}\\ &+\frac{d\cdot y\cos(\vartheta-\eta)+y\,d\vartheta\sin(\vartheta-\eta)}{zz}\\ &+\frac{d\cdot y\cos(\zeta-\eta)+y\,d\zeta\sin(\zeta-\eta)}{xx}\,,\\ \frac{d\cdot(dz^2+zz\,d\vartheta^2)}{4gM\,dt^2} = &-\frac{(L+N)\,dz}{Mzz}\\ &+\frac{d\cdot z\cos(\zeta-\vartheta)+z\,d\zeta\sin(\zeta-\vartheta)}{xx}\\ &+\frac{d\cdot z\cos(\eta-\vartheta)+z\,d\eta\sin(\eta-\vartheta)}{yy}\,.\end{aligned}$$

Addantur hae tres aequationes, et cum sit

$$\begin{aligned}x\sin(\eta-\zeta)+z\sin(\eta-\vartheta)&=0\,,\\ x\sin(\vartheta-\zeta)+y\sin(\vartheta-\eta)&=0\,,\\ y\sin(\zeta-\eta)+z\sin(\zeta-\vartheta)&=0\,,\end{aligned}$$

summa erit

$$\begin{aligned}&-\frac{(L+M)\,dx}{Nxx}-\frac{(M+N)\,dy}{Lyy}-\frac{(L+N)\,dz}{Mzz}\\ &+\frac{d\ (x\cos(\eta-\zeta)+z\cos(\eta-\vartheta))}{yy}\\ &+\frac{d\ (x\cos(\vartheta-\zeta)+y\cos(\vartheta-\eta))}{zz}\\ &+\frac{d\ (y\cos(\zeta-\eta)+z\cos(\zeta-\vartheta))}{xx}\,.\end{aligned}$$

At ex aequationibus $x\cos\zeta+y\cos\eta+z\cos\vartheta=0$ et $x\sin\zeta+y\sin\eta+z\sin\vartheta=0$ colligimus

$$\begin{aligned}x\cos(\vartheta-\zeta)+y\cos(\vartheta-\eta)+z&=0\,,\\ x\cos(\eta-\zeta)+z\cos(\eta-\vartheta)+y&=0\,,\\ y\cos(\zeta-\eta)+z\cos(\zeta-\vartheta)+x&=0\,,\end{aligned}$$

quibus valoribus inductis consequimur

$$\frac{d\cdot(dx^2+xx\,d\zeta^2)}{4gN\,dt^2}+\frac{d\cdot(dy^2+yy\,d\eta^2)}{4gL\,dt^2}+\frac{d\cdot(dz^2+zz\,d\vartheta^2)}{4gM\,dt^2}$$
$$=-\frac{(L+M+N)\,dx}{Nxx}-\frac{(L+M+N)\,dy}{Lyy}-\frac{(L+M+N)\,dz}{Mzz}\ ,$$

hincque integrando

$$\frac{dx^2+xx\,d\zeta^2}{N}+\frac{dy^2+yy\,d\eta^2}{L}+\frac{dz^2+zz\,d\vartheta^2}{M}$$
$$=4g(L+M+N)\,dt^2\left(D+\frac{1}{Nx}+\frac{1}{Ly}+\frac{1}{Mz}\right)\ ,$$

seu

$$LM\left(dx^2+xx\,d\zeta^2\right)+MN\left(dy^2+yy\,d\eta^2\right)+LN\left(dz^2+zz\,d\vartheta^2\right)$$
$$=4g(L+M+N)\,dt^2\left(E+\frac{LM}{x}+\frac{MN}{y}+\frac{LN}{z}\right)\ ,$$

ita ut iam habeamus duas aequationes integrales. Praeterea autem notasse convenit esse

$$LM\left(x\,ddx+dx^2\right)+MN\left(y\,ddy+dy^2\right)+LN\left(z\,ddz+dz^2\right)$$
$$=2g(L+M+N)\,dt^2\left(2E+\frac{LM}{x}+\frac{MN}{y}+\frac{LN}{z}\right)\ ,$$

etiamsi hinc nulla via ad novam integrationem aperiatur. Cum igitur septem habeamus quantitates, scilicet tres distantias x, y, z, tres angulos ζ, η, ϑ et tempus t, quarum relationem mutuam definiri oportet, ad hoc opus est sex aequationibus, ad quarum numerum complendum habemus primo has duas aequationes finitas

$$\text{I.}\quad x\cos\zeta+y\cos\eta+z\cos\vartheta=0\ ,$$
$$\text{II.}\quad x\sin\zeta+y\sin\eta+z\sin\vartheta=0\ ,$$

deinde binas aequationes iam per integrationem erutas

$$\text{III.}\quad LMxx\,d\zeta+MNyy\,d\eta+LNzz\,d\vartheta=C\,dt$$

et

$$\text{IV.}\quad LM\left(dx^2+xx\,d\zeta^2\right)+MN\left(dy^2+yy\,d\eta^2\right)+LN\left(dz^2+zz\,d\vartheta^2\right)$$
$$=4g(L+M+N)\,dt^2\left(E+\frac{LM}{x}+\frac{MN}{y}+\frac{LN}{z}\right)\ .$$

Loco duarum reliquarum binae trium sequentium commodissime accipientur

$$\begin{aligned}
\text{V.}\quad & 2\,dx\,d\zeta + x\,dd\zeta = 2gN\,dt^2\left(\frac{\sin(\eta-\zeta)}{yy}+\frac{\sin(\vartheta-\zeta)}{zz}\right),\\
\text{VI.}\quad & 2\,dy\,d\eta + y\,dd\eta = 2gL\,dt^2\left(\frac{\sin(\vartheta-\eta)}{zz}+\frac{\sin(\zeta-\eta)}{xx}\right),\\
\text{VII.}\quad & 2\,dz\,d\vartheta + z\,dd\vartheta = 2gM\,dt^2\left(\frac{\sin(\zeta-\vartheta)}{xx}+\frac{\sin(\eta-\vartheta)}{yy}\right),
\end{aligned}$$

quarum resolutio hoc modo tentanda videtur. Multiplicentur hae tres postremae aequationes seorsim per certas formulas differentiales, ita ut membra posteriora fiant integrabilia seorsim, priorum autem summa talis efficiatur. Ob

$$x : y : z = \sin(\eta-\vartheta) : \sin(\vartheta-\zeta) : \sin(\zeta-\eta)\,,$$

prior conditio impletur, si multiplicetur

$$\begin{aligned}
&\text{aequatio}\quad \text{V}\quad \text{per}\quad \frac{yz\sin(\vartheta-\zeta)\sin(\zeta-\eta)}{\sin^3(\vartheta-\zeta)-\sin^3(\zeta-\eta)}\,dP\,,\\
&\text{aequatio}\quad \text{VI}\quad \text{per}\quad \frac{xz\sin(\zeta-\eta)\sin(\eta-\vartheta)}{\sin^3(\zeta-\eta)-\sin^3(\eta-\vartheta)}\,dQ\,,\\
&\text{aequatio}\quad \text{VII}\quad \text{per}\quad \frac{xy\sin(\eta-\vartheta)\sin(\vartheta-\zeta)}{\sin^3(\eta-\vartheta)-\sin^3(\vartheta-\zeta)}\,dR\,;
\end{aligned}$$

tum enim integralia posteriorum membrorum fiunt

$$2gNP\,dt^2\,,\quad 2gLQ\,dt^2\,,\quad 2gMR\,dt^2\,;$$

superest ergo, ut priorum membrorum aggregatum reddatur integrabile, quem in finem idoneos valores functionum P, Q, R investigari convenit. Verum hic calculi subsidiis destituti istud negotium deserere cogimur.

181. **Corollarium 1.** Posito $\sin(\eta-\vartheta)=\frac{x}{v}$, $\sin(\vartheta-\zeta)=\frac{y}{v}$, $\sin(\zeta-\eta)=\frac{z}{v}$, aequationes V, VI, VII in has abeunt formas:

$$\begin{aligned}
\text{V.}\quad & d\cdot(xx\,d\zeta)=\frac{2gNx\,dt^2}{v}\left(\frac{y}{zz}-\frac{z}{yy}\right),\\
\text{VI.}\quad & d\cdot(yy\,d\eta)=\frac{2gLy\,dt^2}{v}\left(\frac{z}{xx}-\frac{x}{zz}\right),\\
\text{VII.}\quad & d\cdot(zz\,d\vartheta)=\frac{2gMz\,dt^2}{v}\left(\frac{x}{yy}-\frac{y}{xx}\right),
\end{aligned}$$

at v ita per x, y, z determinatur, ut sit

$$v=\frac{2xyz}{\sqrt{(2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4)}}\,.$$

182. **Corollarium 2.** Si ex illis aequationibus eliminemus dt^2, obtinebimus

$$\frac{2g\,dt^2}{v} = \frac{yyzz\,d\cdot(xx\,d\zeta)}{Nx(y^3-z^3)} = \frac{xxzz\,d\cdot(yy\,d\eta)}{Ly(z^3-x^3)} = \frac{xxyy\,d\cdot(zz\,d\vartheta)}{Mz(x^3-y^3)}\ .$$

Quin etiam in plures alias formas has aequationes transfundere licet, neque tamen methodus patet hinc novam aequationem integralem eliciendi.

183. **Scholion 1.** Hoc igitur problema, cui vera determinatio omnium motuum coelestium innititur, vires analyseos superat, etiamsi corpora se mutuo attrahentia sphaerica et in eodem plano moveri assumsimus; quae ergo conditiones, si secus se haberent, atque imprimis si numerus corporum ternarium excederet, multo minus de solutione cogitare liceret; ex quo intelligitur in subsidium Astronomiae ingentem analyseos promotionem desiderari. Neque etiam in genere ulla via ad approximationes patet, quibus uti non licet, nisi vel unum trium corporum sit valde parvum, vel vis inde ad motum reliquorum perturbandum nata fuerit vehementer exigua. Si enim corpus N evanescat, nostrae aequationes tantum ad has binas redeunt:

$$LMxx\,d\zeta = C\,dt \quad \text{et} \quad LM\left(dx^2+xx\,d\zeta^2\right) = 4g(L+M)\,dt^2\left(E+\frac{LM}{x}\right)\ ,$$

quibus motus duorum corporum continetur, unde si massa N sit valde parva, hinc idoneae approximationes peti poterunt. Deinde si corpus N sit infinite remotum, ut distantiae y et z fiant infinitae, aequationum differentio-differentialium primo expositarum binae priores iam totum negotium conficiunt abeuntes in has formas:

$$2\,dx\,d\zeta + x\,dd\zeta = 0 \quad \text{et} \quad ddx - x\,d\zeta^2 = -\frac{2g(L+M)\,dt^2}{xx}\ ,$$

ita ut reliquas ne in computum quidem duci necesse sit, qui casus ex posterioribus aequationibus minus perspicitur, cum ibi reliquae quantitates praeter necessitatem calculo sint immixtae. Quare si in mundo eiusmodi casus existeret, ut trium corporum se mutuo attrahentium neque unius massa sit prae reliquis valde parva, neque unius distantia a reliquis vehementer magna, fateri cogimur talem motum nobis fore imperscrutabilem: verum commode in mundo usu venit, ut huiusmodi casus a nobis nusquam deprehendatur, qua in re nostrae imbecillitati non parum consultum videtur. Quamobrem contenti simus in methodum inquisivisse, cuius beneficio proxime saltem motum trium corporum determinare valeamus, quando inter terna corpora se invicem attrahentia unum reperitur, cuius vis in reliqua, sive ob massae parvitatem, sive ob eius enormem distantiam, quasi evanescat, quippe qui solus casus relinquitur, in quo vires nostras experiri liceat.

184. **Scholion 2.** Cum igitur tam mundus alios motus non offerat, quam analysis ad alios investigandos non sit apta, nisi qui non multum a ratione motus in sectione conica recedant, omnem operam in inventione aberrationum ab hac motus lege collocari conveniet. Hanc ob rem motum regularem vocabimus, qui

leges motus, quibus duo tantum corpora sphaerica se mutuo attrahentia ferri sunt inventa, perfecte sequitur, cuiusmodi motus, etiamsi forte nusquam in mundo locum habeat, tamen, quoniam discrimen nusquam est valde magnum, aberrationes seu perturbationes motus regularis per approximationes definire conabimur. In proposito igitur problemate motum trium corporum L, M, N ita comparatum assumamus, ut bina M et N respectu tertii L motu fere regulari revolvantur, unde hoc commodi consequimur, ut, dum perturbationes alterius definire studemus, alterius motum tanquam regularem spectare queamus; cum enim perturbationes ab hoc in illo productae per se sint valde parvae, sive hoc posterius regulariter moveatur, sive parumper a regularitate recedat, nullum discrimen in perturbatione illius orietur. Ita quando in perturbationes motus lunae a sole oriundas inquirere volumus, motum solis respectu terrae tanquam regularem spectabimus; ac vicissim, si errores in motu terrae ab actione lunae nati definiri debeant, qui terra ad quietem redacta in motum solis transferuntur, motum lunae tanquam regularem spectare licebit. Cum igitur propositis tribus corporibus unum semper in quiete considerari possit, problema ita tractabimus, ut binorum reliquorum unum motu regulari ferri censeatur, pro alteroque tantum perturbationes investigentur. Quod si praestiterimus, non amplius difficile erit, problemati pro corporibus quotcunque propositis satisfacere, quia enim perturbationes satis sunt exiguae, quantae a singulis seorsim producantur, assignavisse sufficiat, quae deinceps coniunctae omnes perturbationes ab omnibus simul ortas exhibebunt.

185. **Problema.** Si corpus N circa corpus L, quod in quiete spectamus (Fig. 15), motu regulari feratur, tum vero in eodem plano corpus M circa L ita moveatur, ut eius motus ab actione corporis N perturbetur, huius motus perturbationes assignare.

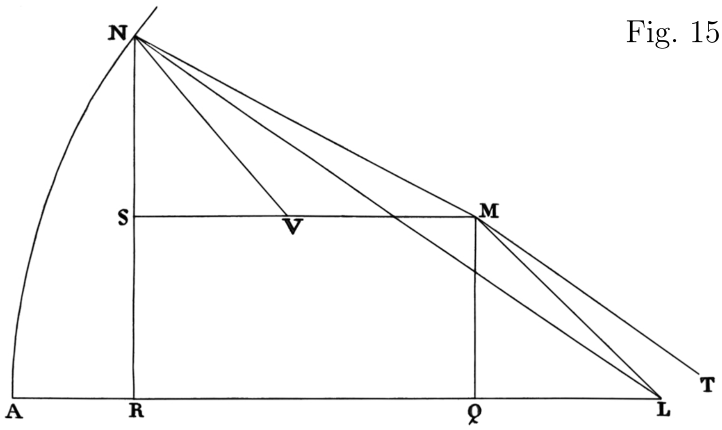


Fig. 15

Solutio. Cum hic ad motum respectivum attendamus, corpore L in quiete spectato, ductis rectis LM, LN et MN, attractio mutua corporum L et M est $= \frac{L \cdot M}{LM^2}$, corporum L et N $= \frac{L \cdot N}{LN^2}$, atque corporum M et N $= \frac{M \cdot N}{MN^2}$. Cum nunc corpus L sollicitetur secundum LM vi $= \frac{L \cdot M}{LM^2}$, et secundum LN vi $= \frac{L \cdot N}{LN^2}$, hae vires in sensum oppositum et in ratione massarum mutatae binis reliquis corporibus applicari debent. Ductis ergo rectis MT et NV ipsis NL et ML parallelis, corpus M praeter vires secundum $ML = \frac{L\cdot M}{LM^2}$ et secundum $MN = \frac{M\cdot N}{MN^2}$ sollicitari censendum est viribus secundum $ML = \frac{M\cdot M}{LM^2}$ et secundum $MT = \frac{M\cdot N}{LN^2}$; at corpus N praeter vires secundum $NL = \frac{L\cdot N}{LN^2}$ et secundum $NM = \frac{M\cdot N}{MN^2}$, a viribus secundum $NL = \frac{N\cdot N}{LN^2}$ et secundum $NV = \frac{M\cdot N}{LM^2}$. Sumtis nunc duabus directionibus fixis altera LA, altera ad hanc normali, corpus M sollicitabitur

$$\text{secundum } LQ \quad \text{vi} = -\frac{M(L+M)LQ}{LM^3} + \frac{M\cdot N\cdot MS}{MN^3} - \frac{M\cdot N\cdot LR}{LN^3}\,,$$
$$\text{secundum } QM \quad \text{vi} = -\frac{M(L+M)QM}{LM^3} + \frac{M\cdot N\cdot SN}{MN^3} - \frac{M\cdot N\cdot RN}{LN^3}\,.$$

Corpus vero N sollicitabitur

$$\text{secundum } LR \quad \text{vi} = -\frac{N(L+N)LR}{LN^3} - \frac{M\cdot N\cdot MS}{MN^3} - \frac{M\cdot N\cdot LQ}{LM^3}\,,$$
$$\text{secundum } RN \quad \text{vi} = -\frac{N(L+N)RN}{LN^3} - \frac{M\cdot N\cdot SN}{MN^3} - \frac{M\cdot N\cdot QN}{LM^3}\,.$$

Ponamus iam coordinatas pro corpore M

$$LQ = x\,,\quad QM = y\,,\quad LM = \surd(xx+yy) = v\,,$$

pro corpore N vero

$$LR = \mathfrak{x}\,,\quad RN = \mathfrak{y}\,,\quad LN = \surd(\mathfrak{x}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = \mathfrak{v}\,,$$

erit $MN = \surd\big((\mathfrak{x}-x)^2+(\mathfrak{y}-y)^2\big) = w$, et aequationes differentio-differentiales motum utriusque corporis exprimentes, posito elemento temporis dt constante, erunt

$$\text{I.}\quad ddx = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+M)x}{v^3} + \frac{N(\mathfrak{x}-x)}{w^3} - \frac{N\mathfrak{x}}{\mathfrak{v}^3}\right),$$
$$\text{II.}\quad ddy = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+M)y}{v^3} + \frac{N(\mathfrak{y}-y)}{w^3} - \frac{N\mathfrak{y}}{\mathfrak{v}^3}\right),$$
$$\text{III.}\quad dd\mathfrak{x} = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+N)\mathfrak{x}}{\mathfrak{v}^3} - \frac{M(\mathfrak{x}-x)}{w^3} - \frac{Mx}{v^3}\right),$$
$$\text{IV.}\quad dd\mathfrak{y} = 2g\,dt^2\left(-\frac{(L+N)\mathfrak{y}}{\mathfrak{v}^3} - \frac{M(\mathfrak{y}-y)}{w^3} - \frac{My}{v^3}\right).$$

Cum autem motus corporis M non adeo perturbari sumatur, hypothesis nostra exigit, ut termini $\frac{N}{ww}$ et $\frac{N}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$ sint prae $\frac{L+M}{vv}$ valde parvi, atque eodem iure termini

$\frac{M}{ww}$ et $\frac{M}{vv}$ prae $\frac{L+N}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$ valde exigui esse debent; quia alioquin determinatio motus vires calculi superaret.

Cum igitur motus corporis N pro cognito habeatur, quantitates $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{v}$ tanquam functiones cognitae temporis t spectari possunt, sicque tantum duae aequationes priores relinquuntur, ex quibus colligimus

$$y\,ddx - x\,ddy = 2g\,dt^2\left(\frac{N(\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y})}{w^3} - \frac{N(\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y})}{\mathfrak{v}^3}\right) ,$$

seu

$$= 2gN(\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y})\,dt^2\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{\mathfrak{v}^3}\right) ,$$

et

$$2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy = 4g\,dt^2\Bigg(-\frac{(L+M)\,dv}{vv} - \frac{Nv\,dv}{w^3} + N(\mathfrak{x}\,dx + \mathfrak{y}\,dy)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{\mathfrak{v}^3}\right)\Bigg) .$$

Ponamus nunc pro motu corporis M angulum $ALM = \varphi$, distantia existente $LM = v$, ut sit $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$, hincque $y\,dx - x\,dy = -vv\,d\varphi$ et $dx^2 + dy^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2$. Porro pro motu corporis N statuatur distantia $LN = u$, quae hactenus erat $= \mathfrak{v}$, et angulus $ALN = \vartheta$, ut sit $\mathfrak{x} = u\cos\vartheta$ et $\mathfrak{y} = u\sin\vartheta$, hincque

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\left((u\cos\vartheta - v\cos\varphi)^2 + (u\sin\vartheta - v\sin\varphi)^2\right)} \\ &= \sqrt{(uu - 2uv\cos(\varphi - \vartheta) + vv)} \end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y} = uv\sin(\varphi - \vartheta) ,$$

atque

$$\mathfrak{x}\,dx + \mathfrak{y}\,dy = u\,dv\cos(\varphi - \vartheta) - uv\,d\varphi\sin(\varphi - \vartheta) .$$

Unde nostrae aequationes erunt

$$d\cdot(vv\,d\varphi) = -2gNuv\,dt^2\sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) ,$$

$$d\cdot\left(dv^2 + vv\,d\varphi^2\right) = 4g\,dt^2\Bigg(-\frac{(L+M)\,dv}{vv} - \frac{Nv\,dv}{w^3} + N\Big(u\,dv\cos(\varphi - \vartheta) - uv\,d\varphi\sin(\varphi - \vartheta)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Bigg) ,$$

seu si differentialia secundi gradus non reformidemus,

$$2\,dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = -2gNu\,dt^2\sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$

et[53]

$$ddv + v\,d\varphi^2 = -2g(L+M)\frac{dt^2}{vv} - 2gN\,dt^2\left(\frac{v}{w^3} - u\cos(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right)\ ,$$

ubi u et ϑ tanquam quantitates per t datae sunt spectandae, terminique per N affecti tanquam valde parvi.

Verum illae aequationes ad integrationem magis sunt praeparatae, et posterior, ob

$$w\,dw = v\,dv + u\,du - u\,dv\cos(\varphi-\vartheta) - v\,du\cos(\varphi-\vartheta) + uv(d\varphi - d\vartheta)\sin(\varphi-\vartheta)\ ,$$

transit in hanc formam:

$$\begin{aligned} &d\cdot\left(dv^2 + vv\,d\varphi^2\right)\\ &\quad= -4g(L+M)\,dt^2\,\frac{dv}{vv}\\ &\qquad - 4gN\,dt^2\left(\frac{dv\cos(\varphi-\vartheta) - v\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{uu}\right)\\ &\qquad + 4gN\,dt^2\left(\frac{u\,du - v\,du\cos(\varphi-\vartheta) - uv\,d\vartheta\sin(\varphi-\vartheta) - w\,dw}{w^3}\right), \end{aligned}$$

unde integrando quatenus licet obtinemus[54]

$$\begin{aligned} &dv^2 + vv\,d\varphi^2\\ &\quad= 4g(L+M)\,dt^2\left(D+\frac{1}{v}\right)\\ &\qquad - 4gN\,dt^2\left(\frac{v\cos(\varphi-\vartheta)}{uu} - \int\frac{v\,d\vartheta\sin(\varphi-\vartheta)}{uu} + 2\int\frac{v\,du\cos(\varphi-\vartheta)}{u^3}\right)\\ &\qquad + 4gN\,dt^2\left(\frac{1}{w} + \int\frac{du\ (u - v\cos(\varphi-\vartheta))}{w^3} - \int\frac{uv\,d\vartheta\sin(\varphi-\vartheta)}{w^3}\right)\ , \end{aligned}$$

sive[55]

$$\begin{aligned} dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 4g(L+M)\,dt^2&\left(D+\frac{1}{v}\right)\\ &+ 4gN\,dt^2\left(\frac{1}{w} - \frac{v\cos(\varphi-\vartheta)}{uu}\right)\\ &+ 4gN\,dt^2\int du\left(\frac{u - v\cos(\varphi-\vartheta)}{w^3} - \frac{2v\cos(\varphi-\vartheta)}{u^3}\right)\\ &- 4gN\,dt^2\int uv\,d\vartheta\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta)\ . \end{aligned}$$

53 Editio princeps: $ddv - v\,d\varphi^2$ loco $ddv + v\,d\varphi^2$.
54 Editio princeps: $(u + v\cos(\varphi-\vartheta))$ loco $(u - v\cos(\varphi-\vartheta))$.
55 Editio princeps: $uu\,d\vartheta$ loco $uv\,d\vartheta$.

Prior vero aequatio per $2vv\,d\varphi$ multiplicata et integrata dat

$$v^4\,d\varphi^2 = 4g(L+M)C\,dt^2 - 4gN\,dt^2 \int uv^3\,d\varphi \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta)\,.$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\begin{aligned} \int uv^3\,d\varphi \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta) &= P\,, \\ \int uv\,d\vartheta \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta) &= Q\,, \\ \int du \left(\frac{u - v\cos(\varphi-\vartheta)}{w^3} - \frac{2v\cos(\varphi-\vartheta)}{u^3}\right) &= R\,, \end{aligned}$$

ut habeamus has aequationes:

$$\begin{aligned} v^4\,d\varphi^2 &= 4g\,dt^2 \Big(C(L+M) - NP\Big) \\ dv^2 + vv\,d\varphi^2 &= 4g\,dt^2 \bigg(D(L+M) + \frac{L+M}{v} + \frac{N}{w} \\ &\qquad\qquad - \frac{Nv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu} + NR - NQ\bigg)\,, \end{aligned}$$

unde eliminando $4g\,dt^2$ nanciscimur

$$\begin{aligned} dv^2 \Big(C(L+M) - NP\Big) = v^4\,d\varphi^2 \bigg(D(L+M) + \frac{L+M}{v} + \frac{N}{w} - \frac{Nv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu} \\ - NQ + NR - \frac{C(L+M)}{vv} + \frac{NP}{vv}\bigg). \end{aligned}$$

Statuamus porro $\dfrac{N}{L+M} = n$, fietque

$$\frac{dv\,\sqrt{(C-nP)}}{vv} = d\varphi\,\sqrt{\left(D + \frac{1}{v} + \frac{n}{w} - \frac{nv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu} - nQ + nR - \frac{C}{vv} + \frac{nP}{vv}\right)}$$

et

$$vv\,d\varphi = 2\,dt\,\sqrt{g(L+M)(C-nP)}\,,$$

ubi termini littera n affecti ut minimi spectantur. Illa autem aequatio etiam hoc modo exhiberi potest:

$$\begin{aligned} \frac{dv\,\sqrt{(C-nP)}}{vv} = d\varphi\,\sqrt{\bigg(D + \frac{1}{v} - \frac{C}{vv} - 2n\int\frac{P\,dv}{v^3} - n\int\frac{v\,dv}{w^3} \\ + n\int u\,dv\cos(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\bigg)}\,. \end{aligned}$$

Ponatur $v = \dfrac{p}{1+q\cos s}$ et $C = \dfrac{f}{2}$ atque $D = \dfrac{kk-1}{2f}$, fietque[56]

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{npp\cos(\varphi-\vartheta)}{f(1-qq)uu} + \frac{2nP}{fp}$$

et

$$\frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} - \frac{2np\cos(\varphi-\vartheta)}{f(1-qq)uu} + \frac{2n}{fw} - \frac{2nQ}{f} + \frac{2nR}{f} + \frac{2nP(1+qq)}{fpp}$$

et

$$\frac{dv\sqrt{(f-2nP)}}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(f-2nP+\frac{2np^3\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-qq)(1+q\cos s)uu}\right)}\ ,$$

seu

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1+\frac{2npp\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-qq)(1+q\cos s)uu}\right)}\ .$$

Vel si nullam approximationem admittamus, erit

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1}{f} \quad + \frac{npp\cos(\varphi-\vartheta)}{f(1-qq)uu} + \frac{2nP}{fp}\ ,\\ \frac{qq}{pp} &= \frac{kk}{ff} + \frac{2n}{fw} - \frac{2nQ}{f} + \frac{2nR}{f} - \frac{3np\cos(\varphi-\vartheta)}{f(1-qq)uu}\\ &\qquad + \frac{npp\cos(\varphi-\vartheta)}{ff(1-qq)uu} + \frac{2nP}{ffp} + \frac{2nPqq}{fpp}\ ,\end{aligned}$$

hincque

$$\frac{dv\sqrt{(f-2nP)}}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(f-2nP+\frac{2np^3\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-qq)(1+q\cos s)uu}\right)}\ ,$$

seu

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1+\frac{2np^3\cos(\varphi-\vartheta)}{(f-2nP)(1-qq)(1+q\cos s)uu}\right)}\ .$$

Est autem

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} - \frac{(p\,dq-q\,dp)}{pp}\cos s + \frac{q\,ds\sin s}{p}\ .$$

Cum nunc sint p et q proxime constantes, erit

$$\begin{aligned}\frac{dp}{pp} &= \frac{nf(d\varphi-d\vartheta)\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu} + \frac{2nf\,du\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3}\\ &\quad - \frac{2nuv^3\,d\varphi}{ff}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta)\end{aligned}$$

56 Recte: $\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{np\cos(\varphi-\vartheta)}{uu} - \frac{2nP}{fp}$.

et[57]

$$\begin{aligned}\frac{2q}{p}\cdot\frac{(p\,dq-q\,dp)}{pp} = &-\frac{2n}{fw^3}\Big(v\,dv-u\,dv\cos(\varphi-\vartheta)+uv\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)\\ &\qquad -\frac{(1+kk)uv\,d\varphi}{(1+k\cos s)^2}\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\\ &-\frac{2n(1+kk)v\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{f(1+k\cos s)^2uu}\\ &+\frac{2nv\,d\vartheta\sin(\varphi-\vartheta)}{fuu}-\frac{4nv\,du\cos(\varphi-\vartheta)}{fu^3}\\ &+\frac{2n(d\varphi-d\vartheta)\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{4n\,du\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3}\,,\end{aligned}$$

quibus valoribus substitutis, ob $dv=\dfrac{kvv\,d\varphi\sin s}{f}$ proxime, fit

$$\begin{aligned}\frac{dv}{vv} = &\frac{q\,ds\sin s}{p}+\frac{nv^3\,d\varphi\sin s\cos s}{fw^3}\\ &-\frac{nuv^3\,d\varphi\sin s}{ffw^3}\Big(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)\\ &\qquad +k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\Big)\\ &+\frac{nv^3\,d\varphi\sin^2 s\sin(\varphi-\vartheta)}{ff(1-kk)uu}\big(3+3k\cos s-2kk+kk\cos^2 s-k^3\cos s\big)\\ &-\frac{nv\,d\vartheta\sin^2 s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{2nv\,du\sin^2 s\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3}\,.\end{aligned}$$

Ex quibus colligimus

$$\begin{aligned}\frac{q(d\varphi-ds)}{p} = &\frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{fw^3}\\ &-\frac{nuv^3\,d\varphi}{ffw^3}\Big(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)\\ &\qquad +k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\Big)\\ &-\frac{nkv\,d\varphi\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}\\ &+\frac{nv^3\,d\varphi\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{ff(1-kk)uu}\big(3+3k\cos s-2kk+kk\cos^2 s-k^3\cos s\big)\\ &-\frac{nv\,d\vartheta\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{2nv\,du\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3}\,,\end{aligned}$$

57 Editio princeps: $-\frac{2n}{fu^3}$ loco $-\frac{2n}{fw^3}$.

quae formula ita repraesentari potest:

$$\frac{q(d\varphi-ds)}{p}=\frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{fw^3}-n\,d\cdot\left(\frac{v\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}\right)$$
$$-\frac{nuv^3\,d\varphi}{ff}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)$$
$$+k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\Big)\,,$$

ita ut pro motu lineae absidum sit

$$\varphi-s=\text{Const.}-\frac{nfv\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{k(1-kk)uu}+\frac{n}{k}\int\frac{v^3\,d\varphi\cos s}{w^3}$$
$$-\frac{n}{fk}\int uv^3\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)$$
$$+k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\Big)\,,$$

in quibus terminis minimis est $v=\dfrac{f}{1+k\cos s}$.
Denique quo haec ad tempus revocari queant, erit

$$vv\,d\varphi=dt\sqrt{2g(L+M)(f-2nP)}\,,$$

ita ut sit proxime

$$vv\,d\varphi=dt\sqrt{2fg(L+M)}\quad\text{et}\quad ds=d\varphi\,.$$

186. **Corollarium 1.** Si corpus N motu regulari circa L circumferatur in orbita, cuius semiparameter $=b$, excentricitas $=e$ et anomalia vera $=r$, ut sit $u=\dfrac{b}{1+e\cos r}$, erit

$$d\vartheta=dr\,,\quad uu\,d\vartheta=dt\sqrt{2bg(L+N)}\quad\text{et}\quad du=\frac{euu\,d\vartheta\sin r}{b}\,.$$

Unde posito $\sqrt{\dfrac{b(L+N)}{f(L+M)}}=m$, erit proxime $uu\,d\vartheta=mvv\,d\varphi$, seu

$$d\vartheta=\frac{mvv\,d\varphi}{uu}=dr\quad\text{et}\quad du=\frac{mevv\,d\varphi\sin r}{b}\,,$$

ita ut in superioribus formulis fractione n affectis omnia elementa ad $d\varphi$ reducantur.

187. **Corollarium 2.** His differentialibus introductis etiam differentiale dw ad $d\varphi$ perducemus, obtinebimus enim ob $dv=\dfrac{kvv\,d\varphi\sin s}{f}$ proxime

$$w\,dw=\frac{kvv\,d\varphi\sin s}{f}\big(v-u\cos(\varphi-\vartheta)\big)$$
$$+\frac{mevv\,d\varphi\sin r}{b}\big(u-v\cos(\varphi-\vartheta)\big)+\frac{v\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{u}\big(uu-mvv\big)\,.$$

188. **Corollarium 3.** Ex relatione cognita, quae inter differentialia $d\varphi$, $d\vartheta$, ds, dr, dv et du locum habet, colligi poterunt valores formularum integralium P, Q et R, unde semiparameter variabilis p cum excentricitate q accuratius definientur.

189. **Scholion 1.** Haec solutio per approximationes instituenda isti innititur fundamento, quod termini littera n affecti sint valde parvi; quod duplici modo evenire potest, vel si ipse numerus n fuerit minimus, dum inter quantitates v, u, w non enormis inaequalitas versatur, vel si saltem termini $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ prae $\frac{1}{v}$ sint quam minimi, quod fieri potest, etiamsi n sit numerus valde magnus. Ita si L sit terra, M luna, et N sol, fractio $\frac{N}{L+M} = n$ quidem est maxima. Verum distantia terrae a sole u tantopere superat distantiam lunae a terra v, ut termini $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ nihilominus sint perquam exigui prae $\frac{1}{v}$. At si L sit terra, M sol et N luna, ut perturbationes motus solis apparentis a luna ortae investigentur, erit n fractio minima, et distantiae v et w praemagnae respectu distantiae u; interim tamen quantitas $\frac{n}{u}$ prae $\frac{1}{v}$ tanquam evanescens est spectanda, hocque casu terminus $\frac{1}{w}$ prae $\frac{1}{u}$ reiici poterit. Quodsi porro L sit sol, M vero et N duo quicunque planetae primarii, erit n fractio minima, et quia distantiae u, v, w non adeo sunt inaequales, ut una prae reliquis contemni queat, termini $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ utique prae $\frac{1}{v}$ reiici poterunt.

190. **Scholion 2.** Terminos autem $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ tam parvos prae $\frac{1}{v}$ esse oportet, ut termini inde nati per nn affecti nullius futuri essent momenti, quemadmodum etiam in solutione hic exposita omnes terminos, qui altiores ipsius n potestates essent complexuri, reiecimus. Sin autem etiam termini per nn affecti attentionem mereantur, in solutione quidem omnia manerent, donec ad differentialia quantitatum p et q eruenda descendimus, quae accuratius usque ad terminos per nn affectos evolvi deberent, hoc autem modo in ambages inextricabiles incideremus. Verum hic labor etiam tum necessarius videtur, quando termini per nn affecti per se spectati sunt minimi, quoniam inde per integrationem interdum termini multo maiores nasci possunt; ita si in formula differentiali occurrat huiusmodi terminus $nn\,d\varphi\cos(\alpha + n\varphi)$, is quidem ob factorem nn elidendus videri posset, sed per integrationem inde emergit terminus $n\sin(\alpha + n\varphi)$ ad eum ordinem pertinens, quem minime negligere volebamus. Ex quo perspicuum est hunc modum approximandi, quatenus huiusmodi termini in ordinibus negligendis occurrunt, maxime esse lubricum, propterea quod termini haud levis momenti excludantur. Atque hoc potissimum in motus lunae investigatione observandum est, ubi ob talem causam eiusmodi termini ingrediuntur, quorum valores a terminis quadrato nn affectis vel adeo altioribus potestatibus pendent, qui cum nonnisi difficillime per theoriam eruantur, expedit eorum valores ex observationibus definire.

191. **Scholion 3.** Formulae nostrae pro p et q inventae ideo non parum intricatae prodierunt, quod in membro $\frac{nv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu}$ naturam quantitatis v spectavimus, eiusque loco valorem $\frac{p}{1+q\cos s}$ substituimus, quod cum in formulis Q et R non fecerimus, etiamsi et hi ab v pendeant, etiam ibi pari iure illi substitutioni supersedere poterimus. Statuamus ergo brevitatis gratia

$$\frac{1}{w}-\frac{v\cos(\varphi-\vartheta)}{uu}-Q+R=S\,,$$

et posito

$$C=\frac{f}{2}\quad\text{et}\quad D=\frac{kk-1}{2f}\,,$$

sequentes aequationes resolvendae proponuntur:

$$vv\,d\varphi=dt\,\sqrt{2g(L+M)(f-2nP)}$$

et[58]

$$\frac{dv\,\sqrt{(f-2nP)}}{vv}=d\varphi\,\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{v}+2nS-\frac{f}{vv}+\frac{2nP}{vv}\right)}\,.$$

Statuamus nunc $v=\frac{p}{1+q\cos s}$, et haec formula signo radicali implicata fit

$$\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{p}+2nS-\frac{f}{pp}+\frac{2nP}{pp}+\frac{2q\cos s}{p}$$
$$-\frac{2fq\cos s}{pp}+\frac{4nPq\cos s}{pp}-\frac{fqq\cos^2 s}{pp}+\frac{2nPqq\cos^2 s}{pp}\,.$$

Evanescant primo termini per $\cos s$ affecti, eritque

$$1-\frac{f}{p}+\frac{2nP}{p}=0\,,\quad\text{seu}\quad p=f-2nP\,;$$

hoc modo illa formula abit in

$$\frac{kk-1}{f}+\frac{1}{p}+2nS-\frac{qq}{p}\cos^2 s\,.$$

---

58 EULER ad marginem: Si excentricitas k evanescat, alio modo calculum tractari oportet; erit enim

$$\frac{1}{v}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\eta+\mathfrak{C}\cos^2\eta+\text{etc.}\quad\text{et}\quad\frac{dv}{vv}=d\varphi\,\sqrt{\left(A+B\cos\eta+C\cos^2\eta+D\cos^3\eta+\text{etc.}\right)}\,.$$

Cum nunc dv factorem obtineat $\sin\eta$, necesse est, ut sit $A\pm B+C\pm D+E\pm\text{etc.}=0$, hinc $A+C+E+\text{etc.}=0$ et $B+D+\text{etc.}=0$. Simili modo poni debet $P=\ldots+\cos\eta+\cos^2\eta+\ldots$ et $S=\ldots+\cos\eta+\cos^2\eta\ldots$. Haec methodus aptior videtur illa, qua omnes termini ad sinus vel cosinus angulorum multiplorum ipsius $\eta=\varphi-\vartheta$ reducuntur.

Statuatur ergo $\frac{qq}{p} = \frac{kk-1}{f} + \frac{1}{p} + 2nS$, eritque

$$\frac{dv\,\sqrt{p}}{vv} = \frac{q\,d\varphi \sin s}{\sqrt{p}}\,, \quad \text{seu} \quad \frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi \sin s}{p}\,.$$

Cum ergo sit

$$p = f - 2nP \quad \text{et} \quad qq = 1 + \frac{(kk-1)p}{f} + 2nSp\,,$$

erit differentiando

$$dp = -2n\,dP \quad \text{et} \quad 2q\,dq = \frac{(kk-1)\,dp}{f} + 2nS\,dp + 2np\,dS\,,$$

hincque

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} + \frac{q\,dp\cos s}{pp} - \frac{(kk-1)\,dp\cos s}{2fpq} - \frac{nS\,dp\cos s}{pq} - \frac{n\,dS\cos s}{q} + \frac{q\,ds\sin s}{p}\,,$$

unde colligitur

$$\frac{q(d\varphi - ds)\sin s}{p} = \frac{dp}{p}\left(\frac{1}{v} - \frac{(kk-1)\cos s}{2fq} - \frac{nS\cos s}{q}\right) - \frac{n\,dS\cos s}{q}\,,$$

seu

$$\frac{q(d\varphi - ds)\sin s}{p} = \frac{dp\,(\cos s + 2q + qq\cos s)}{2ppq} - \frac{n\,dS\cos s}{q}\,.$$

Est vero

$$dS = \frac{-v\,dv + u\,dv\cos(\varphi-\vartheta) - uv\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{w^3} - \frac{dv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu} + \frac{v\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{uu}\,,$$

seu

$$dS = -\frac{qvv\,d\varphi\sin s}{pw^3}\Big(v - u\cos(\varphi-\vartheta)\Big) - \frac{uv\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{w^3} - \frac{qvv\,d\varphi\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{puu} + \frac{v\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{uu}\,,$$

quo valore substituto orietur[59]

$$\frac{q(d\varphi - ds)\sin s}{p} = \frac{nv^3\,d\varphi\sin s\cos s}{pw^3} - \frac{nuvv\,d\varphi\sin s\cos s\cos(\varphi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) + \frac{nuv\,d\varphi\sin^2 s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1+q\cos s)^2}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)(2+q\cos s)\,,$$

59 Editio princeps:

$$\frac{q(d\varphi - ds)\sin s}{p} = \cdots - \frac{nuv\,d\varphi\sin^2 s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1+q\cos s)^2}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)(2+q\cos s)\,.$$

quae divisa per $\frac{q \sin s}{p}$ praebebit

$$d\varphi - ds = \frac{nvv\, d\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3} - u\cos s\cos(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) + \frac{(2+q\cos s)u\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right),$$

sive hoc modo

$$d\varphi - ds = \frac{nvv\, d\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3} - u\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\cos s\cos(\varphi-\vartheta) - \frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\right)\right),$$

ubi nullae plane approximationes sunt adhibitae. Tum vero erit

$$P = \int uv^3\, d\varphi \sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$$

et

$$S = -\int \frac{qv^3\, d\varphi \sin s}{pw^3} + \int \frac{quvv\, d\varphi \sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) - \int uv\, d\varphi \sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),$$

sive

$$S = -\int \frac{qv^3\, d\varphi \sin s}{pw^3} + \int \frac{uvv\, d\varphi}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(q\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - (1+q\cos s)\sin(\varphi-\vartheta)\Big),$$

vel etiam

$$S = -\int \frac{qv^3\, d\varphi \sin s}{pw^3} - \int \frac{uvv\, d\varphi}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(\sin(\varphi-\vartheta) + q\sin(\varphi-\vartheta-s)\Big).$$

Quibus valoribus integrabilibus definitis habebitur

$$p = f - 2nP\,, \quad q = \sqrt{\left(\frac{kkp}{f} + 1 - \frac{p}{f} + 2nSp\right)}$$

et

$$dt\sqrt{2g(L+M)(f-2nP)} = vv\,d\varphi = dt\sqrt{2gp(L+M)}\ ,$$

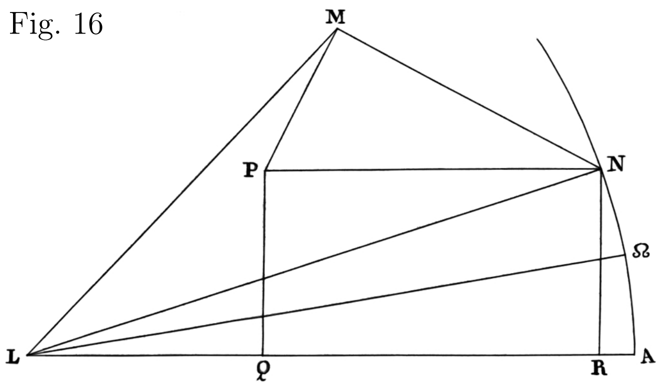
existente

$$v = \frac{p}{1+q\cos s}\ , \quad dv = \frac{qvv\,d\varphi\sin s}{p} \quad \text{et} \quad w = \sqrt{\big(vv-2vu\cos(\varphi-\vartheta)+uu\big)}\ .$$

Atque haec solutio praecedenti longe praeferenda videtur, cum quod nullis adhuc approximationibus sit restricta, tum vero quod eius forma simplicior reperiatur.

192. **Problema.** Si corpus N circa corpus L, quod in quiete spectamus (Fig. 16), motu regulari feratur, tum vero corpus M non in eodem plano circa L ita moveatur, ut eius motus ab actione corporis N perturbetur, definire has perturbationes.

Fig. 16



Solutio. Ex corpore M in planum orbitae a corpore N descriptae demittatur perpendiculum MP, et ex P ad rectam fixam LA agatur normalis PQ, vocenturque coordinatae pro corpore M, $LQ = x$, $QP = y$ et $PM = z$, sitque distantia $LM = v = \sqrt{(xx+yy+zz)}$. Tum vero pro corpore N sint coordinatae $LR = \mathfrak{x}$, $RN = \mathfrak{y}$ et distantia $LN = u$. Posito ergo angulo $ALN = \vartheta$, erit $\mathfrak{x} = u\cos\vartheta$ et $\mathfrak{y} = u\sin\vartheta$. Deinde ponatur distantia $MN = w$, ut sit $w = \sqrt{\big((\mathfrak{x}-x)^2+(\mathfrak{y}-y)^2+zz\big)}$. Iam secundum directiones ternarum coordinatarum vires corpus M sollicitantes resolvantur, et cum primo M ad L trahatur vi $= \dfrac{M(L+M)}{vv}$, hinc nascitur vis

$$\begin{aligned}
\text{secundum } LQ &= -\frac{M(L+M)x}{v^3}\ ,\\
\text{secundum } QP &= -\frac{M(L+M)y}{v^3}\ ,\\
\text{secundum } PM &= -\frac{M(L+M)z}{v^3}\ .
\end{aligned}$$

Deinde ad corpus N urgetur vi $= \frac{MN}{ww}$, unde nascitur vis

$$\begin{aligned}
\text{secundum } LQ \ &= \frac{MN(\mathfrak{x}-x)}{w^3}\,, \\
\text{secundum } QP \ &= \frac{MN(\mathfrak{y}-y)}{w^3}\,, \\
\text{secundum } PM &= -\frac{MNz}{w^3}\,.
\end{aligned}$$

Denique cum corpus L ad N sollicitetur vi $= \frac{LN}{uu}$, hac rite in M translata prodit vis

$$\text{secundum } LQ \ = -\frac{MN\mathfrak{x}}{u^3} \quad \text{et} \quad \text{secundum } QP = -\frac{MN\mathfrak{y}}{u^3}\,.$$

Ex his viribus formulae motum continentes ita se habebunt[60]:

$$\begin{aligned}
ddx &= -2g\,dt^2\left(\frac{(L+M)x}{v^3} - \frac{N(\mathfrak{x}-x)}{w^3} + \frac{N\mathfrak{x}}{u^3}\right), \\
ddy &= -2g\,dt^2\left(\frac{(L+M)y}{v^3} - \frac{N(\mathfrak{y}-y)}{w^3} + \frac{N\mathfrak{y}}{u^3}\right), \\
ddz &= -2g\,dt^2\left(\frac{(L+M)z}{v^3} + \frac{Nz}{w^3}\right).
\end{aligned}$$

Ponamus brevitatis gratia $\frac{N}{L+M} = n$, ut habeamus

$$\begin{aligned}
ddx &= -2g(L+M)\,dt^2\left(\frac{x}{v^3} + \frac{nx}{w^3} - n\mathfrak{x}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right), \\
ddy &= -2g(L+M)\,dt^2\left(\frac{y}{v^3} + \frac{ny}{w^3} - n\mathfrak{y}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right), \\
ddz &= -2g(L+M)\,dt^2\left(\frac{z}{v^3} + \frac{nz}{w^3}\right).
\end{aligned}$$

His cum solutione problematis § 169 comparatis, quod ibi erat L, hic nobis est $L+M$, ac praeterea

$$\begin{aligned}
X &= \frac{nx}{w^3} - nu\cos\vartheta\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right), \\
Y &= \frac{ny}{w^3} - nu\sin\vartheta\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right), \\
Z &= \frac{nz}{w^3}\,.
\end{aligned}$$

60 Editio princeps: $-\frac{Nz}{w^3}$ loco $+\frac{Nz}{w^3}$.

Sit nunc, solutionem secundum praecepta ibi data prosequendo, recta $L☊$ linea nodorum et ☊ nodus ascendens, ponaturque angulus $AL☊ = \psi$ et inclinatio praesens orbitae a corpore M descriptae ad planum orbitae $N = \omega$; tum vocetur angulus $☊LM = \sigma$, eritque

$$\begin{aligned} x &= v(\cos\sigma\cos\psi - \sin\sigma\sin\psi\cos\omega)\ , \\ y &= v(\cos\sigma\sin\psi + \sin\sigma\cos\psi\cos\omega)\ , \\ z &= v\sin\sigma\sin\omega\ \ , \end{aligned}$$

erit $d\omega = \dfrac{d\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}$, atque fiat $d\sigma + d\psi\cos\omega = d\varphi$, ut sit φ longitudo corporis M in sua orbita. Quibus positis erit

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2g(L+M)\,dt^2\left(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right)$$

et

$$v^4\,d\varphi^2\cos^2\omega = 4g(L+M)\,dt^2\int vv\,d\varphi\cos\omega(Xy - Yx)\ ,$$

atque[61]

$$d\psi = \frac{2g(L+M)\,dt^2\sin\sigma}{v\,d\varphi}(Y\cos\psi - X\sin\psi - Z\cot\omega)\ .$$

Cum autem sit

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= vv\,d\varphi\cos\omega\ , \\ x\,dz - z\,dx &= vv\,d\varphi\cos\psi\sin\omega\ , \\ y\,dz - z\,dy &= vv\,d\varphi\sin\psi\sin\omega\ , \end{aligned}$$

erit

$$dx = \frac{x\,dz}{z} - \frac{vv\,d\varphi\cos\psi\sin\omega}{z}\ , \qquad dy = \frac{y\,dz}{z} - \frac{vv\,d\varphi\sin\psi\sin\omega}{z}\ ,$$

et

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma\cos\sigma}{\sin\sigma} + \frac{d\psi\cos\sigma\cos\omega}{\sin\sigma} = \frac{dv}{v} + \frac{d\varphi\cos\sigma}{\sin\sigma}\ .$$

Pro reductione formularum datarum habemus primo

$$Xy - Yx = nu(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\ ,$$

seu

$$Xy - Yx = nuv\Big(\cos\sigma\sin(\vartheta-\psi) - \sin\sigma\cos\omega\cos(\vartheta-\psi)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\ .$$

61 Editio princeps: $+X\sin\psi$ loco $-X\sin\psi$.

Deinde est

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$
$$= \frac{nv\,dv}{w^3} - nu\,dv\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big(\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta) - \sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\Big)$$
$$+ nuv\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\Big)\,,$$

atque

$$v^4\,d\varphi^2\sin^2\omega = -4ng(L+M)\,dt^2\int uv^3\,d\varphi\sin\sigma\sin^2\omega\cos(\psi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\,,$$
$$v^4\,d\varphi^2\cos^2\omega = -4ng(L+M)\,dt^2\int uv^3\,d\varphi\cos\omega\Big(\cos\sigma\sin(\psi-\vartheta) + \sin\sigma\cos\omega\cos(\psi-\vartheta)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\,,$$

unde colligendo fit

$$v^4\,d\varphi^2 = -4ng(L+M)\,dt^2\int uv^3\,d\varphi\Big(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\,.$$

Ponamus iam brevitatis gratia

$$\int uv^3\,d\varphi\Big(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = P\,,$$
$$\int\frac{u\,dv}{w^3} - \int u\,dv\Big(\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta) - \sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$
$$+ \int uv\,d\varphi\Big(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\Big)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = Q\,,$$

eritque

$$v^4\,d\varphi^2 = 2g(L+M)\,dt^2\,(f - 2nP)$$

et

$$dv^2 + v^2\,d\varphi^2 = 2g(L+M)\,dt^2\left(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - 2nQ\right)\,,$$

unde fit

$$dv^2\,(f-2nP) = v^4\,d\varphi^2\left(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - 2nQ - \frac{f}{vv} + \frac{2nP}{vv}\right)$$

et

$$\frac{dv}{vv}\surd(f-2nP)=d\varphi\,\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{v}-2nQ-\frac{f}{vv}+\frac{2nP}{vv}\right)}\ .$$

Quare si ut supra ponamus $v=\frac{p}{1+q\cos s}$, obtinebimus

$$p=f-2nP\ ,\quad qq=1+\frac{(kk-1)p}{f}-2nQp\quad\text{et}\quad\frac{dv}{vv}=\frac{q\,d\varphi\sin s}{p}\ ,$$

ac porro

$$\frac{q(d\varphi-ds)\sin s}{p}=\frac{dp\,(\cos s+2q+qq\cos s)}{2ppq}+\frac{n\,dQ\cos s}{q}\ .$$

Postea vero reperimus

$$d\psi=\frac{2ng(L+M)u\,dt^2\sin\sigma\sin(\psi-\vartheta)}{v\,d\varphi}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\ ,$$

et ob $2g(L+M)\,dt^2=\frac{v^4\,d\varphi^2}{p}$ erit

$$d\psi=\frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\sin(\psi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$$

et

$$\frac{d\omega}{\sin\omega}=\frac{nuv^3\,d\varphi\cos\sigma\sin(\psi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\ .$$

Praeterea ex his valoribus nanciscimur

$$w=\ \surd\Big(vv+uu-2uv\big(\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta)-\sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)\big)\Big)\ .$$

Ponamus nunc brevitatis gratia

$$\begin{aligned}\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta)-\sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)&=\cos\lambda\ ,\\ \sin\sigma\cos(\psi-\vartheta)+\cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)&=\sin\mu\ ,\end{aligned}$$

ut sit[62]

$$\begin{aligned}P&=\int uv^3\,d\varphi\sin\mu\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\ ,\\ Q&=\int\frac{v\,dv}{w^3}+\int(uv\,d\varphi\sin\mu-u\,dv\cos\lambda)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\ .\end{aligned}$$

62 Editio princeps: $uu\,d\varphi\sin\mu$ loco $uv\,d\varphi\sin\mu$.

Cum iam sit $dp = -2nuv^3\,d\varphi\sin\mu\Big(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\Big)$, erit

$$\begin{aligned}\frac{q(d\varphi-ds)\sin s}{p} = &-\frac{nuv^3\,d\varphi\sin\mu(\cos s+2q+qq\cos s)}{ppq}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\\ &+\frac{nv\,dv\cos s}{qw^3}\\ &+\frac{nuv\,d\varphi\sin\mu\cos s}{q}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\\ &-\frac{nu\,dv\cos\lambda\cos s}{q}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),\end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned}\frac{q(d\varphi-ds)}{p} = &-\frac{nuv^3\,d\varphi\sin s\sin\mu}{pp}(2+q\cos s)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\\ &+\frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{pw^3}-\frac{nuvv\,d\varphi\cos s\cos\lambda}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),\end{aligned}$$

estque $w=\sqrt{(vv+uu-2uv\cos\lambda)}$, unde patet λ denotare angulum MLN. Cum ergo sit $d\sigma = d\varphi - d\psi\cos\omega$, erit

$$d\sigma = d\varphi - \frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$$

et

$$\begin{aligned}ds = d\varphi &- \frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{qw^3}+\frac{nuv^3\,d\varphi\sin s\sin\mu}{pq}(2+q\cos s)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\\ &+\frac{nuvv\,d\varphi\cos s\cos\lambda}{q}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right);\end{aligned}$$

tum vero ob $dv = \frac{qvv\,d\varphi\sin s}{p}$ fit

$$dQ = \frac{qv^3\,d\varphi\sin s}{pw^3}+uv\,d\varphi\left(\sin\mu-\frac{qv\cos\lambda\sin s}{p}\right)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),$$

unde per integrationem valor ipsius Q colligi debet. Denique pro ratione temporis habemus

$$dt\sqrt{2g(L+M)} = \frac{vv\,d\varphi}{\sqrt{p}}.$$

Quodsi iam motus corporis N sit regularis ponaturque $u = \frac{b}{1+e\cos r}$, erit

$$dt\sqrt{2g(L+N)} = \frac{uu\,d\vartheta}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad du = \frac{euu\,d\vartheta\sin r}{b};$$

quare, posito $\sqrt{\frac{L+M}{L+N}} = \frac{1}{m}$, fit

$$\frac{1}{m} = \frac{vv\,d\varphi\sqrt{b}}{uu\,d\vartheta\,\sqrt{p}}\,, \quad \text{hinc} \quad d\vartheta = \frac{mvv\,d\varphi\,\sqrt{b}}{uu\sqrt{p}}$$

et

$$du = \frac{mevv\,d\varphi\sin r\sqrt{b}}{b\sqrt{p}} = \frac{mevv\,d\varphi\sin r}{\sqrt{bp}} \quad \text{et} \quad dr = d\vartheta\,.$$

193. **Corollarium 1.** Cum termini littera n affecti sint minimi, primo his terminis penitus neglectis habebimus $p = f$, $q = k$, $ds = d\varphi$, $v = \frac{f}{1+k\cos s}$, $d\sigma = d\varphi$ et $d\psi = 0$, $d\omega = 0$, quibus valoribus corpori N motus regularis inducitur.

194. **Corollarium 2.** Deinde hi ipsi valores in terminis littera n affectis adhibeantur, ex quibus per integrationem primo quantitates P et Q, tum vero anguli s, σ, ψ et ω investigentur, quibus inventis erit accuratius $p = f - 2nP$ et $q = \sqrt{\left(\frac{kkp}{f} + \frac{2nP}{f} - 2nQp\right)}$, hincque $v = \frac{p}{1+q\cos s}$.

195. **Corollarium 3.** Porro hi valores correcti in formulas integrales introducantur, ac denuo tam quantitates P et Q quam anguli s, σ, ψ et ω quaerantur, qui valores cum vero sint propiores, etiam quantitates p, q et v indeque et w accuratius cognoscentur, unde similis operatio ad maiorem consensum cum veritate obtinendum suscipi poterit.

196. **Scholion 1.** Hinc intelligitur istum calculum ob formularum complicationem non solum esse operosissimum, sed etiam alia via singulas harum formularum partes integrandi non patet, nisi ut eae in simplices sinus vel cosinus evolvantur, et integrationes omnes ad huiusmodi terminos $\int d\varphi\cos\xi$ perducantur, ubi relatio inter $d\varphi$ et $d\xi$ proxime saltem detur. Quodsi enim fuerit $d\xi = d\varphi\,(\alpha + \beta\cos x + \text{etc.})$, ubi terminus α sequentes plurimum superet, ob

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\alpha} - \frac{\beta\,d\varphi\cos x}{\alpha} - \text{etc.}\,,$$

fit

$$\int d\varphi\cos\xi = \frac{1}{\alpha}\sin\xi - \frac{\beta}{\alpha}\int d\varphi\cos x\cos\xi\; - \text{etc.}\,,$$

at

$$\int d\varphi\cos x\cos\xi = \tfrac{1}{2}\int d\varphi\cos(\xi - x) + \tfrac{1}{2}\int d\varphi\cos(\xi + x)\,,$$

ita ut hic similis ratio integrationis sit adhibenda. Verum si eveniat, ut ipse numerus α sit perquam exiguus, hoc modo parum proficimus, hocque casu, si fuerit $x = \mathfrak{b}\xi + \mathfrak{B}$, integrari oporteret huiusmodi formulam

$$\frac{d\xi\cos\xi}{\alpha + \beta\cos(\mathfrak{b}\xi + \mathfrak{B}) + \gamma\cos(\mathfrak{c}\xi + \mathfrak{C}) + \text{etc.}}\,,$$

in qua coëfficientes β et γ prae α non sint exigui, sed potius valde magni. Quare si huiusmodi casus occurrant, ista consueta integrandi methodus minime ad scopum est accommodata. Praeterea quantitas irrationalis $w = \sqrt{(vv + uu - 2vu\cos\lambda)}$ maximum affert obstaculum, nisi insignis inaequalitas inter distantias v et u adsit, ita ut fractio $\frac{1}{w^3}$ facile in seriem valde convergentem transmutari possit. Ob has tantas difficultates optandum esset, ut Geometrae potius in alias methodos integrandi, quae non ad evolutionem in simplices sinus cosinusve adstringerentur, inquirerent, quod negotium si minus successerit, cognitio motuum coelestium non tam ob defectum Mechanicae, quam ob sufficientem Analyseos promotionem arceri est censenda.

197. **Scholion 2.** Quando autem resolutio formulae irrationalis w in seriem convergentem minus commode succedit, quemadmodum imprimis usu venit, quando perturbatio motus cuiusdam planetae ab actione alius planetae vel etiam cometae oriunda definiri debet, ob calculi defectum vix alia via relinquitur, nisi ut pro singulis temporis momentis perturbationes ex formulis differentialibus definiantur, ac deinceps in unam summam colligantur. Planeta scilicet vel cometa assumitur, nisi alter planeta adesset, sectionem conicam circa solem secundum regulas KEPLERIANAS esse descripturus, tum vero quasi singulis temporis momentis vis perturbans accedere concipitur, ubi quanta mutatio tam in ipsa orbita, quam in motu inde efficiatur, determinari oportet; id quod, quia tempus minimum accipiatur, ipsae formulae differentiales ostendent. Quodsi deinceps has perturbationes momentaneas in unam summam colligamus, evidens est conclusionem eo fore certiorem, quo minores fuerint temporis particulae, quamquam etiam hinc errores accumulari sunt censendi.

CAPUT VII

De perturbatione motus momentanea a vi quacunque sollicitante oriunda

198. **Problema.** Si corpus, dum circa aliud corpus motu regulari sectionem conicam esset descripturum, per exiguum temporis intervallum a corpore quodam tertio in orbitae suae plano sito sollicitetur, determinare motus perturbationem momentaneam (Fig. 17).

Solutio. Mente primum removeamus corpus perturbans et consideremus motum corporis M, qualis spectaretur ex corpore L, dum haec duo corpora L et M sola existerent ac se mutuo attraherent in ratione reciproca duplicata distantiarum. Describet ergo corpus M sectionem conicam BM, cuius alter focus erit in L, sitque B punctum orbitae ab L minime distans, seu absis ima, cuius longitudo a directione fixa LA computata, sit angulus $ALB = \alpha$. Orbitae vero vocetur semiparameter $= p$ et excentricitas $= q$, erit absidis imae distantia $LB = \frac{p}{1+q}$;

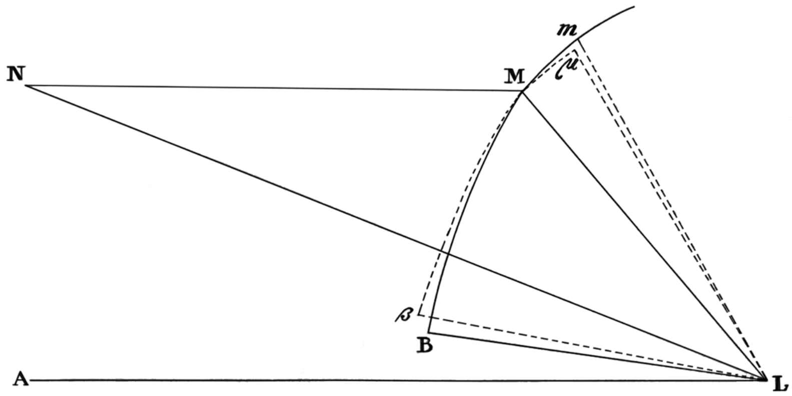


Fig. 17

absidis vero summae distantia ab $L = \frac{p}{1-q}$, unde fit axis transversus $= \frac{2p}{1-qq}$, cuius semissis $\frac{p}{1-qq}$ ponatur $= r$. Versetur iam corpus, cuius motum investigamus, in M, sitque angulus $BLM = s$, qui eius anomalia vera appellatur, et distantia $LM = v$, erit $v = \frac{p}{1+q\cos s}$; ipsa vero longitudo a directione fixa LA computata sit angulus $ALM = \varphi$, erit utique $\varphi = \alpha + s$ et $\varphi - s = \alpha$. Quodsi iam tempusculo dt corpus ab M in m progredi sumamus, et litterae L et M massas corporum denotent, erit

$$vv\,ds = dt\sqrt{2gp(L+M)}\,, \quad \text{ideoque} \quad dt\sqrt{2gp(L+M)} = \frac{pp\,ds}{(1+q\cos s)^2}\,,$$

ita ut sit angulus elementaris tempusculo dt confectus

$$MLm = d\varphi = ds = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}\,,$$

ubi quidem litterae L et M massas ita denotare sunt intelligendae, ut $\frac{L}{vv}$ exprimat vim absolutam, qua corpora in distantia $= v$ ad L attrahuntur, posita gravitate absoluta $= 1$ in superficie terrae, ubi grave uno minuto secundo per altitudinem $= g$ delabi assumitur, ut tempus t in minutis secundis exprimatur. At quantitates L et M etiam ex tempore periodico colligere licet. Cum enim quantitates p et q sint constantes, erit

$$\int \frac{ds}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} \arccos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1-qq)(1+q\cos s)}\,,$$

erit integrando:

$$t\sqrt{2gp(L+M)} = \frac{pp}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} \arccos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{ppq\sin s}{(1-qq)(1+q\cos s)}\,,$$

seu ob $\dfrac{p}{1-qq} = r$ habebitur

$$t\sqrt{2g(L+M)} = r\sqrt{r}\cdot\arccos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - qr\sqrt{p}\cdot\frac{\sin s}{1+q\cos s}\,,$$

ubi t denotat tempus, quo corpus M ab abside ima B anomaliam veram $BLM = s$ absolvit. Quare si totum tempus periodicum vocetur $= \varTheta$ min. sec., posito $s = 360^\circ = 2\pi$, obtinebitur

$$\varTheta\sqrt{2g(L+M)} = 2\pi r\sqrt{r}\,,\quad \text{ita ut sit}\quad \sqrt{2g(L+M)} = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\varTheta}\,.$$

His definitis ponamus, dum corpus in M versatur, unde motu assignato ulterius esset progressurum, quasi subito in N existere corpus in plano orbitae, cuius massa $= N$, voceturque distantia $LN = u$, angulus $ALN = \vartheta$, sitque distantia $MN = \sqrt{\big(uu-2uv\cos(\varphi-\vartheta)+vv\big)} = w$ brevitatis gratia. Ob actionem huius corporis N, cuius effectum tantum pro tempusculo dt hic definire statuimus, corpus M tempusculo dt non in m, sed in μ perveniet, eiusque motus ita perturbabitur, ut, si corpus N, elapso tempusculo dt subito iterum tolleretur, aliam deinceps orbitam esset descripturum, a priori infinite parum recedentem, puta $\beta\mu$, pro qua statuamus longitudinem absidis imae $AL\beta = \alpha + d\alpha$, semiparametrum $= p + dp$, excentricitatem $= q + dq$ et semiaxem transversum $= r + dr$. Nunc autem elapso tempusculo dt erit anomalia vera $= \beta L\mu$, quas mutationes momentaneas ex problemate § 185 ac praecipue eius scholio § 191 colligamus. Ponamus ergo, ut ibi, brevitatis gratia $\dfrac{N}{L+N} = n$, tum vero

$$dP = uv^3\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$$

et

$$\begin{aligned} dS = &-\frac{qv^3\,d\varphi\sin s}{pw^3} + \frac{q}{p}uvv\,d\varphi\sin s\cos(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\\ &- uv\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\,, \end{aligned}$$

atque § 191 invenimus fore[63], posito $v = \dfrac{p}{1+q\cos s}$,

$$\begin{aligned} &\text{I.} && vv\,d\varphi = dt\sqrt{2g(L+M)}(f-2nP)\,,\\ &\text{II.} && dv = \frac{qvv\,d\varphi\sin s}{p}\,,\\ &\text{III.} && p = f - 2nP\,, \end{aligned}$$

63 Editio princeps:

$$d\varphi - ds = \cdots + \frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\,.$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{qq}{p} = \frac{kk-1}{f} + \frac{1}{p} + 2nS\,,$$

$$\text{V.}\quad d\varphi - ds = \frac{nvv\,d\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3} - u\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\cos s\cos(\varphi-\vartheta) - \frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\right)\right),$$

ubi f denotat semiparametrum et k excentricitatem pro initio temporis t. Quoniam igitur hic istud initium in principio tempusculi dt constituimus, erit nobis $f = p$ et $k = q$, litterae autem p et q denotant earundem valores iam variatos $p + dp$ et $q + dq$, at $d\varphi$ angulum $ML\mu$. Ex quo colligimus

$$dp = -2n\,dP \quad \text{et} \quad d\cdot\frac{1-qq}{p} = -2n\,dS = d\cdot\frac{1}{r}\,,$$

atque

$$vv\,d\varphi = dt\sqrt{2g(L+M)(p+dp)}\,, \quad \text{seu} \quad = dt\left(\sqrt{p}+\frac{dp}{2\sqrt{p}}\right)\sqrt{2g(L+M)}\,.$$

Variationes ergo tempusculo dt productae ita se habebunt:

1. Semiparameter p augmentum capit dp, ut sit

$$dp = -2nuv^3\,d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right).$$

2. Semiaxis transversus r, ob $\frac{dr}{rr} = 2n\,dS$, augmentum capit dr, ut sit

$$dr = -\frac{2nqrrv^3\,d\varphi\sin s}{pw^3} + 2nrruv\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{qv}{p}\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - \sin(\varphi-\vartheta)\right).$$

3. Pro variatione excentricitatis q habemus[64]

$$-\frac{2q\,dq}{p} - \frac{(1-qq)\,dp}{pp} = -2n\,dS\,, \quad \text{seu} \quad \frac{2q\,dq}{p} = 2n\,dS + \frac{2n(1-qq)\,dP}{pp}\,,$$

unde fit

$$dq = -\frac{nv^3\,d\varphi\sin s}{w^3} + \frac{nuv^3\,d\varphi}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - (2\cos s + q + q\cos^2 s)\sin(\varphi-\vartheta)\Big).$$

64 Editio princeps: dp loco dP.

4. Angulus autem elementaris $d\varphi$ tempusculo dt descriptus omissa particula infinite parva, ita definitur

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}\ ,$$

ubi si tempusculo dt valor notabilis tribuatur, quantitatibus p et v valor medius inter eos, quos initio et fine obtinent, assignari poterit.

5. Denique cum sit $\varphi - s = \alpha$, variatio momentanea ipsius α erit[65]

$$d\alpha = \frac{nvv\,d\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3} - u\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\cos s\cos(\varphi-\vartheta) - \frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\right)\right)\ ,$$

vel etiam[66]

$$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi}{q}\left(\frac{\cos s}{w^3} - \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\cos s\cos(\varphi-\vartheta) - (2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right)\ .$$

Posset hinc etiam variatio in distantia v facta definiri, sed cum semper sit $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, praestat quovis tempore ipsam distantiam v definiri. Omnes ergo perturbationes momentaneae tempusculo dt productae ita determinabuntur:

1. Angulus elementaris interea confectus $d\varphi$ fit

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}\ .$$

2. Semiparameter orbitae p accipiet augmentum dp, ut sit

$$dp = -2nuv^3\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta)\ .$$

65 Editio princeps: $d\alpha = \cdots + \frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}$.

66 Editio princeps: $+(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)$ loco $-(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)$.

3. Semiaxis transversus orbitae $r = \dfrac{p}{1-qq}$ accipiet augmentum dr, ut sit

$$dr = \frac{2nrrvv\,d\varphi}{p}\left(-\frac{qv\sin s}{w^3} + u\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(q\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - (1+q\cos s)\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right),$$

sive

$$dr = -\frac{2nrrvv\,d\varphi}{p}\left(\frac{qv\sin s}{w^3} + u\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(\sin(\varphi-\vartheta) + q\sin(\varphi-\vartheta-s)\Big)\right).$$

4. Excentricitas q incrementum dq capiet, ut sit

$$dq = nv^3\,d\varphi\left(-\frac{\sin s}{w^3} + \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - \left(2\cos s + q + q\cos^2 s\right)\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right).$$

5. Longitudo absidis α capiet augmentum $d\alpha$, ut sit

$$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi}{q}\left(\frac{\cos s}{w^3} - \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\cos s\cos(\varphi-\vartheta) + (2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right).$$

Ex binis postremis formulis colligitur fore

$$dq\cos s + q\,d\alpha\sin s = -2nuvv\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta) = \frac{dp}{v}$$

et

$$dq\sin s - q\,d\alpha\cos s$$
$$= nv^3\,d\varphi\left(-\frac{1}{w^3} + \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\cos(\varphi-\vartheta) - q\sin s\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right),$$

quarum illa ex differentiatione aequalitatis $\frac{1}{v} = \frac{1+q\cos s}{p}$ sequitur, ob $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p}$ et $d\varphi - ds = d\alpha$, fit enim $dq\cos s + qd\alpha\sin s = \frac{dp}{v}$.

199. **Corollarium 1.** Ob actionem ergo corporis N singulis momentis elementa sectionis conicae immutantur, ac si id subito annihilaretur, corpus M secundum ea elementa, quae ultimo momento locum habuerint, moveri perget motu regulari.

200. **Corollarium 2.** Parameter nullam patitur mutationem, si fuerit vel $\sin(\varphi-\vartheta) = 0$, vel $w = u$. Illo casu corpus N cum corporibus L et M in directum est situm, ideoque ex L cum M, vel in oppositione vel coniunctione conspicitur; hic vero casus locum habet, ubi fuerit $\cos(\varphi-\vartheta) = \frac{v}{2u}$.

201. **Corollarium 3.** Si fuerit $\varphi - \vartheta = 0$ et $u > v$, erit $w = u - v$, et perturbationes momentaneae praeter $dp = 0$ inveniuntur:

$$dr = 2nrrvv\,d\varphi\cdot\frac{q\sin s}{p}\left(\frac{1}{ww}-\frac{1}{uu}\right),$$
$$dq = nvv\,d\varphi\sin s\left(\frac{1}{ww}-\frac{1}{uu}\right),$$
$$d\alpha = -\frac{nvv\,d\varphi\cos s}{q}\left(\frac{1}{ww}-\frac{1}{uu}\right).$$

202. **Corollarium 4.** Eodem porro casu, quo $\varphi - \vartheta = 0$, si sit $u < v$, ac propterea $w = v - u$, erunt perturbationes momentaneae:

$$dr = -2nrrvv\,d\varphi\cdot\frac{q\sin s}{p}\left(\frac{1}{ww}+\frac{1}{uu}\right),$$
$$dq = -nvv\,d\varphi\sin s\left(\frac{1}{ww}+\frac{1}{uu}\right),$$
$$d\alpha = \frac{nvv\,d\varphi\cos s}{q}\left(\frac{1}{ww}+\frac{1}{uu}\right).$$

203. **Corollarium 5.** Sin autem sit $\varphi - \vartheta = 180^\circ$, erit $\cos(\varphi-\vartheta) = -1$ et $w = v + u$, unde praeter $dp = 0$ reliquae perturbationes erunt

$$dr = 2nrrvv\,d\varphi\cdot\frac{q\sin s}{p}\left(-\frac{1}{ww}+\frac{1}{uu}\right),$$
$$dq = nvv\,d\varphi\sin s\left(-\frac{1}{ww}+\frac{1}{uu}\right),$$
$$d\alpha = -\frac{nvv\,d\varphi\cos s}{q}\left(-\frac{1}{ww}+\frac{1}{uu}\right).$$

204. **Corollarium 6.** Casu vero, quo fit $w = u$, ubi etiam $dp = 0$, reliquae perturbationes momentaneae sunt:

$$dr = -\frac{2nqrrv^3\,d\varphi\sin s}{pu^3}\,,$$
$$dq = -\frac{nv^3\,d\varphi\sin s}{u^3}\,,$$
$$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{qu^3}\,.$$

205. **Scholion 1.** Quando ergo motus corporis perturbantis N constat, ut ad singula temporis momenta eius locus assignari possit, tum ope nostrarum formularum perturbationes singulis momentis productae assignari poterunt. Haec autem temporis momenta, etsi in calculo infinite parva sunt assumta, tamen plerumque satis notabilia temporis intervalla, veluti horae, dies, quin etiam hebdomades eorum loco assumi licet, siquidem his intervallis exiguae mutationes oriuntur, vel potius quamdiu mutationes tempori fuerint proxime proportionales. Quatenus enim eae a ratione temporis recedunt, eatenus tempus in minores partes secari oportet. Ita hae formulae commode adhiberi poterunt, si quaestio fuerit, quantum motus cuiuspiam planetae principalis ab actione alius planetae vel cometae perturbetur, siquidem utriusque motus in idem fere planum incidat. Ex eodem fonte Celeberrimus Clairaut perturbationem motus cometae iam apparituri, qui retro annis 1682 et 1607 fuerat observatus, feliciter determinavit, quod negotium, etsi summopore laboriosum, eo felicius successit, quod perturbatio tantum, quoad in vicinia planetarum Jovis ac Saturni versabatur cometa, fuerat effecta[67].

206. **Scholion 2.** Expressiones inventae in alias formas transfundi possunt introducendo angulos trianguli LMN. Si enim ponamus hos angulos $MLN = \varphi - \vartheta = z$, $LMN = y$ et $LNM = x$, ut sit $x + y + z = 180°$, erit $u = \frac{v\sin y}{\sin x}$ et $w = \frac{v\sin z}{\sin x}$, quibus valoribus introductis, ob

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)} \quad \text{et} \quad v = \frac{p}{1+q\cos s}\,,$$

reperiuntur variationes tempusculo dt productae:

1. Pro variatione semiparametri p,

$$dp = -\frac{2nv\,d\varphi\sin^2 x}{\sin^2 y\sin^2 z}\Big(\sin^3 y - \sin^3 z\Big)\,.$$

67 [Clairaut 1759b].

2. Pro variatione semiaxis transversi r,

$$dr = -\frac{2nrr\,d\varphi\sin^2 x}{p\sin^2 y\sin^2 z}\Big((1+q\cos s)\big(\sin^3 y-\sin^3 z\big) + q\sin s\big(\sin^2 y\cos y+\sin^2 z\cos z\big)\Big)\,,$$

vel etiam hoc modo

$$dr = -\frac{2nrr\,d\varphi\sin^2 x}{p\sin^2 y\sin^2 z}\Big(\sin^3 y-\sin^3 z + q\sin^2 y\sin(y+s) - q\sin^2 z\sin(z-s)\Big)\,.$$

3. Pro variatione excentricitatis q,

$$dq = -\,\frac{n\,d\varphi\sin^2 x}{\sin^2 y\sin^2 z}\left(\sin s\big(\sin^2 y\cos y+\sin^2 z\cos z\big) + \frac{2\cos s+q+q\cos^2 s}{1+q\cos s}\big(\sin^3 y-\sin^3 z\big)\right)\,.$$

4. Pro variatione longitudinis absidum α,

$$d\alpha = \frac{n\,d\varphi\sin^2 x}{q\sin^2 y\sin^2 z}\left(\cos s\,\big(\sin^2 y\cos y+\sin^2 z\cos z\big) - \frac{\sin s(2+q\cos s)\big(\sin^3 y-\sin^3 z\big)}{1+q\cos s}\right)\,.$$

Cum hae formulae non parum sint complicatae, quovis casu oblato non tam facile dici potest, utrum hae variationes fuerint positivae, an negativae? antequam veros earum valores evolverimus. Interim quia ex istis formulis variationes casu $\varphi-\vartheta=z=0$ colligere haud licet, priores formae in praxi anteferendae videntur.

207. **Scholion 3.** Effectus corporis N in motu corporis M perturbando est ceteris paribus maximus, si vel distantia $MN=w$, vel $LN=u$ fuerit minima, hoc est si corpus N vel ad M vel ad L proxime accedat; priori autem casu effectus maior erit quam posteriori, quoniam w tantum in denominatore nostrarum formularum inest, u vero etiam numeratores afficit. Quodsi igitur L sit sol, M planeta quidam primarius et N cometa in plano orbitae planetae decurrens, motus quidem planetae maxime turbabitur, quando cometa ad eum proxime accedit; verum etiam dum cometa prope solem praeterit, perturbatio erit eo maior, quo vicinior fiat soli et quo maior fuerit eius massa. Ita cometae non solum in perigaeo

motum terrae perturbant, sed etiam in perihelio. Ceterum si fieri posset, ut alterutra distantiarum w et u prorsus in nihilum abiret, formulae nostrae omni usu destituerentur, quandoquidem perturbationes fuerint infinitae. Casus hic locum esset habiturus, si corpus N subito alteri corporum L vel M ita iungeretur, ut in unum coalesceret, qui etsi per formulas nostras inexplicabilis videtur, tamen in se est facillimus, propterea quod, dum duo tantum aderunt corpora, motus erit regularis, in sectione conica procedens, quanquam haec sectio conica diversa erit ab illa, quae ante accessionem massae N fuerit descripta. Atque hic casus, etsi nonnisi per miraculum locum habere potest, dum massa alterius corporum L vel M augeretur, expendi meretur.

208. **Problema.** Si dum corpora L et M se mutuo attrahentia motu regulari feruntur, alterius vel utriusque massa subito augeatur vel minuatur, definire motum subsecuturum.

Solutio. Hactenus ergo corpus M ex L visum descripserit sectionem conicam BM, cuius semiparameter sit $= p$, excentricitas $= q$ et longitudo absidis $ALB = \alpha$; nunc autem sit corporis M longitudo $ALM = \varphi$ et distantia $LM = v$, erit anomalia vera $BLM = \varphi - \alpha = s$ et $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$; tum vero expositis horum corporum massis per litteras L et M, tempusculo dt describeretur angulus elementaris $MLm = d\varphi = ds = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}$. Iam hoc momento perpendatur corporis M situs ac motus; situs quidem cum distantia $LM = v$, tum angulo $ALM = \varphi$ definitur, ac motus primo directione seu angulo BML, tum vero celeritate ipsa per Mm determinatur. Sit ergo angulus $BML = \eta$ et celeritas in $M = \mho$, ita ut iam hae quatuor quantitates v, φ, η et $\mho$ tanquam datae sint spectandae, ex quibus praecedentia motus elementa definiri debent, ac primo quidem dum corporum massae sunt L et M, deinde vero dum massae sunt mutatae, puta L' et M'. Primo igitur habemus

$$\tan\eta = \frac{v\,d\varphi}{dv}\,,$$

sed ob $v = \frac{p}{1+q\cos s}$ est $dv = \frac{pq\,ds\sin s}{(1+q\cos s)^2}$, quia ergo est $ds = d\varphi$, erit

$$\tan\eta = \frac{v(1+q\cos s)^2}{pq\sin s} = \frac{1+q\cos s}{q\sin s}\,.$$

Deinde hinc est $Mm = \frac{v\,d\varphi}{\sin\eta} = \frac{v\,d\varphi}{1+q\cos s}\sqrt{(1+2q\cos s+qq)}$, ideoque celeritas

$$\mho = \frac{Mm}{dt} = \frac{Mm}{vv\,d\varphi}\sqrt{2gp(L+M)} = \frac{\sqrt{2gp(L+M)(1+2q\cos s+qq)}}{v(1+q\cos s)}\,,$$

seu

$$= \frac{\sqrt{2gp(L+M)}}{v\sin\eta}\,,$$

unde colligimus $p = \frac{\eth\eth vv \sin^2\eta}{2g(L+M)}$, hincque

$$1 + q\cos s = \frac{p}{v} = \frac{\eth\eth v \sin^2\eta}{2g(L+M)} = q\sin s \tan\eta\,.$$

Quocirca erit

$$q\cos s = \frac{\eth\eth v \sin^2\eta}{2g(L+M)} - 1 \quad \text{et} \quad q\sin s = \frac{\eth\eth v \sin\eta\cos\eta}{2g(L+M)}\,,$$

unde pro anomalia vera colligitur $\tan s = \frac{\eth\eth v \sin\eta\cos\eta}{\eth\eth v\sin^2\eta - 2g(L+M)}$, hincque ipsa excentricitas

$$q = \frac{\sqrt{\big(\eth^4 vv\sin^2\eta - 4g(L+M)\,\eth\eth v\sin^2\eta + 4gg(L+M)^2\big)}}{2g(L+M)}\,.$$

Quare si nunc massae corporum L et M subito in L' et M' fuerint mutatae, his illarum loco positis hae formulae ostendent elementa orbitae deinceps descriptae, quae elementa sint: 1) semiparameter $= p'$, 2) excentricitas $= q'$ et 3) longitudo absidis imae $= \alpha'$, ita ut posita anomalia vera $= s'$, sit $\alpha' = \varphi - s'$. Nunc ergo iterum ex statu praecedente elidantur litterae $\eth$ et η, scilicet

$$\begin{aligned}\eth &= \frac{\sqrt{2gp(L+M)(1+2q\cos s+qq)}}{p}\,,\\ \sin\eta &= \frac{1+q\cos s}{\sqrt{(1+2q\cos s+qq)}}\,,\\ \cos\eta &= \frac{q\sin s}{\sqrt{(1+2q\cos s+qq)}}\,,\end{aligned}$$

eritque pro elementis variatis

$$\begin{aligned}p' &= \frac{p(L+M)}{L'+M'}\,,\\ 1+q'\cos s' &= \frac{p(L+M)}{v(L'+M')}\,,\\ q'\sin s' &= \frac{(L+M)q\sin s}{L'+M'}\,,\\ d\varphi = ds' &= \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp'(L'+M')}\,.\end{aligned}$$

Nova ergo elementa ita pendent a praecedentibus, ut sit

$$\frac{L+M}{L'+M'} = \frac{p'}{p} = \frac{1+q'\cos s'}{1+q\cos s} = \frac{q'\sin s'}{q\sin s}\,,$$

ideoque quantitates p, $1 + q\cos s$ et $q\sin s$ in ratione reciproca massarum immutentur.

209. **Corollarium 1.** Si ergo massae L et M in L' et M' mutentur, dum corpus M in abside ima versatur, ob $s = 0°$, erit etiam $s' = 0°$, sicque linea absidum nullam patitur mutationem, tum vero erit

$$\frac{1+q'}{1+q} = \frac{L+M}{L'+M'}\,,$$

ideoque

$$q' = \frac{L+M}{L'+M'}q + \frac{L+M}{L'+M'} - 1\,,$$

seu

$$q' = \frac{p'}{p}q + \frac{p'-p}{p}\,,$$

unde excentricitas vel crescit vel decrescit, semper autem parameter $2p$ in ratione reciproca massarum mutatur.

210. **Corollarium 2.** Si mutatio massarum eveniat, dum corpus M per absidem summam transit, qua p abeat in p', ob $s = 180°$ et $s' = 180°$, linea absidum non mutatur, sed excentricitas ita mutatur ut sit

$$\frac{p'}{p} = \frac{1-q'}{1-q}\,, \quad \text{ideoque} \quad q' = \frac{p'}{p}q + \frac{p-p'}{p}\,.$$

211. **Corollarium 3.** Si eadem mutatio oriatur dum $s = 90°$, erit

$$\frac{p'}{p} = 1 + q'\cos s' = \frac{q'\sin s'}{q}\,,$$

unde si $\frac{p'}{p} = \lambda$, habebitur

$$q'\sin s' = \lambda q \quad \text{et} \quad q'\cos s' = \lambda - 1\,,$$

ideoque

$$q' = \surd\big(\lambda\lambda qq + (\lambda-1)^2\big) \quad \text{et} \quad \tan s' = \frac{\lambda q}{\lambda - 1}\,.$$

Si mutatio eveniat dum $s = 270°$, erit

$$q'\sin s' = -\lambda q \quad \text{et} \quad q'\cos s' = \lambda - 1\,,$$

ideoque

$$q' = \surd\big(\lambda\lambda qq + (\lambda-1)^2\big) \quad \text{et} \quad \tan s' = -\frac{\lambda q}{\lambda - 1}\,.$$

212. **Corollarium 4.** Posito ergo $p' = \lambda p$, casu $s = 0°$, erit

$$q' = \lambda q + \lambda - 1$$

et semiaxis transversus

$$r' = \frac{p}{2(q+1) - \lambda(q+1)^2} = \frac{r(1-q)}{2 - \lambda(1+q)} \,.$$

Casu $s = 180^\circ$, ob $q' = \lambda q - \lambda + 1$ fit

$$r' = \frac{p}{2(1-q) - \lambda(1-q)^2} = \frac{r(1+q)}{2 - \lambda(1-q)} \,.$$

Casu $s = 90^\circ$, ob $q' = \surd\big(\lambda\lambda qq + (\lambda-1)^2\big)$ fit

$$r' = \frac{p}{2 - \lambda(1+qq)} = \frac{r(1-qq)}{2 - \lambda(1+qq)} \,.$$

Casu $s = 270^\circ$ eadem mutatio in axe transverso oritur.

213. **Corollarium 5.** Si tempus periodicum prius ante mutationem sit Θ, et post mutationem $= \Theta'$, ob $\Theta = \frac{2\pi r\surd r}{\surd 2g(L+M)}$ et $\Theta' = \frac{2\pi r'\surd r'}{\surd 2g(L'+M')}$, erit

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{r'\surd r'}{r\surd r}\sqrt{\frac{L+M}{L'+M'}} = \frac{r'\surd \lambda r'}{r\surd r} \,,$$

unde ex variatione axis transversi variatio in tempore periodico orta definiri potest.

214. **Scholion 1.** Si secundum opinionem, quam Newtonus erat amplexus, massa solis ob lucis emissionem continuo imminueretur[68], hinc mutatio in motu planetarum facta definiri posset. Foret enim $L + M$ quantitas variabilis, qua posita $= S$, erit

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\surd 2gpS$$

et

$$\frac{S}{S+dS} = \frac{p+dp}{p} = \frac{1 + q\cos s + d\cdot q\cos s}{1 + q\cos s} = \frac{q\sin s + d\cdot q\sin s}{q\sin s} = 1 - \frac{dS}{S} \,.$$

In hac autem variatione anomalia vera s eatenus tantum mutari est censenda, quatenus linea absidum mutatur; unde posita longitudine absidis imae $\varphi - s = \alpha$, erit $ds = -d\alpha$. Ne autem haec consideratio moram facessat, praestabit hunc casum ex primis principiis evolvisse. Habemus ergo

$$\text{I.}\quad 2\,dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \text{II.}\quad ddv - v\,d\varphi^2 = -\frac{2gS\,dt^2}{vv} \,,$$

quarum illa dat $vv\,d\varphi = C\,dt$, seu $d\varphi = \frac{C\,dt}{vv}$, unde haec fiet

$$ddv = \frac{CC\,dt^2}{v^3} - \frac{2gS\,dt^2}{vv} \,,$$

68 Cf. [Newton 1730], pp. 318–319 (Query 11).

ubi S spectari debet tanquam functio temporis t. Quae aequatio quantumvis resolutu difficilis videatur, tamen solutio ex formulis superioribus petita ipsi satisfacere deprehenditur. Posito enim $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, fit primo $p = \frac{bC}{S}$, tum vero

$$dq\cos s + q\,d\alpha\sin s = -\frac{dS}{S}(1+q\cos s)$$

et

$$dq\sin s - q\,d\alpha\cos s = -\frac{dS}{S}q\sin s\ ,$$

unde colligitur

$$d\alpha = -\frac{dS\sin s}{Sq} \quad \text{et} \quad dq = -\frac{dS}{S}(\cos s + q)\ ,$$

hincque porro

$$dv = \frac{q\,dt\sin s}{p}\sqrt{2gbC}\ .$$

Denique ob $d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gbC}$ fiet

$$ds = \frac{dt\,\sqrt{2gbC}}{vv} + \frac{dS\sin s}{Sq}\ ,$$

unde saltem variationes momentaneae innotescunt.

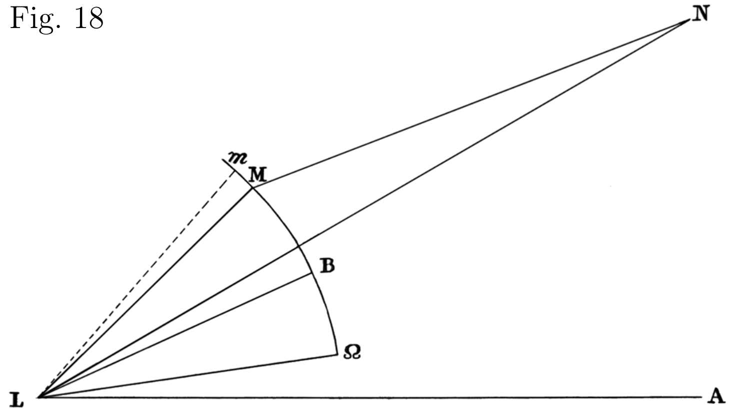
215. **Scholion 2.** Solutio huius problematis suppeditat quoque enodationem quaestionis, qua motus planetae, si forte a quapiam causa ictum acceperit, quem deinceps erit prosecuturus, determinatur. Quemcunque enim motum ante ictum habuerit, si per ictum planetae M imprimatur celeritas $= \mho$ secundum directionem Mm, ut sit angulus $LMB = \eta$ et distantia $LM = v = \frac{p}{1+q\cos s}$, post ictum erit semiparameter $p = \frac{\mho\mho vv\sin^2\eta}{2g(L+M)}$, excentricitas vero q et anomalia vera s per has aequationes definientur:

$$q\cos s = \frac{\mho\mho v\sin^2\eta}{2g(L+M)} - 1 \quad \text{et} \quad q\sin s = \frac{\mho\mho v\sin\eta\cos\eta}{2g(L+M)}\ ,$$

tum vero erit post ictum $d\varphi = ds = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}$, unde sectio conica cum ratione motus innotescit. Verum revertamur ad perturbationem motus planetarum investigandam, quae ab attractione tertii cuiusdam corporis efficitur, quando hoc corpus extra planum orbitae est situm. Quanquam autem istud corpus quovis momento tanquam quiescens spectamus, eius tamen loca successiva in plano quodam per L transeunte sita assumamus, quod planum tanquam fixum consideremus, cuius respectu planum orbitae planetae ob actionem continuo mutetur.

216. **Problema.** Si corpus M, quod ad L attractum motu regulari esset progressurum (Fig. 18), a tertio quodam corpore N extra planum motus sito attrahatur, determinare perturbationem motus momentaneam.

Fig. 18



Solutio. Referat tabula planum, in quo corpus N perpetuo versetur, in eodem simul perpetuo existente corpore L, cuius respectu motum corporis M definiri oportet. Sit LA recta quaedam fixa, ac nunc quidem elapso tempore $= t$ versetur corpus perturbans in N, posito angulo $ALN = \vartheta$ et distantia $LN = u$; corpus vero, cuius motus quaeritur, sit extra planum ALN in M, unde si corpus N abesset, motu regulari in orbita quadam BM esset progressurum, cuius elementa sequenti modo denotentur. Primo sit $L☊$ intersectio eius orbitae cum plano ALN, et longitudo nodi ascendentis $AL☊ = \psi$, atque inclinatio orbitae ad planum $ALN = \omega$. Deinde ipsius orbitae BM sit semiparameter $= p$, excentricitas $= q$ et semiaxis transversus $r = \dfrac{p}{1-qq}$. Nunc autem sit anomalia vera $BLM = s$, eritque distantia $LM = v = \dfrac{p}{1+q\cos s}$. Ponatur porro angulus $☊LM = \sigma$, qui vocatur argumentum latitudinis, erit pro abside ima B angulus $☊LB = \sigma - s$, ac posita longitudine corporis M in orbita propria $= \varphi$, erit, uti supra § 192 vidimus, $d\varphi = d\sigma + d\psi\cos\omega$. Hinc denique quaerantur duo anguli λ et μ, ut sit

$$\cos\sigma\cos(\vartheta-\psi) + \sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi) = \cos\lambda$$

et

$$\sin\sigma\cos(\vartheta-\psi) - \cos\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi) = \sin\mu\,,$$

erit $\lambda =$ angulo MLN, unde fiet distantia $MN = \sqrt{(vv + uu - 2uv\cos\lambda)}$, quae vocetur $= w$. Hunc in finem quaeratur angulus ν, ut sit $\tan\nu = \dfrac{v\sin\lambda}{u - v\cos\lambda}$, eritque

$w = \frac{v \sin \lambda}{\sin \nu}$. Quodsi nunc ponamus brevitatis gratia $\frac{N}{L+M} = n$ et

$$uv^3\, d\varphi \sin \mu \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) = dP\,,$$

$$\frac{qv^3\, d\varphi \sin s}{pw^3} + uv\, d\varphi \left(\sin \mu - \frac{qv \cos \lambda \sin s}{p} \right) \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) = dQ\,,$$

erit primo $d\varphi = \frac{dt}{vv} \sqrt{2gp(L+M)}$, ac perturbationes ab actione corporis N tempusculo dt productae ex § 192 sequenti modo se habere reperiuntur:

Primo pro variatione semiparametri p est

$$dp = -2nuv^3\, d\varphi \sin \mu \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right).$$

Deinde pro excentricitatis q variatione, ob $\frac{qq-1}{p} = \frac{kk-1}{f} - 2nQ$, erit differentiando

$$\begin{aligned} &\frac{2q\, dq}{p} + \frac{(1-qq)\, dp}{pp} \\ &\quad = -\frac{2nqv^3\, d\varphi \sin s}{pw^3} - 2nuv\, d\varphi \left(\sin \mu - \frac{qv \cos \lambda \sin s}{p} \right) \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right), \end{aligned}$$

unde fit

$$\begin{aligned} dq = &-\frac{nv^3\, d\varphi \sin s}{w^3} \\ &+ npuv\, d\varphi \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) \left(\frac{\cos \lambda \sin s}{1 + q \cos s} - \frac{\left(2 \cos s + q + q \cos^2 s\right) \sin \mu}{(1 + q \cos s)^2} \right), \end{aligned}$$

quae reducitur ad hanc formam

$$\begin{aligned} dq = nv^3\, d\varphi \Bigg(-\frac{\sin s}{w^3} + \frac{u}{p} \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) \Big(&(1 + q \cos s) \cos \lambda \sin s \\ &- \left(2 \cos s + q + q \cos^2 s\right) \sin \mu \Big) \Bigg). \end{aligned}$$

Hinc cum sit $\frac{qq-1}{p} = -\frac{1}{r}$, erit $\frac{dr}{rr} = -2n\, dQ$; erit pro variatione semiaxis transversi r

$$dr = -\frac{2nqrrv^3\, d\varphi \sin s}{pw^3} - 2nrruv\, d\varphi \left(\sin \mu - \frac{q \cos \lambda \sin s}{1 + q \cos s} \right) \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right),$$

seu

$$dr = \frac{2nrrvv\,d\varphi}{p}\left(-\frac{qv\sin s}{w^3} + u\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big(q\cos\lambda\sin s - (1+q\cos s)\sin\mu\Big)\right) .$$

Praeterea consecuti sumus[69]

$$ds = d\varphi - \frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{qw^3} + \frac{nuvv\,d\varphi}{q}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\cos\lambda\cos s + \frac{(2+q\cos s)\sin\lambda\sin s}{1+q\cos s}\right) ,$$

ubi cum $\varphi - s$ denotet longitudinem absidis imae B in orbita, si ea dicatur $= \alpha$, erit $d\alpha = d\varphi - ds$, seu[70]

$$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi}{q}\left(\frac{\cos s}{w^3} - \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\cos\lambda\cos s + (2+q\cos s)\sin\lambda\sin s\Big)\right) .$$

Denique pro variatione orbitae respectu plani ALN invenimus primo pro longitudine nodi ☊

$$d\psi = -\frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) ,$$

deinde pro variatione inclinationis ω

$$d\omega = \frac{d\psi\sin\omega}{\tan\sigma} = -\frac{nuv^3\,d\varphi\cos\sigma\sin\omega\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) ,$$

tum vero pro variatione anguli ☊$LM = \sigma$ habemus $d\sigma = d\varphi - d\psi\cos\omega$, ac proinde

$$d\sigma = d\varphi + \frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) ,$$

seu cum $\varphi - \sigma$ designet longitudinem nodi ☊ in orbita, si ea dicatur $= \beta$, erit

$$d\beta = -\frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) .$$

Tandem vero, ob $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, erit $dv = \frac{qvv\,d\varphi\sin s}{p}$. Quare cum ex dato tempusculo dt habeatur

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)} ,$$

69 Editio princeps: $\sin\mu$ loco $\sin\lambda$.
70 Vide notam praecedentem.

hinc omnes perturbationes momentaneae pro tempusculo dt obtinentur. Quod quo facilius ad calculum revocetur, fingamus corpus M circa L in distantia $= c$ circulum describere, in eoque tempusculo dt angulum $d\zeta$ absolvere, eritque

$$d\zeta = \frac{dt}{c\sqrt{c}}\sqrt{2g(L+M)}\ .$$

Unde cum detur angulus $d\zeta$ ex motu medio, erit

$$dt\sqrt{2g(L+M)} = c\,d\zeta\sqrt{c}\ , \quad \text{ideoque} \quad d\varphi = \frac{c\,d\zeta\sqrt{cp}}{vv}\ .$$

217. **Corollarium 1.** Anguli λ et μ ita per trigonometriam sphaericam exhiberi possunt. In superficie sphaerica (Fig. 19) centro L descripta sint A,

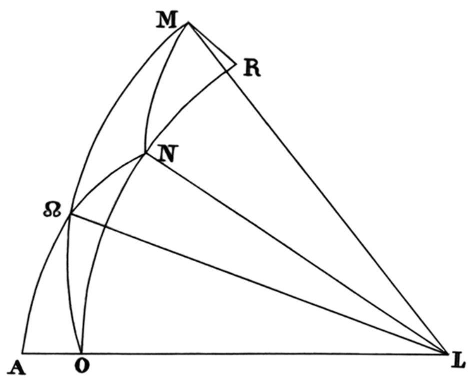


Fig. 19

M, N, ☊ puncta, per quae rectae LA, LM, LN, L☊ transeant, erit $AN = \vartheta$, A☊ $= \psi$, ☊$N = \vartheta - \psi$, ☊$M = \sigma$ et M☊$N = \omega$, fietque $MN = \lambda$, ac continuato arcu M☊ retro in O, ut OM sit quadrans, si ex O per N itidem ducatur quadrans ONR, erit $NR = \mu$.

218. **Corollarium 2.** Ducto arcu MR, quia ad utrumque quadrantem est normalis, resolvatur triangulum sphaericum ☊MN, in quo dantur latera ☊$M = \sigma$, ☊$N = \vartheta - \psi$ et angulus M☊$N = \omega$, inventoque latere MN cum angulo ☊MN, erit $\lambda = MN$ et $\sin\mu = \sin\lambda\cos$ ☊MN.

219. **Corollarium 3.** Loco tempusculi dt spatium non solum aliquot horarum, sed etiam saepe dierum capi potest, nisi positio corporis N ratione ipsius M citissime varietur. Tum ex motu medio pro hoc temporis spatio colligatur angulus $d\zeta$, indeque erit $vv\,d\varphi = c\,d\zeta\sqrt{cp}$, quem valorem in singulis perturbationibus momentaneis substitui oportet.

220. **Scholion.** Ex his principiis perturbationes motus cuiusque planetae principalis definiri poterunt, quatenus ab actione alius planetae vel etiam cometae oriuntur; ad planetas autem secundarios, seu satellites, haec methodus minus commode accommodari potest, quandoquidem assumsimus, remoto corpore perturbante, motum futurum esse regularem; hinc itaque perturbationes in

motu lunae, quae forte ab actione cuiusdam planetae vel cometae proficiscuntur, determinare nequeunt. Sin autem ipse sol ut corpus perturbans consideretur, sine cuius actione luna motum regularem esset habitura, inaequalitates motus lunae hinc concludere licebit, sed quia actio solis est perennis, collectio perturbationum momentanearum conclusionem nimis lubricam reddit. Maximum autem usum haec methodus praestabit, si actio cuiuspiam cometae in motum planetae principalis, per cuius viciniam cometa transit, investigari debeat: quoniam enim actio cometae non diutius manet sensibilis, quam dum eius distantia a planeta fuerit valde parva, omnino superfluum foret, totam actionem, quam cometa per totum suum tempus periodicum exerit, exquirere velle, quem in finem integralia nostrarum formularum exhiberi opus esset. Sufficiet igitur per breve tempus effectum cometae in orbita cuiuspiam planetae perturbanda cognovisse, id quod ope formularum differentialium haud difficulter praestabitur. Casus autem, quibus cometae ad planetas tam prope accedunt, ut perturbationem notabilem efficere queant, vehementer raro accidunt. Ac si cometa anni 1682 secundum praedictionem Celeberrimi CLAIRAUT hoc anno 1759 revertatur[71], phaenomena imprimis singularia in motu terrae ab eius actione expectari possent, propterea quod in satis exigua a terra distantia praeterlabatur. Operae ergo pretium erit, ope formularum traditarum in perturbationem motus terrae eiusque orbitae, ab actione huius cometae oriundam, inquirere, ut deinceps, quando elementa motus istius cometae accuratius erunt definita, ad hoc exemplum plenior investigatio suscipi possit.

71 [Clairaut 1759b].

DIGRESSIO

qua effectus cometae Anno 1759 *expectati in motu terrae perturbando investigatur*

1. Primo quidem assumo hunc cometam secundum eadem elementa latum iri, quae pro eius apparitione Anno 1682 sunt determinata. Etsi enim ob actionem Jovis et Saturni eius tempus periodicum quasi biennio fuit retardatum, ob eandemque rationem eius reliqua motus elementa haud leves mutationes subiisse probabile, tamen quia de eorum valore praesente nihil certi constat, antequam ex ipso eius motu ea denuo definire licuerit, elementis superioris revolutionis utar. Posita ergo media terrae a sole distantia $= 100000$, statuam pro hoc cometa

1.	Distantiam perihelii a sole	58328
2.	Semiparametrum	116656
3.	Nodum ascendentem	$1^s 21°16'$
	Nodum descendentem	$7^s 21°16'$
4.	Distantiam nodi descendenti a perihelio	$71°36'$
5.	Inclinationem ad eclipticam	$17°56'$
6.	Longitudinem perihelii	$10^s\, 2°52'$.

Motus autem huius cometae est retrogradus, et a nodo ascendente ad perihelium, indeque ad nodum descendentem pergit.

2. Qui hunc cometam primum mense Januario huius anni 1759 viderant, suspicantur eum die 14 Martii per perihelium suum transiisse, ex quo, postquam per nodum descendentem fuerit progressus, ad terram proxime accedet. Nodum descendentem autem attinget circa die 14 Aprilis, unde post hoc tempus loca cometae colligi conveniet. At ex mea theoria motus cometarum[72] elapsis δ diebus post transitum per perihelium habetur[73] $l(t + \frac{1}{3}t^3) = l\delta + 8{,}4362519$, unde anomalia vera seu angulus a perihelio confectus definitur, quae si vocetur $= \zeta$, erit distantia eius a sole[74] $= \dfrac{58328}{\cos^2 \frac{1}{2}\zeta}$.

72 [E 66].
73 l denotat logarithmum.
74 Cf. [E 66], § 34.

3. Posito ergo cometam ipso meridie die 14 Martii per perihelium transiisse, die 14 Aprilis et sequentibus loca cometae ita se habebunt:

Diebus a perihelio	Anno 1759	Anomalia vera	eius semissis	Distantia a sole	Distantia a nodo descend.
31	Aprilis 14^d	$71^\circ\,37'$	$35^\circ\,48'$	88679	$0^\circ\;\;1'$
32	15^d	$72^\circ\,56'$	$36^\circ\,28'$	90196	$1^\circ\,20'$
33	16^d	$74^\circ\,14'$	$37^\circ\;\;7'$	91724	$2^\circ\,38'$
34	17^d	$75^\circ\,28'$	$37^\circ\,44'$	93261	$3^\circ\,52'$
35	18^d	$76^\circ\,41'$	$38^\circ\,20'$	94807	$5^\circ\;\;5'$
36	19^d	$77^\circ\,50'$	$38^\circ\,55'$	96361	$6^\circ\,14'$
37	20^d	$78^\circ\,58'$	$39^\circ\,29'$	97921	$7^\circ\,22'$
38	21^d	$80^\circ\;\;4'$	$40^\circ\;\;2'$	99487	$8^\circ\,28'$
39	22^d	$81^\circ\;\;7'$	$40^\circ\,34'$	101058	$9^\circ\,31'$
40	23^d	$82^\circ\;\;9'$	$41^\circ\;\;4'$	102634	$10^\circ\,33'$
41	24^d	$83^\circ\;\;9'$	$41^\circ\,34'$	104213	$11^\circ\,33'$
42	25^d	$84^\circ\;\;6'$	$42^\circ\;\;3'$	105796	$12^\circ\,30'$
43	26^d	$85^\circ\;\;3'$	$42^\circ\,31'$	107382	$13^\circ\,27'$
44	27^d	$85^\circ\,57'$	$42^\circ\,59'$	108969	$14^\circ\,21'$
45	28^d	$86^\circ\,50'$	$43^\circ\,25'$	110559	$15^\circ\,14'$
46	29^d	$87^\circ\,42'$	$43^\circ\,51'$	112150	$16^\circ\;\;6'$
47	30^d	$88^\circ\,32'$	$44^\circ\,16'$	113742	$16^\circ\,56'$
48	Maii 1^d	$89^\circ\,21'$	$44^\circ\,40'$	115334	$17^\circ\,45'$
49	2^d	$90^\circ\;\;8'$	$45^\circ\;\;4'$	116927	$18^\circ\,32'$
50	3^d	$90^\circ\,54'$	$45^\circ\,27'$	118519	$19^\circ\,18'$
51	4^d	$91^\circ\,39'$	$45^\circ\,49'$	120112	$20^\circ\;\;3'$
52	5^d	$92^\circ\,23'$	$46^\circ\,11'$	121703	$20^\circ\,47'$
53	6^d	$93^\circ\;\;5'$	$46^\circ\,33'$	123294	$21^\circ\,29'$

4. Nunc quoque ad singulos hos dies loca terrae ex sole visa ex tabulis colligamus, simulque distantias eius a nodo descendente orbitae cometae, qui cadit in $7^s 21^\circ 16'$ notemus. Pro hoc autem tempore erat locus perihelii terrae in $3^s 8^\circ 39'$, cuius ergo distantia a nodo descendente est $= 4^s 12^\circ 37'$.

Anno 1759		Distantia terrae a sole	Longitudo terrae	Dist. terrae a nodo desc.
Aprilis	14^d	100400	$6^s\,23°\,13'$	$0^s\,28°\;\;3'$
	15^d	100420	$24°\,11'$	$27°\;\;5'$
	16^d	100450	$25°\,10'$	$26°\;\;6'$
	17^d	100480	$26°\;\;9'$	$25°\;\;7'$
	18^d	100510	$27°\;\;7'$	$24°\;\;9'$
	19^d	100540	$28°\;\;6'$	$23°\,10'$
	20^d	100565	$29°\;\;4'$	$22°\,12'$
	21^d	100590	$7^s\;\;0°\;\;3'$	$21°\,13'$
	22^d	100620	$1°\;\;1'$	$20°\,15'$
	23^d	100650	$1°\,59'$	$19°\,17'$
	24^d	100675	$2°\,58'$	$18°\,18'$
	25^d	100700	$3°\,56'$	$17°\,20'$
	26^d	100725	$4°\,55'$	$16°\,21'$
	27^d	100750	$5°\,53'$	$15°\,23'$
	28^d	100775	$6°\,51'$	$14°\,25'$
	29^d	100800	$7°\,49'$	$13°\,27'$
	30^d	100825	$8°\,47'$	$12°\,29'$
Maii	1^d	100850	$9°\,45'$	$11°\,31'$
	2^d	100875	$10°\,43'$	$10°\,33'$
	3^d	100900	$11°\,41'$	$9°\,35'$
	4^d	100925	$12°\,40'$	$8°\,36'$
	5^d	100950	$13°\,38'$	$7°\,38'$
	6^d	100975	$14°\,36'$	$6°\,40'$

5. Pro orbita terrae porro sumitur semiaxis transversus = 100000 et excentricitas = 0,0169, unde fit semiparameter[75] = 99971. His elementis constitutis patet circa dies 27 et 28 Aprilis cometam terrae fore proximum. Investigemus ergo perturbationes ab actione cometae oriundas in motu terrae ab 25 Aprilis usque ad 30 eiusdem, et constituamus quina intervalla spatio 24 horarum aequalia, ita tempus dt unum diem, et ex motu terrae medio $d\zeta$ angulum $59'8''$ denotet, unde elementum $d\varphi$ definiri debet. Cum autem terra continuo propius ad nodum descendentem progrediatur, dum cometa ab eo recedit, angulus $d\varphi$ negative capiendus est.

75 Editio princeps: 97144 .

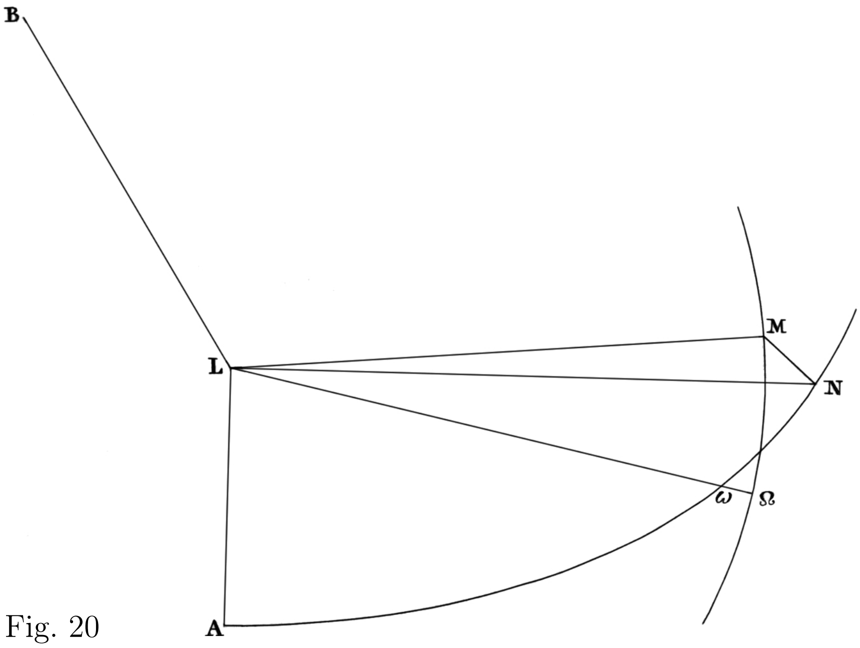


Fig. 20

6. Repraesentet ergo (Fig. 20) tabula planum orbitae cometae, in quo sit L sol, A perihelium cometae, a quo per arcum parabolicum AN progrediatur. $BM☊$ vero sit orbita terrae a perihelio B per M ad nodum ☊ progredientis, cuius motus respectu cometae ut retrogradus spectari debet, et portio $BM☊$ supra orbitam cometae versabitur. Erit ergo angulus $BL☊ = 132°37'$ et inclinatio orbitae terrae ad orbitam cometae $\omega = 17°56'$. Quodsi nunc terra haereat in M, cometa vero in N, erit $LM = v$, $LN = u$, $MN = w$, $BLM = -s$, $ALN = \vartheta$, $AL☊ = \psi = 71°36'$ et $☊LN = \vartheta - \psi$; porro $☊LM = \sigma$, atque $r = 100000$, $p = 99971$ et $q = 0{,}0169$. Denique positis massis solis, terrae et cometae L, M, N, sit $\frac{N}{L+M} = n$, unde calculi perturbationum pro singulis intervallis diurnis ita se habebunt:

Calculus pro intervallo a 25 ad 26 Aprilis

Cum sit $p = 99971$, $q = 0{,}0169$, $r = 100000$ et $\omega = 17°56'$, erit $v = 100700$, $u = 105796$, $☊LM = \sigma = 17°20'$, $s = -115°17'$, $\vartheta - \psi = 12°30'$. Nunc ob $c = 100000$, ob $d\varphi = -\frac{c\,d\zeta\,\sqrt{cp}}{vv}$ et $d\zeta = 3548''$ colligitur:

$$\begin{array}{rr} l\,v = & 5{,}0030295 \\ & \\ l\,cp = & 9{,}9998759 \\ l\,\sqrt{cp} = & 4{,}9999380 \\ l\,c = & \underline{5{,}0000000} \\ l\,c\sqrt{cp} = & 9{,}9999380 \\ l\,d\zeta = & \underline{3{,}5499836} \\ [l\,c\,d\zeta\sqrt{cp}] = & 13{,}5499216 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} [l\,c\,d\zeta\sqrt{cp}] = & 13{,}5499216 \\ l\,vv = & \underline{10{,}0060589} \\ l\,-d\varphi = & 3{,}5438626 \\ & \underline{4{,}6855749} \\ l\,-d\varphi = & 8{,}2294375 \end{array}$$

Erit ergo pro terminis, ubi $d\varphi$ angulum denotat, $d\varphi = -3498''$, at pro terminis, ubi in partibus radii exprimi debet[76], $d\varphi = -0{,}016960$. Pro angulis autem λ et μ calculus ita se habebit[77]:

$$\begin{array}{rr} l\ \cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9895676 \\ l\ \cos\sigma = & 9{,}9798158 \\ l\ \sin\sigma = & \underline{9{,}4741146} \\ [l\ \cos\sigma\cos(\vartheta-\psi)] = & 9{,}9693834 \\ & 9{,}4636822 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} l\ \sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}3356206 \\ l\ \cos\omega = & \underline{9{,}9783702} \\ l\ \cos\omega\sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}3139908 \\ l\ \sin\sigma = & 9{,}4741146 \\ l\ \cos\sigma = & \underline{9{,}9798158} \\ [l\ \sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)] = & 8{,}7881055 \\ [l\ \cos\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)] = & 9{,}2938066 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & +0{,}93193 \\ & \underline{+0{,}06139} \\ \cos\lambda = & +0{,}99332 \\ \lambda = & 6°38' \end{array} \qquad \begin{array}{rr} [\sin\sigma\cos(\vartheta-\psi)] = & +0{,}29086 \\ [-\cos\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)] = & \underline{-0{,}19670} \\ \sin\mu = & 0{,}09416 \\ \mu = & 5°24' \end{array}$$

Hinc pro distantia $MN = w = \dfrac{v\sin\lambda}{\sin\nu}$ existente $\tan\nu = \dfrac{v\sin\lambda}{u - v\cos\lambda}$

$$\begin{array}{rr} l\,v = & 5{,}0030295 \\ l\ \sin\lambda = & 9{,}0621366 \\ l\ \cos\lambda = & \underline{9{,}9970897} \\ l\,v\sin\lambda = & 4{,}0651660 \\ l\,v\cos\lambda = & 5{,}0001192 \\ & \\ l\ \sin\nu = & 9{,}9521525 \\ l\,w = & 4{,}1130135 \\ l\,c = & \underline{5{,}0000000} \\ l\,\frac{c}{w} = & 0{,}8869865 \\ l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}6609594 \\ \frac{c^3}{w^3} = & 458{,}099 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} u = & 105796 \\ v\cos\lambda = & \underline{100027} \\ u - v\cos\lambda = & 5769 \\ l\,v\sin\lambda = & 4{,}0651660 \\ l\,(u - v\cos\lambda) = & \underline{3{,}7610815} \\ l\ \tan\nu = & 10{,}3040846 \\ \nu = & 63°36' \\ w = & 12972 \\ l\,u = & \underline{5{,}0244701} \\ l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9755299 \\ l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}9265898 \\ \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}84448 \end{array}$$

76 Nota: $4{,}6855749 = 10 + l\frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60}$.
77 Vide § 216.

ergo
$$\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}=457{,}255 \quad \text{et} \quad l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right)=2{,}6601580\,.$$
Cum nunc sit
$$dp=-\frac{2nuv^3}{c^3}\,d\varphi\sin\mu\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right)\ ,$$
reperietur variatio semiparametri p:

$$\begin{aligned} l\,\tfrac{v^3}{c^3} &= 0{,}0090884\\ l\,u &= 5{,}0244701\\ l\,\sin\mu &= 8{,}9738562\\ l\left(\tfrac{c^3}{w^3}-\tfrac{c^3}{u^3}\right) &= 2{,}6601580\\ l\,-d\varphi &= \underline{8{,}2294375}\\ & \ 4{,}8970102 \end{aligned}$$

erit ergo $dp=2n\cdot 78888$ seu $dp=157776n$.
Unde si massa cometae aequalis esset massae terrae, foret $n=\frac{1}{227000}$, ideoque proxime $dp=\frac{2}{3}$; sin autem cometa massam haberet Jovi aequalem, foret $n=\frac{1}{1033}$, ideoque $dp=153$, qui effectus intervallo unius diei productus satis esset notabilis, cum sit $p=99971$, ideoque abiret in 100124, suique parte $\frac{1}{653}$ augeretur.

Pro variatione semiaxis transversi $r=100000$ habemus hanc formulam:
$$dr=-\frac{2nqrr}{p}\cdot\frac{v^3}{c^3}\cdot\frac{c^3}{w^3}\cdot d\varphi\sin s-\frac{2nrruv}{c^3}d\varphi\left(\sin\mu-\frac{qv}{p}\cos\lambda\sin s\right)\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right)$$
cuius formulae calculus ita se habet:

$$\begin{aligned} l\,qr^2 &= 8{,}2278867\\ l\,p &= \underline{4{,}9998759}\\ [l\,\tfrac{qr^2}{p}] &= 3{,}2280108\\ l\,\tfrac{v^3}{c^3} &= 0{,}0090884\\ l\,\tfrac{c^3}{w^3} &= 2{,}6609594\\ l\,-d\varphi &= 8{,}2294375\\ l\,-\sin s &= \underline{9{,}9562678}\\ & \ 4{,}0837638 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pars I} &= -2n\cdot 12127\\ \text{pars II} &= \underline{+2n\cdot 90428}\\ dr &= +2n\cdot 78300\\ dr &= \ \ +156600\,n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\mu &= \underline{\ \ 0{,}09416}\\ l\,\tfrac{q}{p} &= 3{,}2280108\\ l\,v &= 5{,}0030295\\ l\,\cos\lambda &= 9{,}9970897\\ l\,-\sin s &= \underline{9{,}9562678}\\ [l\ -\tfrac{qv}{p}\cos\lambda\sin s] &= 8{,}1843977\\ -\tfrac{qv}{p}\cos\lambda\sin s &= \underline{+0{,}01529}\\ \sin\mu-\tfrac{qv}{p}\cos\lambda\sin s &= \ \ 0{,}10945\\ l\,(\sin\mu-\tfrac{qv}{p}\cos\lambda\sin s) &= 9{,}0392056\\ l\,u &= 5{,}0244701\\ l\,\tfrac{v}{c} &= 0{,}0030295\\ l\,-d\varphi &= 8{,}2294375\\ l\ \left(\tfrac{c^3}{w^3}-\tfrac{c^3}{u^3}\right) &= \underline{2{,}6601580}\\ & \ 4{,}9563006 \end{aligned}$$

Semiaxis ergo transversus fere par augmentum accipit atque semiparameter, atque hac actione tempus periodicum augetur in ratione 1 ad $1 + 2{,}34900\,n$, seu annus augmentum capiet

$$= 858\,n \text{ dierum } = 20591\,n \text{ hor. } = 1235480\,n \text{ min.},$$

unde si cometa terrae esset aequalis, augmentum anni hinc natum foret $= 5'27''$.

Pro excentricitate q, cum sit $p = (1-qq)r$, erit

$$qq = 1 - \frac{p}{r} \quad \text{et} \quad 2q\,dq = \frac{-r\,dp + p\,dr}{rr} = -\frac{dp}{r} + \frac{p\,dr}{rr};$$

fiat ergo hic calculus:

$$\begin{array}{rr}
l\,dp = & 5{,}1980402 \\
l\,qr = & \underline{3{,}2278867} \\
 & 1{,}9701535 \\
 & -93{,}358\,n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
l\,p = & 4{,}9998759 \\
l\,dr = & \underline{5{,}1947930} \\
 & 10{,}1946690 \\
l\,qrr = & \underline{8{,}2278867} \\
 & 1{,}9667823 \\
 & +92{,}637\,n
\end{array}$$

ergo $dq = -46{,}68\,n + 46{,}32\,n = -0{,}36\,n$, unde patet excentricitatem fere nullam pati mutationem, nisi massa cometae plurimum superet massam terrae; si sit aequalis massae Jovis, fiet $dq = -0{,}00035$ et $q + dq = 0{,}01655$, unde aequatio centri valde imminueretur.

Pro variatione perihelii in orbita, si ponamus angulum $\Omega LB = \alpha$, formula supra inventa ita exprimatur:

$$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi}{qc^3}\left(\frac{c^3\cos s}{w^3} - \frac{u}{p}\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right)\Big((1 + q\cos s)\cos\lambda\cos s + (2 + q\cos s)\sin\mu\sin s\Big)\right),$$

quae ergo ita evolvetur ob $1 + q\cos s = \frac{p}{v}$:

$$\begin{array}{rr}
l\,p = & 4{,}9998759 \\
l\,v = & \underline{5{,}0030295} \\
l\,(1+q\cos s) = & 9{,}9968465 \\
l\,\cos\lambda = & 9{,}9970897 \\
l\,\cos s = & \underline{-9{,}6305243} \\
 & -9{,}6244605
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & \\
2 + q\cos s = & 1{,}99277 \\
l\,(2+q\cos s) = & 0{,}2994561 \\
l\,\sin\mu = & 8{,}9738562 \\
l\,\sin s = & \underline{-9{,}9562678} \\
 & -9{,}2295801
\end{array}$$

$$\text{pars postrema } = -0{,}42117 - 0{,}16966 = -0{,}59083$$

$$\begin{array}{rlrl}
l \text{ partis postremae} & = -9{,}7714649 & l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}6609594 \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) & = +2{,}6601580 & l\ \cos s = & -9{,}6305243 \\
l\,u = & 5{,}0244701 & [\,l \text{ partis prioris}\,] = & -2{,}2914837 \\
 & -7{,}4560930 & & \\
l\,p = & 4{,}9998759 & & \\
[\,l \text{ partis posterioris}\,] = & -2{,}4562171 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
\text{pars posterior} & = & +285{,}902 \\
\text{pars prior} & = & -195{,}652 \\
\text{aggregatum} & = & +90{,}250 \\
l \text{ aggregati} & = & 1{,}9554480 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} & = & 0{,}0090884 \\
l\,d\varphi & = & -3{,}5438626 \\
 & & -5{,}5083991 \\
l\,q & = & 8{,}2278867 \\
 & & -7{,}2805124
\end{array}$$

ergo erit

$$d\alpha = -19077102\,n \text{ min. sec.}$$

Cum igitur angulus α minuatur, perihelium in orbita secundum seriem signorum promovebitur: et quidem hoc die, si cometa terrae esset aequalis, per $84''$.

Porro pro variatione nodi ☊ posito angulo $AL☊ = \psi$, erit

$$d\psi = -\frac{nu}{p}\cdot\frac{v^3}{c^3}\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right)d\varphi\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi)$$

et pro variatione inclinationis

$$d\omega = \frac{d\psi\sin\omega}{\tan\sigma}\ ;$$

calculus ergo instituatur ut sequitur:

$$\begin{array}{rlrl}
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0245941 & & \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0090884 & & \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}6601580 & l\,d\psi = & 5{,}0474384 \\
l\,d\varphi = & -3{,}5438626 & l\ \sin\omega = & 9{,}4884240 \\
l\ \sin\sigma = & 9{,}4741146 & & 4{,}5358625 \\
l\ \sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}3356206 & l\ \tan\sigma = & 9{,}4942988 \\
[l\ -d\psi] = & -5{,}0474384 & l\,d\omega = & 5{,}0415637
\end{array}$$

ergo

$$d\psi = +111542\,n \text{ min. sec.}\ , \quad d\omega = +110043\,n \text{ min. sec.}\ ,$$

unde linea nodorum $L☊$ in orbita cometae promovetur angulo $d\psi = 111542\,n$ min. sec. et inclinatio orbitae terrestris augetur angulo $d\omega = 110043\,n$ min. sec., quae mutationes circiter 170 vicibus sunt minores ea, quam linea absidum terrae experitur.

Calculus pro intervallo a 26 ad 27 Aprilis

Cum sit $p = 99971$, $q = 0{,}0169$, $r = 100000$ et $\omega = 17°56'$, erit $v = 100725$, $u = 107382$, $☊LM = \sigma = 16°21'$, $s = -116°16'$, $\vartheta - \psi = 13°27'$. Nunc pro $d\varphi$ inveniendo

$$l\,v = 5{,}0031373 \qquad \begin{array}{rr} l\,c\,d\zeta\sqrt{cp} = & 13{,}5499216 \\ l\,vv = & \underline{10{,}0062746} \\ l\,-d\varphi = & 3{,}5436470 \\ & \underline{4{,}6855749} \\ l\,-d\varphi = & 8{,}2292219 \end{array}$$

priori valore in mutatione angulorum, posteriori longitudinum est utendum.

Nunc pro angulis λ et μ inveniendis erit

$$\begin{array}{rr} l\,\cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9879308 \\ l\,\cos\sigma = & 9{,}9820721 \\ l\,\sin\sigma = & \underline{9{,}4494849} \\ & 9{,}9700029 \\ & 9{,}4374156 \\ & \\ & \\ & +0{,}93326 \\ & \underline{+0{,}06227} \\ \cos\lambda = & +0{,}99554 \\ \lambda = & 5°25' \end{array} \qquad \begin{array}{rr} l\,\sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}3664562 \\ l\,\cos\omega = & \underline{9{,}9783702} \\ & 9{,}3448263 \\ l\,\sin\sigma = & 9{,}4494849 \\ l\,\cos\sigma = & \underline{9{,}9820721} \\ & 8{,}7943112 \\ & 9{,}3268985 \\ & +0{,}27379 \\ & \underline{-0{,}21227} \\ \sin\mu = & 0{,}06151 \\ \mu = & 3°32' \end{array}$$

unde distantia $MN = w$ ita invenitur:

$$\begin{array}{rrrr}
l\,v = & 5{,}0031373 & u = & 107382 \\
l\,\sin\lambda = & 8{,}9749328 & v\cos\lambda = & 100275 \\
l\,\cos\lambda = & 9{,}9980566 & u - v\cos\lambda = & 7106 \\
l\,v\sin\lambda = & 3{,}9780700 & l\,v\sin\lambda = & 3{,}9780700 \\
l\,v\cos\lambda = & 5{,}0011939 & l\,(u - v\cos\lambda) = & 3{,}8516532 \\
 & & l\,\tan\nu = & 10{,}1264169 \\
l\,\sin\nu = & 9{,}9036210 & \nu = & 53^\circ 13' \\
l\,w = & 4{,}0744491 & w = & 11870 \\
 & & l\,u = & 5{,}0309304 \\
l\,\frac{c}{w} = & 0{,}9255509 & l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9690696 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7766527 & l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}9072087 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 597{,}933 & \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}8076
\end{array}$$

ergo

$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 597{,}126 \quad \text{et} \quad l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}7760657\,.$$

Pro variatione parametri p:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0094118 \\
l\,u = & 5{,}0309304 \\
l\,\sin\mu = & 8{,}7889736 \\
l\ldots = & 2{,}7760657 \\
l\,-d\varphi = & 8{,}2292219 \\
 & 4{,}8346035
\end{array}$$

erit ergo $dp = 2n \cdot 68329$ seu $dp = +136657\,n$, minor quam die praecedente.

Pro variatione semiaxis transversi r:

$$\begin{array}{rrrr}
l\,\frac{qrr}{p} = & 3{,}2280108 & l\,\frac{q}{p} = & 3{,}2280108 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0094118 & l\,v = & 5{,}0031373 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7766527 & l\,\cos\lambda = & 9{,}9980566 \\
l\,-d\varphi = & 8{,}2292219 & l\,-\sin s = & 9{,}9526685 \\
l\,-\sin s = & 9{,}9526685 & & 8{,}1818731 \\
 & 4{,}1959657 & -\frac{qv}{p}\cos\lambda\sin s = & +0{,}01520 \\
 & & \sin\mu = & 0{,}06151 \\
 & & \ldots = & 0{,}07671 \\
 & & l\ldots = & 8{,}8848802 \\
 & & l\,u = & 5{,}0309304 \\
 & & l\,\frac{v}{c} = & 0{,}0031373 \\
 & & l\,-d\varphi(\quad) = & 1{,}0052876 \\
 & & & 4{,}9242355
\end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{pars I} &= -2n \cdot 15702 \\ \text{pars II} &= \underline{+2n \cdot 83992} \\ dr &= +2n \cdot 68289 \\ dr &= +136578\,n \end{aligned}$$

Pro excentricitatis q variatione:

$$\begin{aligned} l\,dp &= 5{,}1356335 \\ l\,qr &= \underline{3{,}2278867} \\ & \ 1{,}9077467 \\ & \ -80{,}862 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l\,p &= 4{,}9998759 \\ l\,dr &= \underline{5{,}1353817} \\ & \ 0{,}1352576 \\ l\,qrr &= \underline{8{,}2278867} \\ & \ 1{,}9073709 \\ & \ +80{,}792 \end{aligned}$$

$$2\,dq = -0{,}070\,n \quad \text{et} \quad dq = -0{,}035\,n\,.$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$\begin{aligned} l\,p &= 4{,}9998759 \\ l\,v &= \underline{5{,}0031373} \\ l\,(1 + q\cos s) &= 9{,}9967387 \\ l\ \cos\lambda &= 9{,}9980566 \\ l\ \cos s &= \underline{-9{,}6459619} \\ & \ -9{,}6407572 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 + q\cos s &= 1{,}99252 \\ l\,(2 + q\cos s) &= 0{,}2994024 \\ l\ \sin\mu &= 8{,}7889736 \\ l\ \sin s &= \underline{-9{,}9526685} \\ & \ -9{,}0410445 \end{aligned}$$

$$\text{pars postrema} = -0{,}43728 - 0{,}10991 = -0{,}54719$$

$$\begin{aligned} l\ \text{partis postremae} &= -9{,}7381377 \\ l\left(\tfrac{c^3}{w^3} - \tfrac{c^3}{u^3}\right) &= 2{,}7760657 \\ l\,u &= \underline{5{,}0309304} \\ & \ -7{,}5451338 \\ l\,p &= \underline{4{,}9998759} \\ & \ -2{,}5452579 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l\,\tfrac{c^3}{w^3} &= 2{,}7766527 \\ l\ \cos s &= \underline{-9{,}6459619} \\ & \ -2{,}4226146 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pars posterior} &= +350{,}96 \\ \text{pars prior} &= \underline{-264{,}62} \\ \text{aggregatum} &= +86{,}35 \\ l\ \text{aggregati} &= 1{,}9362377 \\ l\,\tfrac{v^3}{c^3} &= 0{,}0094118 \\ l\,d\varphi &= \underline{-3{,}5436470} \\ & \ -5{,}4892965 \\ l\,q &= \underline{8{,}2278867} \\ & \ -7{,}2614098 \end{aligned}$$

ergo

$$d\alpha = -18256177\,n \text{ min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$
\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0310545 & & \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0094118 & & \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}7760657 & & \\
l\,d\varphi = & -3{,}5436470 & l\,d\psi = & +5{,}1761201 \\
l\,\sin\sigma = & 9{,}4494849 & l\,\sin\omega = & 9{,}4884240 \\
l\,\sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}3664562 & l\,\cot\sigma = & 0{,}5325873 \\
\hline
[l\,-d\psi] = & -5{,}1761201 & [l\,d\omega] = & +5{,}1971314
\end{array}
$$

ergo

$$d\psi = +150010\,n \text{ min. sec.}\,, \qquad d\omega = +157446\,n \text{ min. sec.}$$

Calculus pro intervallo a 27 ad 28 Aprilis

Cum sit $p = 99971$, $q = 0{,}0169$, $r = 100000$ et $\omega = 17°56'$, erit $v = 100750$, $u = 108969$, $\sigma = 15°23'$, $s = -117°14'$, $\vartheta-\psi = 14°21'$, [unde pro $d\varphi$ inveniendo]

$$
\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0032451 & l\,c\,d\zeta\,\sqrt{cp} = & 13{,}5499216 \\
 & & l\,vv = & 10{,}0064901 \\
\hline
l\,u = & 5{,}0373049 & l\,-d\varphi = & 3{,}5434315 \\
l\,p = & 4{,}9998759 & & 4{,}6855749 \\
\hline
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0374290 & l\,-d\varphi = & 8{,}2290063
\end{array}
$$

hinc pro angulis λ et μ

$$
\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9862241 & l\,\sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}3943306 \\
l\,\cos\sigma = & 9{,}9841548 & l\,\cos\omega = & 9{,}9783702 \\
\hline
l\,\sin\sigma = & 9{,}4236974 & & 9{,}3727008 \\
\hline
 & 9{,}9703789 & l\,\sin\sigma = & 9{,}4236974 \\
 & 9{,}4099216 & l\,\cos\sigma = & 9{,}9841548 \\
\hline
 & & & 8{,}7963982 \\
 & & & 9{,}3568556 \\
 & +0{,}93407 & & +0{,}25699 \\
 & +0{,}06257 & & -0{,}22743 \\
\hline
\cos\lambda = & +0{,}99664 & \sin\mu = & 0{,}02956 \\
\lambda = & 4°42' & l\,\sin\mu = & 8{,}4706907
\end{array}
$$

unde colligitur distantia w

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0032451 & u = & 108969 \\
l\,\sin\lambda = & 8{,}9130893 & v\cos\lambda = & \underline{100412} \\
l\,\cos\lambda = & \underline{9{,}9985399} & u - v\cos\lambda = & \underline{8558} \\
l\,v\sin\lambda = & 3{,}9163343 & l\,v\sin\lambda = & 3{,}9163343 \\
l\,v\cos\lambda = & 5{,}0017849 & l\,(u - v\cos\lambda) = & \underline{3{,}9323549} \\
 & & l\,\tan\nu = & 9{,}9839794 \\
l\,\sin\nu = & 9{,}8413270 & \nu = & 43^\circ 57' \\
l\,w = & 4{,}0750073 & & \\
l\,\frac{c}{w} = & 0{,}9249927 & l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9626951 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7749780 & l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}8880852 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 595{,}63 & \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}7728
\end{array}$$

$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 594{,}86\,, \quad l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}7744142\,.$$

Pro variatione parametri p:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0097352 \\
l\,u = & 5{,}0373049 \\
l\,\sin\mu = & 8{,}4706907 \\
l\ldots = & 2{,}7744142 \\
l\,-d\varphi = & \underline{8{,}2290063} \\
 & +4{,}5211513
\end{array}$$

ergo $dp = 2n \cdot 33201$ seu $dp = +66402 \cdot n$, $l\,dp = 4{,}8221813 + l\,n$.

Pro variatione semiaxis transversi r:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\frac{qrr}{p} = & 3{,}2280108 & l\,\frac{q}{p} = & 3{,}2280108 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0097352 & l\,v = & 5{,}0032451 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7749780 & l\,\cos\lambda = & 9{,}9985399 \\
l\,d\varphi = & -8{,}2290063 & l\,\sin s = & \underline{-9{,}9489752} \\
l\,\sin s = & \underline{-9{,}9489752} & & -8{,}1787709 \\
 & +4{,}1907055 & [-\frac{qv}{p}\cos\lambda\sin s] = & +0{,}01509 \\
 & & \sin\mu = & \underline{0{,}02956} \\
 & & \ldots & 0{,}04465 \\
 & & l\ldots & 8{,}6498400 \\
 & & l\,u = & 5{,}0373049 \\
 & & l\,\frac{v}{c} = & 0{,}0032451 \\
 & & l\,-d\varphi(\quad) = & \underline{1{,}0034205} \\
 & & & 4{,}6938105
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} \text{pars I} &=& -2n\cdot 15513 \\ \text{pars II} &=& +2n\cdot 49410 \\ \hline dr &=& +2n\cdot 33896 \\ dr &=& +67792\,n \end{array}$$

Pro variatione excentricitatis q:

$$\begin{array}{rr} l\,dp = & 4{,}8221813 \\ l\,qr = & 3{,}2278867 \\ \hline & 1{,}5942946 \\ & -39{,}291\,n \end{array} \qquad \begin{array}{rr} l\,p = & 4{,}9998759 \\ l\,dr = & 4{,}8311805 \\ \hline & 9{,}8310564 \\ l\,qrr = & 8{,}2278867 \\ \hline & 1{,}6031697 \\ & +40{,}102\,n \end{array}$$

$$2\,dq = -0{,}811\,n \quad \text{et} \quad dq = -0{,}406\,n\,.$$

Pro variatione anguli $☊LB = \alpha$:

$$\begin{array}{rr} l\,p = & 4{,}9998759 \\ l\,v = & 5{,}0032451 \\ \hline l\,(1+q\cos s) = & 9{,}9966309 \\ l\ \cos\lambda = & 9{,}9985399 \\ l\ \cos s = & -9{,}6605005 \\ \hline & -9{,}6556713 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 2+q\cos s = & 1{,}99227 \\ l\,(2+q\cos s) = & 0{,}2993487 \\ l\ \sin\mu = & 8{,}4706907 \\ l\ \sin s = & -9{,}9489752 \\ \hline & -8{,}7190146 \end{array}$$

$$\text{pars postrema} = -0{,}45255 - 0{,}05236 = -0{,}50492$$

$$\begin{array}{rcr} l\ \text{partis postremae} &=& -9{,}7032197 \\ l\ \left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) &=& 2{,}7744142 \\ l\ -\frac{u}{p} &=& -0{,}0374290 \\ \hline && 2{,}5150629 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7749780 \\ l\ \cos s = & -9{,}6605005 \\ \hline & -2{,}4354786 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} \text{pars posterior} &=& +327{,}388 \\ \text{pars prior} &=& -272{,}570 \\ \hline \text{aggregatum} &=& +54{,}818 \\ l\ \text{aggregati} &=& 1{,}7389217 \\ l\,\frac{v^3}{c^3} &=& 0{,}0097352 \\ l\ -d\varphi &=& 3{,}5434315 \\ l\,\frac{1}{q} &=& 1{,}7721133 \\ \hline && -7{,}0642016 \end{array}$$

ergo

$$d\alpha = -11593154\,n\ \text{min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0374290 & & \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0097352 & & \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}7744142 & l\,d\psi = & 5{,}1830378 \\
l\,d\varphi = & -3{,}5434315 & l\ \sin\omega = & \underline{9{,}4884240} \\
l\ \sin\sigma = & 9{,}4236974 & & 4{,}6714619 \\
l\ \sin(\vartheta-\psi) = & \underline{9{,}3943306} & l\ \tan\sigma = & \underline{9{,}4395426} \\
 & -5{,}1830378 & & 5{,}2319192
\end{array}$$

ergo

$$d\psi = +152419\,n \text{ min. sec.}\,, \qquad d\omega = 170577\,n \text{ min. sec.}$$

Calculus pro intervallo a 28 ad 29 Aprilis

Hic erit $v = 100775$, $u = 110559$, $\sigma = 14°25'$, $s = -118°12'$ et $\vartheta-\psi = 15°14'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0033528 & l\,c\,d\zeta\sqrt{cp} = & 13{,}5499216 \\
 & & l\,vv = & \underline{10{,}0067056} \\
l\,u = & 5{,}0435942 & l\,d\varphi = & -3{,}5432160 \\
l\,p = & \underline{4{,}9998759} & & \underline{4{,}6855749} \\
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0437182 & l\,d\varphi = & -8{,}2287908
\end{array}$$

nunc pro angulis λ et μ

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\ \cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9844549 & l\ \sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}4196934 \\
l\ \cos\sigma = & 9{,}9861045 & l\ \cos\omega = & \underline{9{,}9783702} \\
l\ \sin\sigma = & \underline{9{,}3961499} & & 9{,}3980636 \\
 & 9{,}9705594 & l\ \sin\sigma = & 9{,}3961499 \\
 & 9{,}3806048 & l\ \cos\sigma = & \underline{9{,}9861045} \\
 & & & 8{,}7942134 \\
 & & & 9{,}3841681 \\
 & +0{,}93446 & & +0{,}24022 \\
 & \underline{+0{,}06226} & & \underline{-0{,}24220} \\
\cos\lambda = & +0{,}99672 & \sin\mu = & -0{,}00198 \\
\lambda = & 4°39' & l\ \sin\mu = & -7{,}2964549
\end{array}$$

unde colligitur distantia $MN = w$ hoc modo

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0033528 & u = & 110559 \\
l\,\sin\lambda = & 8{,}9082473 & v\cos\lambda = & \underline{100444} \\
l\,\cos\lambda = & \underline{9{,}9985722} & \ldots = & \underline{10115} \\
l\,v\sin\lambda = & 3{,}9116001 & l\,v\sin\lambda = & 3{,}9116001 \\
l\,v\cos\lambda = & 5{,}0019250 & l\,\ldots = & \underline{4{,}0049569} \\
 & & l\,\tan\nu = & 9{,}9066431 \\
l\,\sin\nu = & 9{,}7978277 & \nu = & 38^\circ 53' \\
l\,w = & 4{,}1137724 & & \\
l\,\frac{c}{w} = & 0{,}8862276 & l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9564058 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}6586828 & l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}8692175 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 455{,}70 & \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}740
\end{array}$$

$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 454{,}96\,, \quad l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}6579771\,.$$

Pro variatione parametri p:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0100584 \\
l\,u = & 5{,}0435942 \\
l\,\sin\mu = & -7{,}2964549 \\
l\ldots = & 2{,}6579771 \\
l\,d\varphi = & \underline{-8{,}2287908} \\
 & +3{,}2368754
\end{array}$$

ergo $dp = -2n \cdot 1725$ seu $dp = -3451\,n$, $l\,dp = -3{,}5379053$.

Pro variatione semiaxis transversi r:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\frac{qrr}{p} = & 3{,}2280108 & l\,\frac{q}{p} = & 3{,}2280108 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0100584 & l\,v\cos\lambda = & 5{,}0019250 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}6586828 & l\,\sin s = & \underline{-9{,}9451255} \\
l\,d\varphi = & -8{,}2287908 & & -8{,}1750612 \\
l\,\sin s = & \underline{-9{,}9451255} & & +0{,}01496 \\
 & +4{,}0706683 & \sin\mu = & \underline{-0{,}00198} \\
 & & \ldots & 0{,}01299 \\
 & & l\,\ldots & 8{,}1134561 \\
 & & l\,u = & 5{,}0435942 \\
 & & l\,\frac{v}{c} = & 0{,}0033528 \\
 & & l\,d\varphi = & -8{,}2287908 \\
 & & l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = & \underline{2{,}6579771} \\
 & & & -4{,}0471710
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \text{pars I} & = & -2n\cdot 11767 \\ \text{pars II} & = & +2n\cdot 11147 \\ \hline dr & = & -2n\cdot 620 \\ \text{seu}\quad dr & = & -1239\,n \end{array}$$

[Pro variatione excentricitatis q :]

$$\begin{array}{rr} l\,dp = & -3{,}5379053 \\ l\,qr = & 3{,}2278867 \\ \hline & -0{,}3100186 \\ & +2{,}0418 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} l\,p = & 4{,}9998759 \\ l\,dr = & 3{,}0932365 \\ \hline & -8{,}0931125 \\ l\,qrr = & 8{,}2278867 \\ \hline & -9{,}8652258 \\ & -0{,}7332 \end{array}$$

$$2\,dq = +1{,}3086\,n \quad \text{et} \quad dq = +0{,}6543\,n\,.$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$\begin{array}{rr} l\,p = & 4{,}9998759 \\ l\,v = & 5{,}0033528 \\ \hline l\,(1+q\cos s) = & 9{,}9965231 \\ l\,\cos\lambda = & 9{,}9985722 \\ l\,\cos s = & -9{,}6744485 \\ \hline & -9{,}6695438 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 2+q\cos s = & 1{,}99203 \\ l\,(2+q\cos s) = & 0{,}2992950 \\ l\,\sin\mu = & -7{,}2964549 \\ l\,\sin s = & -9{,}9451255 \\ \hline & +7{,}5408754 \end{array}$$

$$\text{pars postrema } = -0{,}46724 + 0{,}00347 = -0{,}46377$$

$$\begin{array}{rcr} l\text{ partis postremae} & = & -9{,}6663024 \\ l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) & = & +2{,}6579771 \\ l\,\frac{u}{p} & = & 0{,}0437182 \\ \hline & & -2{,}3679977 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}6586828 \\ l\,\cos s = & -9{,}6744485 \\ \hline & -2{,}3331313 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} \text{pars posterior} & = & +233{,}35 \\ \text{pars prior} & = & -215{,}34 \\ \hline \text{aggregatum} & = & +18{,}00 \\ l\text{ aggregati} & = & 1{,}2553031 \\ l\,\frac{v^3}{c^3} & = & 0{,}0100584 \\ l\,d\varphi & = & -3{,}5432160 \\ l\,\frac{1}{q} & = & 1{,}7721133 \\ \hline & & -6{,}5806908 \end{array}$$

ergo

$$d\alpha = -3807946\,n\ \text{min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0437182 & & \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0100584 & & \\
l\ \ldots = & 2{,}6579771 & l\,d\psi = & 5{,}0708129 \\
l\,d\varphi = & -3{,}5432160 & l\ \sin\omega = & 9{,}4884240 \\
l\ \sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) = & 8{,}8158433 & l\ \cot\sigma = & 0{,}5899546 \\
\hline
l\ -d\psi = & -5{,}0708129 & & +5{,}1491916
\end{array}$$

ergo

$$d\psi = +117710\,n \text{ min. sec.}\,, \qquad d\omega = 140991\,n \text{ min. sec.}$$

Calculus pro intervallo a 29 ad 30 Aprilis

Hic erit $v = 100800$, $u = 112150$, $\sigma = 13°27'$, $s = -119°10'$ et $\vartheta - \psi = 16°6'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0034605 & l\,c\,d\zeta\,\sqrt{cp} = & 13{,}5499216 \\
 & & l\,vv = & 10{,}0069211 \\
l\,u = & 5{,}0497988 & l\,d\varphi = & -3{,}5430005 \\
l\,p = & 4{,}9998759 & & 4{,}6855749 \\
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0499229 & l\,d\varphi = & -8{,}2285754
\end{array}$$

nunc pro angulis λ et μ

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\ \cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9826296 & l\ \sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}4429010 \\
l\ \cos\sigma = & 9{,}9879223 & l\ \cos\omega = & 9{,}9783702 \\
l\ \sin\sigma = & 9{,}3666036 & & 9{,}4212712 \\
 & 9{,}9705519 & l\ \sin\sigma = & 9{,}3666036 \\
 & 9{,}3492331 & l\ \cos\sigma = & 9{,}9879223 \\
 & & & 8{,}7878748 \\
 & & & 9{,}4091935 \\
 & +0{,}93444 & & +0{,}22348 \\
 & +0{,}06136 & & -0{,}25656 \\
\cos\lambda = & +0{,}99580 & \sin\mu = & -0{,}03309 \\
\lambda = & 5°15' & l\ \sin\mu = & -8{,}5196384
\end{array}$$

unde colligitur distantia $MN = w$

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0034605 & u = & 112150 \\
l\,\sin\lambda = & 8{,}9617089 & v\cos\lambda = & 100377 \\ \cline{4-4}
l\,\cos\lambda = & 9{,}9981719 & \ldots = & 11773 \\ \cline{2-2}\cline{4-4}
l\,v\sin\lambda = & 3{,}9651695 & l\,v\sin\lambda = & 3{,}9651695 \\
l\,v\cos\lambda = & 5{,}0016324 & l\,\ldots = & 4{,}0708978 \\ \cline{4-4}
 & & l\,\tan\nu = & 9{,}8942717 \\
l\,\sin\nu = & 9{,}7902486 & \nu = & 38°6' \\
l\,w = & 4{,}1749209 & & \\
l\,\frac{c}{w} = & 0{,}8250791 & l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9502012 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}4752374 & l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}8506036 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 298{,}70 & \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}7089
\end{array}$$

$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 297{,}99\,, \quad l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}4742054\,.$$

Pro variatione semiparametri p:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0103816 \\
l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}4742054 \\
l\,u = & 5{,}0497988 \\
l\,\sin\mu = & -8{,}5196384 \\
l\,d\varphi = & -8{,}2285754 \\ \cline{2-2}
 & +4{,}2825996
\end{array}$$

ergo $dp = -2n \cdot 19169$ seu $dp = -38338\,n$ et $l\,dp = -4{,}5836296\,.$

Pro variatione semiaxis transversi r:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,\frac{qrr}{p} = & 3{,}2280108 & l\,\frac{q}{p} = & 3{,}2280108 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0103816 & l\,v\cos\lambda = & 5{,}0016324 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}4752374 & l\,\sin s = & -9{,}9411166 \\ \cline{4-4}
l\,d\varphi = & -8{,}2285754 & & -8{,}1707598 \\
l\,\sin s = & -9{,}9411166 & -\frac{qv\cos\lambda\sin s}{p} = & +0{,}01482 \\ \cline{2-2}
 & +3{,}8833217 & \sin\mu = & -0{,}03309 \\ \cline{4-4}
 & & \text{aggregatum} = & -0{,}01827 \\
 & & l\,\text{aggregati} = & -8{,}2617045 \\
 & & l\,\frac{uv}{c} = & 5{,}0532593 \\
 & & l\,-d\varphi = & 8{,}2285754 \\
 & & l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}4742054 \\ \cline{4-4}
 & & & -4{,}0177447
\end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{pars I} &= -2n\cdot 7644\\ \text{pars II} &= -2n\cdot 10417\\ \hline dr &= -2n\cdot 18061\\ \text{seu}\quad dr &= -36122\,n \end{aligned}$$

Quia ex p et r datur $q = \sqrt{\left(1-\frac{p}{r}\right)}$, non opus est quaerere dq.

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$\begin{aligned} l\,p &= 4{,}9998759\\ l\,v &= 5{,}0034605\\ \hline l\,(1+q\cos s) &= 9{,}9964154\\ l\,\cos\lambda &= 9{,}9981719\\ l\,\cos s &= -9{,}6878425\\ \hline & -9{,}6824298 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2+q\cos s &= 1{,}99178\\ l\,(2+q\cos s) &= 0{,}2992414\\ l\,\sin\mu &= -8{,}5196384\\ l\,\sin s &= -9{,}9411166\\ \hline & +8{,}7599964 \end{aligned}$$

$$\text{pars postrema} = -0{,}48132 + 0{,}05754 = -0{,}42377$$

$$\begin{aligned} l\text{ partis postremae} &= -9{,}6271322\\ l\ -\tfrac{u}{p} &= -0{,}0499229\\ l\left(\tfrac{c^3}{w^3}-\tfrac{c^3}{u^3}\right) &= 2{,}4742054\\ \hline & +2{,}1512605 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l\,\tfrac{c^3}{w^3} &= 2{,}4752374\\ l\,\cos s &= -9{,}6878425\\ \hline & -2{,}1630799 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pars posterior} &= +141{,}66\\ \text{pars prior} &= -145{,}57\\ \hline \text{aggregatum} &= -3{,}91\\ l\text{ aggregati} &= -0{,}5919947\\ l\,\tfrac{v^3}{c^3} &= 0{,}0103816\\ l\,d\varphi &= -3{,}5430005\\ l\,\tfrac{1}{q} &= 1{,}7721133\\ \hline & +5{,}9174901 \end{aligned}$$

erit ergo

$$d\alpha = +826971\,n \text{ min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$\begin{aligned} l\,\tfrac{u}{p} &= 0{,}0499229\\ l\,\tfrac{v^3}{c^3}\left(\tfrac{c^3}{w^3}-\tfrac{c^3}{u^3}\right) &= 2{,}4845870\\ l\,d\varphi &= -3{,}5430005\\ l\,\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) &= 8{,}8095046\\ \hline & -4{,}8870150 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l\,d\psi &= 4{,}8870150\\ l\,\sin\omega &= 9{,}4884240\\ l\,\cot\sigma &= 0{,}6213187\\ \hline l\,d\omega &= 4{,}9967578 \end{aligned}$$

ergo

$$d\psi = +77093\,n \text{ min. sec.} \qquad d\omega = +99256\,n \text{ min. sec.}$$

Calculus pro intervallo a 30 Aprilis ad 1 Maii

Hic erit $v = 100825$, $u = 113742$, $\sigma = 12°29'$, $s = -120°8'$ et $\vartheta - \psi = 16°56'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$$\begin{array}{rl}
l\,v = & 5{,}0035682 \\
 & \\
l\,u = & 5{,}0559197 \\
l\,p = & \underline{4{,}9998759} \\
l\,\frac{u}{p} = & 0{,}0560437
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
l\,c\,d\zeta\,\sqrt{cp} = & 13{,}5499216 \\
l\,vv = & \underline{10{,}0071365} \\
l\,d\varphi = & -3{,}5427851 \\
 & \underline{4{,}6855749} \\
l\,d\varphi = & -8{,}2283600
\end{array}$$

nunc pro angulis λ et μ

$$\begin{array}{rr}
l\,\cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9807540 \\
l\,\cos\sigma = & 9{,}9896095 \\
l\,\sin\sigma = & \underline{9{,}3347665} \\
 & 9{,}9703635 \\
 & 9{,}3155206 \\
 & \\
 & \\
 & +0{,}93404 \\
 & \underline{+0{,}05989} \\
\cos\lambda = & +0{,}99393 \\
\lambda = & 6°19'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
l\,\sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}4642407 \\
l\,\cos\omega = & \underline{9{,}9783702} \\
 & 9{,}4426109 \\
l\,\sin\sigma = & 9{,}3347665 \\
l\,\cos\sigma = & \underline{9{,}9896095} \\
 & 8{,}7773774 \\
 & 9{,}4322204 \\
 & +0{,}20679 \\
 & \underline{-0{,}27053} \\
\sin\mu = & -0{,}06375 \\
l\,\sin\mu = & -8{,}8044623
\end{array}$$

unde colligitur distantia $MN = w$

$$\begin{array}{rr}
l\,v = & 5{,}0035682 \\
l\,\cos\lambda = & 9{,}9973554 \\
l\,\sin\lambda = & \underline{9{,}0414840} \\
l\,v\cos\lambda = & 5{,}0009236 \\
l\,v\sin\lambda = & 4{,}0450522 \\
l\,\sin\nu = & 9{,}8021315 \\
l\,w = & 9{,}9137932 \\
l\,\frac{c}{w} = & 0{,}7570792 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}2712377 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 186{,}740
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
u = & 113742 \\
v\cos\lambda = & \underline{100213} \\
u - v\cos\lambda = & \underline{13529} \\
l\,v\sin\lambda = & 4{,}0450522 \\
l\,(u - v\cos\lambda) = & \underline{4{,}1312590} \\
l\,\tan\nu = & 9{,}9137932 \\
\nu = & 39°21' \\
l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9440803 \\
l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}8322410 \\
\frac{c^3}{u^3} = & 0{,}680
\end{array}$$

ergo

$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 186{,}061 \quad \text{et} \quad l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}2696544\,.$$

Pro variatione semiparametri p:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0107047 \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}2696544 \\
l\,u = & 5{,}0559197 \\
l\,\sin\mu = & -8{,}8044623 \\
l\,d\varphi = & -8{,}2283600 \\ \hline
 & +4{,}3691010
\end{array}$$

ergo $dp = -2\,n\cdot 23394$ seu $dp = -46788\,n$.

Pro variatione semiaxis transversi r:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{qrr}{p} = & 3{,}2280108 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0107047 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}2712377 \\
l\,d\varphi = & -8{,}2283600 \\
l\,\sin s = & -9{,}9369456 \\ \hline
 & +3{,}6752587
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
l\,\frac{q}{p} = & 3{,}2280108 \\
l\,v\cos\lambda = & 5{,}0009236 \\
l\,\sin s = & -9{,}9369456 \\ \hline
 & -8{,}1658799 \\
 & +0{,}01465 \\
\sin\mu = & -0{,}06375 \\ \hline
\ldots = & -0{,}04910 \\
l\,\ldots = & -8{,}6910457 \\
l\,u = & 5{,}0559197 \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}2696544 \\
l\,d\varphi = & -8{,}2283600 \\
l\,\frac{v}{c} = & 0{,}0035682 \\ \hline
 & +4{,}2485479
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
\text{pars I} & = & -2n\cdot 4734 \\
\text{pars II} & = & -2n\cdot 17723 \\ \hline
dr & = & -2n\cdot 22458 \\
dr & = & -44916\,n
\end{array}$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$\begin{array}{rr}
l\,p = & 4{,}9998759 \\
l\,v = & 5{,}0035682 \\ \hline
l\,(1+q\cos s) = & 9{,}9963077 \\
l\,\cos\lambda = & 9{,}9973554 \\
l\,\cos s = & -9{,}7007158 \\ \hline
 & -9{,}6943789
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
2+q\cos s = & 1{,}9915 \\ \hline
l\,(2+q\cos s) = & 0{,}2991878 \\
l\,\sin\mu = & -8{,}8044623 \\
l\,\sin s = & -9{,}9369456 \\ \hline
 & +9{,}0405956
\end{array}$$

$$\text{pars postrema } = -0{,}49474 + 0{,}10980 = -0{,}38494$$

$$\begin{aligned} l \text{ partis postremae } &= -9{,}5853974 \\ l\,\tfrac{u}{p} &= 0{,}0560437 \\ l\left(\tfrac{c^3}{w^3}-\tfrac{c^3}{u^3}\right) &= 2{,}2696544 \\ \hline l \text{ partis posterioris } &= -1{,}9110954 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} l\,\tfrac{c^3}{w^3} &= 2{,}2712377 \\ l\,\cos s &= -9{,}7007158 \\ \hline l \text{ partis prioris } &= -1{,}9719535 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pars posterior } &= +81{,}488 \\ \text{pars prior } &= -93{,}746 \\ \hline \text{aggregatum } &= -12{,}258 \\ l \text{ aggregati } &= -1{,}0884138 \\ l\,\tfrac{v^3}{c^3} &= 0{,}0107047 \\ l\,d\varphi &= -3{,}5427851 \\ l\,\tfrac{1}{q} &= 1{,}7721133 \\ \hline & \ +6{,}4140169 \end{aligned}$$

ergo

$$d\alpha = +2594280\,n \text{ min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$\begin{aligned} l\,\tfrac{u}{p} &= 0{,}0560437 \\ l\,v^3\left(\tfrac{1}{w^3}-\tfrac{1}{u^3}\right) &= 2{,}2803590 \\ l\,d\varphi &= -3{,}5427851 \\ l\,\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) &= 8{,}7990072 \\ \hline l\,-d\psi &= -4{,}6781951 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} l\,d\psi &= 4{,}6781951 \\ l\,\sin\omega &= 9{,}4884240 \\ l\,\cot\sigma &= 0{,}6548430 \\ \hline l\,d\omega &= 4{,}8214621 \end{aligned}$$

ergo

$$d\psi = +47665\,n \text{ min. sec.}\,, \qquad d\omega = 66292\,n \text{ min. sec.}$$

Calculus pro intervallo a 1 ad 2 Maii

Hic erit $v = 100850$, $u = 115334$, $\sigma = 11^\circ 31'$, $s = -121^\circ 6'$ et $\vartheta - \psi = 17^\circ 45'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo:

$$\begin{aligned} l\,v &= 5{,}0036759 \\ \\ l\,u &= 5{,}0619577 \\ l\,p &= 4{,}9998759 \\ \hline l\,\tfrac{u}{p} &= 0{,}0620817 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} l\,c\,d\zeta\sqrt{cp} &= 13{,}5499216 \\ l\,vv &= 10{,}0073518 \\ \hline l\,d\varphi &= -3{,}5425698 \\ & \ \ \ 4{,}6855749 \\ \hline l\,d\varphi &= -8{,}2281446 \end{aligned}$$

nunc pro angulis λ et μ

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\ \cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9788338 & l\ \sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}4839474 \\
l\ \cos\sigma = & 9{,}9911670 & l\ \cos\omega = & \underline{9{,}9783702} \\
l\ \sin\sigma = & \underline{9{,}3002758} & & \underline{9{,}4623176} \\
& 9{,}9700008 & l\ \sin\sigma = & 9{,}3002758 \\
& 9{,}2791096 & l\ \cos\sigma = & \underline{9{,}9911670} \\
& & & 8{,}7625934 \\
& & & 9{,}4534846 \\
& +0{,}93326 & & +0{,}19016 \\
& \underline{+0{,}05789} & & \underline{-0{,}28411} \\
\cos\lambda = & 0{,}99114 & \sin\mu = & -0{,}09395 \\
\lambda = & 7^\circ 38' & l\ \sin\mu = & -8{,}9729105
\end{array}$$

unde colligitur distantia $MN = w$

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
l\,v = & 5{,}0036759 & u = & 115334 \\
l\ \cos\lambda = & 9{,}9961370 & v\cos\lambda = & \underline{99957} \\
l\ \sin\lambda = & \underline{9{,}1231561} & u - v\cos\lambda = & \underline{15377} \\
l\,v\cos\lambda = & 4{,}9998129 & l\,v\sin\lambda = & 4{,}1268320 \\
l\,v\sin\lambda = & 4{,}1268320 & l\,(u - v\cos\lambda) = & \underline{4{,}1868758} \\
l\ \sin\nu = & 9{,}8173943 & l\ \tan\nu = & 9{,}9399562 \\
l\,w = & 4{,}3094377 & \nu = & 41^\circ 3' \\
l\,\frac{c}{w} = & 0{,}6905623 & l\,\frac{c}{u} = & 9{,}9380423 \\
l\,\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}0716869 & l\,\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}8141270 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 117{,}95 & \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}65
\end{array}$$

$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 117{,}30 \qquad \text{et} \qquad l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}0692801\,.$$

Pro variatione semiparametri p:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0110277 \\
l\ \ldots = & 2{,}0692801 \\
l\,u = & 5{,}0619577 \\
l\ \sin\mu = & -8{,}9729105 \\
l\,d\varphi = & \underline{-8{,}2281446} \\
& +4{,}3433206
\end{array}$$

ergo $dp = -2\,n \cdot 22046$ seu $dp = -44091\,n\,.$

Pro variatione semiaxis r:

$$\begin{aligned}
l\,\tfrac{qrr}{p} &= 3{,}2280108 \\
l\,\tfrac{v^3}{c^3} &= 0{,}0110277 \\
l\,\tfrac{c^3}{w^3} &= 2{,}0716869 \\
l\,d\varphi &= -8{,}2281446 \\
l\ \sin s &= \underline{-9{,}9326092} \\
& +3{,}4714792
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
l\,\tfrac{q}{p} &= 3{,}2280108 \\
l\,v\cos\lambda &= 4{,}9998129 \\
l\ \sin s &= \underline{-9{,}9326092} \\
& -8{,}1604329 \\
& +0{,}01447 \\
\sin\mu &= \underline{-0{,}09395} \\
& -0{,}07948 \\
l\ \ldots &= -8{,}9002805 \\
l\,\tfrac{uv}{c} &= 5{,}0656336 \\
l\,d\varphi &= -8{,}2281446 \\
l\left(\tfrac{c^3}{w^3}-\tfrac{c^3}{u^3}\right) &= \underline{2{,}0692801} \\
& +4{,}2633388
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{pars I} &= -2n\cdot 2961 \\
\text{pars II} &= \underline{-2n\cdot 18337} \\
dr &= -2n\cdot 21299 \\
dr &= -42597\,n
\end{aligned}$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$\begin{aligned}
l\,p &= 4{,}9998759 \\
l\,v &= \underline{5{,}0036759} \\
l\,(1+q\cos s) &= 9{,}9962000 \\
l\ \cos\lambda &= 9{,}9961370 \\
l\ \cos s &= \underline{-9{,}7130983} \\
& -9{,}7054354
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2+q\cos s &= 1{,}9913 \\
l\,(2+q\cos s) &= 0{,}2991342 \\
l\ \sin\mu &= -8{,}9729105 \\
l\ \sin s &= \underline{-9{,}9326092} \\
& +9{,}2046539
\end{aligned}$$

$$\text{pars postrema} = -0{,}50750 + 0{,}16020 = -0{,}34730$$

$$\begin{aligned}
l\ \text{partis postremae} &= -9{,}5407078 \\
l\ \ldots &= 2{,}0692801 \\
l\,\tfrac{u}{p} &= \underline{0{,}0620817} \\
& -1{,}6720697
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
l\,\tfrac{c^3}{w^3} &= 2{,}0716869 \\
l\ \cos s &= \underline{-9{,}7130983} \\
& -1{,}7847852
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr}
\text{pars posterior} & = & +46{,}997 \\
\text{pars prior} & = & -60{,}924 \\
\hline
\text{aggregatum} & = & -13{,}927 \\
l\ \text{aggregati} & = & -1{,}1438452 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} & = & 0{,}0110277 \\
l\,d\varphi & = & -3{,}5425698 \\
l\,\frac{1}{q} & = & 1{,}7721133 \\
\hline
 & & +6{,}4695560
\end{array}$$

ergo

$$d\alpha = +2948193\,n \text{ min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$\begin{array}{rr}
l\,\frac{u}{p}\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}1313618 \\
l\,\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0110277 \\
l\,d\varphi = & -3{,}5425698 \\
l\ \sin\sigma\sin(\vartheta - \psi) = & 8{,}7842232 \\
\hline
 & -4{,}4691825
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & \\
l\,d\psi = & 4{,}4691825 \\
l\ \sin\omega = & 9{,}4884240 \\
l\ \cot\sigma = & 0{,}6908912 \\
\hline
 & 4{,}6484978
\end{array}$$

ergo

$$d\psi = +29457\,n \text{ min. sec.}\,, \quad d\omega = 44514\,n \text{ min. sec.}$$

Conclusio

Cum variationes inventae sint admodum notabiles, simili modo tam ante terminum 25 Aprilis quam post 2 Maii definiri debent. Quas igitur computavi hic simul aspectui exponam[78]:

Intervallum	dp	dr	$d\alpha$	$d\psi$	$d\omega$
Aprilis					
14 – 15	$+\ 11629\,n$	$+\ 11355\,n$	$-\ 1200751\,n$	$+\ 2\,n$	$+\ 1\,n$
15 – 16	$+\ 14378\,n$	$+\ 14067\,n$	$-\ 1495986\,n$	$+\ 363\,n$	$+\ 219\,n$
16 – 17	$+\ 17831\,n$	$+\ 17470\,n$	$-\ 1866797\,n$	$+\ 927\,n$	$+\ 583\,n$
17 – 18	$+\ 22239\,n$	$+\ 21815\,n$	$-\ 2341520\,n$	$+\ 1800\,n$	$+\ 1182\,n$
18 – 19	$+\ 27946\,n$	$+\ 27440\,n$	$-\ 2959152\,n$	$+\ 3156\,n$	$+\ 2167\,n$
19 – 20	$+\ 35612\,n$	$+\ 34999\,n$	$-\ 3793555\,n$	$+\ 5309\,n$	$+\ 3820\,n$
20 – 21	$+\ 45971\,n$	$+\ 45225\,n$	$-\ 4932881\,n$	$+\ 8782\,n$	$+\ 6626\,n$
21 – 22	$+\ 60425\,n$	$+\ 59504\,n$	$-\ 6543516\,n$	$+\ 14596\,n$	$+\ 11577\,n$
22 – 23	$+\ 80280\,n$	$+\ 79139\,n$	$-\ 8804235\,n$	$+\ 24478\,n$	$+\ 20430\,n$
23 – 24	$+106763\,n$	$+105388\,n$	$-11927088\,n$	$+\ 41541\,n$	$+\ 36559\,n$
24 – 25	$+137732\,n$	$+136242\,n$	$-15841749\,n$	$+\ 70353\,n$	$+\ 65501\,n$
25 – 26	$+157776\,n$	$+156600\,n$	$-19077102\,n$	$+111542\,n$	$+110043\,n$
26 – 27	$+136657\,n$	$+136578\,n$	$-18256177\,n$	$+150010\,n$	$+157446\,n$
27 – 28	$+\ 66402\,n$	$+\ 67792\,n$	$-11593154\,n$	$+152419\,n$	$+170577\,n$
28 – 29	$-\ 3451\,n$	$-\ 1239\,n$	$-\ 3807946\,n$	$+117710\,n$	$+140991\,n$
29 – 30	$-\ 38338\,n$	$-\ 36122\,n$	$+\ 826971\,n$	$+\ 77093\,n$	$+\ 99256\,n$
30 – 1 Maii	$-\ 46788\,n$	$-\ 44916\,n$	$+\ 2594280\,n$	$+\ 47665\,n$	$+\ 66292\,n$
1 – 2	$-\ 44091\,n$	$-\ 42597\,n$	$+\ 2948193\,n$	$+\ 29457\,n$	$+\ 44514\,n$
2 – 3	$-\ 38283\,n$	$-\ 37104\,n$	$+\ 2773067\,n$	$+\ 18581\,n$	$+\ 30720\,n$
3 – 4	$-\ 32356\,n$	$-\ 31420\,n$	$+\ 2447652\,n$	$+\ 12008\,n$	$+\ 21900\,n$
4 – 5	$-\ 27169\,n$	$-\ 26417\,n$	$+\ 2111249\,n$	$+\ 7894\,n$	$+\ 16071\,n$
5 – 6	$-\ 22885\,n$	$-\ 22271\,n$	$+\ 1809702\,n$	$+\ 5289\,n$	$+\ 12152\,n$
6 – 7	$-\ 19392\,n$	$-\ 18884\,n$	$+\ 1552433\,n$	$+\ 3573\,n$	$+\ 9412\,n$

Si certiores essemus de elementis motus huius cometae, operae pretium esset hunc calculum ulterius tam in antecedentia quam consequentia extendere; nunc autem sufficiat coniectura tantum perturbationes in motu terrae ortas crassa Minerva colligere.

De variatione parametri

Semiparameter p usque ad 28 Aprilis augetur, tum vero iterum minuitur; verumtamen augmenta multum praevalent. Videtur autem totum augmentum

78 Editio princeps: Tabula ut in E 416, § 40. Hic correcta et aucta.

exsurgere ad $620000\,n$, unde cum ante cometae adventum fuerit semiparameter $p = 99971$, is deinceps erit[79] $= 99971 + 620000\,n$. Quare si massa cometae aequalis esset massae terrae, ob $n = \frac{1}{200000}$, fieret is[80] $= 99971 + 3\frac{1}{10}$; ac si massa cometae ad massam terrae rationem $= m : 1$ habere ponatur, in postremum erit semiparameter[81] $= 99971 + \frac{31m}{10}$.

De variatione axis transversi

Semiaxis transversus r, qui ante cometae adventum sumtus est $= 100000$, fere similes mutationes patitur, quae autem aliquantillum erunt minores, ita ut augmentum totum aestimari queat quasi[82] $= 630000\,n$, et semiaxis post discessum cometae[83] $= 100000 + 630000\,n$. Hinc posita ratione massae cometae ad massam terrae $= m : 1$, erit semiaxis in posterum[84] $= 100000 + \frac{63m}{20}$.

De variatione excentricitatis

Cum sit in genere excentricitas $q = \sqrt{\left(1-\frac{p}{r}\right)}$, eaque ante cometae adventum fuerit $= 0{,}0169$, erit ea deinceps[85]

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{99971 + 3{,}1\,m}{100000 + 3{,}15\,m}\right)} = \sqrt{(0{,}00028561 + 0{,}000000491\,m)}\ ,$$

ideoque fiet excentricitas[86]

$$= 0{,}0169 + 0{,}000015\,m\ ,$$

hoc est aliquanto maior quam ante. Quare si massa cometae centies superaret massam terrae, ut esset $m = 100$, foret excentricitas[87] $= 0{,}0184$, maximaque solis aequatio multo minor esset futura.

79 Editio princeps: $= 97144 + 700000\,n$.
80 Editio princeps: $= 97144 + 3\frac{1}{2}$.
81 Editio princeps: $= 97144 + \frac{7m}{2}$.
82 Editio princeps: $= 690000\,n$.
83 Editio princeps: $= 100000 + 690000\,n$.
84 Editio princeps: $= 100000 + \frac{69m}{20}$.
85 Editio princeps:
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{97144 - 3{,}5\,m}{100000 + 3{,}45\,m}\right)} = \sqrt{(0{,}01856 - 0{,}0000015\,m)}\ .$$
86 Editio princeps: $= 0{,}0169 - 0{,}000044\,m$, hoc est aliquanto minor quam ante.
87 Editio princeps: $= 0{,}0125$.

De variatione anni solaris

Ob auctum axem transversum quantitas anni solaris augebitur in ratione

$$1 : \left(1 + \frac{63\,m}{2000000}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 : 1 + \frac{189\,m}{4000000}\,.$$

Cum igitur ante adventum cometae annus fuerit $365^d 5^h 49' = 525949'$, annus in posterum augmentum capiet $= 25\,m$ min. primorum. Dum ergo cometa esset terrae aequalis, annus 25 min. primis produceretur, fieretque $= 365^d 6^h 14'$. Ac si cometa adeo centies terram superaret, anni quantitas augmentum caperet 41 horarum, qui effectus sane foret stupendus.

De variatione lineae absidum

Usque ad diem 29 Aprilis linea absidum maxime promovetur, tum vero iterum repellitur; sed promotio plurimum praevalet atque ad minimum $100000000\,n$ aestimanda videtur. Hinc si ut hactenus massa cometae m vicibus maior ponatur quam massa terrae, ab actione cometae linea absidum orbitae terrae per spatium $500\,m$ min. sec. promovebitur. Ergo si cometa terrae esset aequalis, haec promotio esset $= 8'20''$, sin autem centies esset maior, foret ea $13°53'20''$.

De variatione lineae nodorum et inclinationis

Linea nodorum seu intersectio $L☊$ ab actione cometae super eius orbita ad minimum promovebitur per spatium[88] $950000\,n$ min. sec. et inclinatio fere tantundem augebitur: unde utraque perturbatio erit[89] $47\frac{1}{2}\,m$ min. sec., quae eo minus est dubia, cum actio cometae perpetuo augmenta producat.

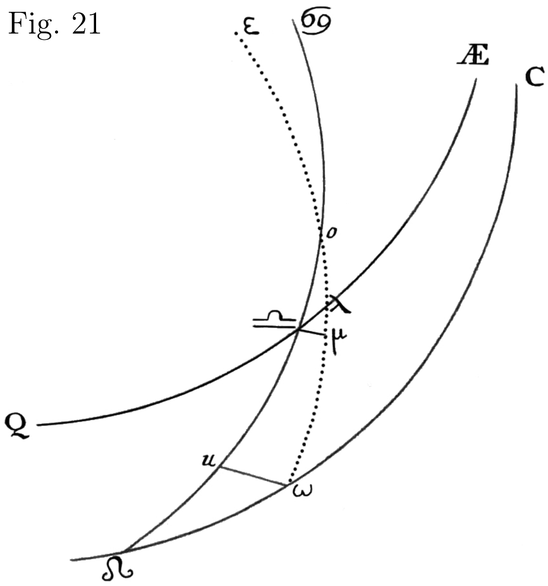
Consideremus (Fig. 21[90]) haec elementa in coelo, sitque $☊C$ via cometae, ☊♎♋ ecliptica ante adventum cometae, erit angulus $♎☊C = 17°56' = ☊$, et arcus $☊♎ = 51°16'$, per ♎ vero transibit aequator $Æ♎Q$ faciens cum ecliptica angulum $Æ♎♋ = 23°28\frac{1}{2}'$. Post effectum autem cometae sit circulus $\varepsilon o \lambda \omega$ ecliptica secans priorem in o, erit $☊\omega = d\psi$ et $C\omega o = ☊ + d\omega$. Ducatur arculus ωu ad $☊o$ normalis, erit $☊u = d\psi \cos ☊$ et $\omega u = d\psi \sin ☊$; ponatur tantisper $☊o = z$, erit $\sin z : \sin(z - d\psi \cos ☊) = \sin(☊ + d\omega) : \sin ☊$, unde fit $\tan z = \dfrac{d\psi \sin ☊}{d\omega}$. Quia ergo $d\omega = d\psi$, erit $l\ \tan z = l\ \sin ☊ = 9{,}4884240$, ac propterea $z = ☊o = 17°7'$; tum vero, ob $o \sin z = d\psi \sin ☊$, erit $o = \dfrac{d\psi \sin ☊}{\sin z} = 1{,}0462\,d\psi = 50\,m$ min. sec., ob $d\psi = d\omega = 47\frac{1}{2}\,m$. Cum ergo sit $♎o = -34°9'$, ecliptica quasi gyratur

88 Recte: linea nodorum ad minimum per spatium $900000\,n$ min. sec., inclinatio ad minimum per spatium $1000000\,n$ min. sec.

89 Recte: $d\psi = 4\frac{1}{2}\,m$ min. sec.

90 Haec figura in editione principe non contenta ex E 416 translata est.

Fig. 21



circa punctum ♏ $4°9'$ per angulum $50\,m$ min. sec., ita ut punctum solstitiale ♋ magis ab aequatore removeatur et obliquitas eclipticae augeatur. Ducta ♎μ ad $o\omega$ normali, erit ♎$\mu = -50\,m \sin 34°9'$, hincque

$$♎\lambda = -\frac{50\,m \cdot \sin 34°9'}{\sin 23°28\tfrac{1}{2}'} \quad \text{et} \quad \mu\lambda = -\frac{50\,m \cdot \sin 34°9'}{\tan 23°28\tfrac{1}{2}'}\ .$$

Unde si obliquitas eclipticae pristina vocetur $= \varepsilon$ et nova $= \varepsilon + d\varepsilon$, erit

$$\sin\varepsilon : \sin(\varepsilon + d\varepsilon) = \sin(-34°9' - \mu\lambda) : \sin(-34°9')\ ,$$

seu

$$d\varepsilon = 50\,m \cos 34°9' = 41\,m \text{ sec.}\ ;$$

et cum sit $\mu\lambda = -63\,m$ sec., puncta aequinoctialia super ecliptica per $63\,m$ sec. promota erunt censenda, super aequatore autem per spatium $70\,m$ sec. In latitudine igitur stellarum, quarum longitudo est ♌ $4°9'$, iste effectus maxime spectabitur, dum stellarum borealium latitudo minuetur, australium vero augebitur particula $50\,m$ sec. In stellis vero sub longitudine ♒ $4°9'$ sitis contrarium eveniet.

Si massa cometae multum superet massam terrae, hae perturbationes ad enormem quantitatem exsurgere poterunt, ita ut effectum non solum in Astronomia, sed etiam in vita communi simus sensuri. Quin etiam, cum de elementis orbitae cometae non simus satis certi, error in eam partem incidere posset, ut omnes hae perturbationes multo adeo maiores essent prodituri, quam hic invenimus. Omnino autem etiamsi ob errores has perturbationes minui oporteret, et massa cometae minor esset quam terrae, tamen ab hoc tempore novam quasi epocham constitui conveniet, pro qua novae tabulae solares ante omnia essent condendae, quod negotium nonnisi pluribus elapsis annis perfici poterit. Lunares autem tabulae multo maiorem ac difficiliorem emendationem requisiturae videntur.

SOLUTIO DUORUM PROBLEMATUM, ASTRONOMIAM MECHANICAM SPECTANTIUM

Commentatio 835 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 2, 1862, p. 317–332
(Kommentar zu E 835)

1. **Problema I.** Si corpus sphaeroidicum ex materia homogenea conflatum attrahatur ad centrum virium O, cuius vis sit reciproce proportionalis quadratis distantiarum, invenire mediam directionem, secundum quam hoc corpus urgebitur (Fig. 1).

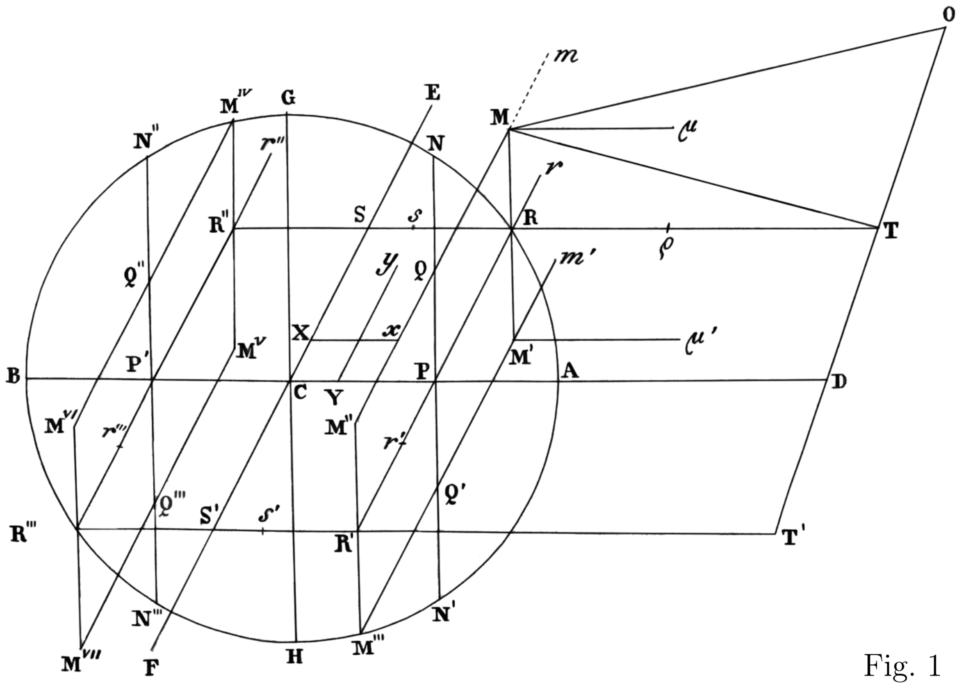


Fig. 1

Solutio. Repraesentet circulus $AGBH$ sectionem huius corporis per eius centrum C ad axem normaliter factam, seu sit iste circulus planum aequatoris huius corporis sphaeroidici propositi, in plano tabulae exhibitum, et recta EF, quae huic plano normaliter insistere concipienda est, referat axem corporis, cuius idcirco poli sint in E et F. Ponatur radius aequatoris $CA = CB = a$, semissis axis $CE = CF = b$. Sit centrum virium ubicunque situm in O, unde ad planum aequatoris demittatur perpendiculum OD; per D et centrum C agatur recta $DACB$, huicque diameter perpendicularis GH. Vocetur distantia $CD = f$ et $OD = g$, ita ut sit $\sqrt{(ff + gg)}$ distantia centri virium O a centro corporis C.

Iam consideretur corporis quaecunque particula M, unde ad planum aequatoris demittatur perpendicularis MQ, et per Q diametro AB normalis ducatur corda NPN'. Vocentur nunc coordinatae $CP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$; per P quoque axi EF parallela agatur recta RPR', et per M ipsi NN' parallela MRM', atque per R traiiciatur TR ipsi DC parallela, erit

$$DT = PR = QM = z\,, \quad MR = PQ = y\,, \quad TR = DP = f - x \text{ et } TO = g - z\,.$$

Hinc fiet $TM = \surd\big((f-x)^2 + yy\big)$, et distantia puncti M a centro virium O, nempe recta

$$MO = \surd\big(yy + (f-x)^2 + (g-z)^2\big)\,,$$

quae brevitatis gratia ponatur $= v$. Urgebitur ergo punctum M in directione MO vi acceleratrice quadrato v^2 reciproce proportionali; sit ergo haec vis $= \frac{kk}{vv}$, qua punctum M in directione MO sollicitatur. Resolvatur haec vis secundum directiones Mm, ipsi DO parallelam, et MT, eritque vis in directione $Mm = \frac{kk(g-z)}{v^3}$, et vis in directione $MT = \frac{kk\surd(yy+(f-x)^2)}{v^3}$, quae ulterius resolvatur secundum directiones $M\mu$, ipsi RT vel CD parallelam, et MR, eritque vis in directione $M\mu = \frac{kk(f-x)}{v^3}$, et vis in directione $MR = \frac{kky}{v^3}$. Sicque quodlibet punctum M tribus urgetur viribus secundum directiones ternis coordinatis x, y, z parallelas, nimirum:

$$\begin{aligned}
\text{secundum directionem } Mm, \text{ vi } &= \frac{kk(g-z)}{v^3}\,,\\
\text{secundum directionem } M\mu, \text{ vi } &= \frac{kk(f-x)}{v^3}\,,\\
\text{secundum directionem } MR, \text{ vi } &= \frac{kky}{v^3}\,.
\end{aligned}$$

Sumta iam $RM' = RM$ consideretur punctum M', quod iisdem coordinatis definietur, quibus punctum M, nisi quod sit y negativa; erit enim demisso ex M' in planum aequatoris perpendiculo $M'Q'$, $CP = x$, $PQ' = -y$ et $Q'M' = z$; unde punctum M', quia eius distantia ab O quoque est $= v$, urgebitur his viribus:

$$\begin{aligned}
\text{secundum directionem } M'm' &= \frac{kk(g-z)}{v^3}\,,\\
\text{secundum directionem } M'\mu' &= \frac{kk(f-x)}{v^3}\,,\\
\text{secundum directionem } M'R &= \frac{kky}{v^3}\,.
\end{aligned}$$

Quodsi ergo haec duo puncta iunctim considerentur, vires in directionibus MR et $M'R$ se mutuo destruent, et reliquae revocabuntur ad binas sequentes in puncto R applicatas:

$$\text{secundum directionem } Rr,\ \text{vis} = \frac{2kk(g-z)}{v^3}\ ,$$
$$\text{secundum directionem } RT,\ \text{vis} = \frac{2kk(f-x)}{v^3}\ .$$

Sumantur iam in inferiori hemisphaerio bina puncta M'' et M''' his respondentia, ita ut sit $QM'' = Q'M''' = QM$, ideoque $PR' = PR$, eritque pro his punctis coordinata z negativa. Ponatur eorum distantia a centro virium O

$$\sqrt{\left(yy + (f-x)^2 + (g+z)^2\right)} = u\ ,$$

atque ex istis binis punctis nascentur hae duae vires:

$$\text{secundum directionem } R'r',\ \text{vis} = \frac{2kk(g+z)}{u^3}\ ,$$
$$\text{secundum directionem } R'T',\ \text{vis} = \frac{2kk(f-x)}{u^3}\ .$$

Fiat nunc abscissa x negativa, seu capiatur $CP' = CP$, atque ex reliquis coordinatis definiantur simili modo quaterna puncta M^{IV}, M^{V}, M^{VI} et M^{VII}, ponaturque

$$\sqrt{\left(yy + (f+x)^2 + (g-z)^2\right)} = (v) \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(yy + (f+x)^2 + (g+z)^2\right)} = (u)\ ,$$

ac puncta haec quatuor praebebunt sequentes vires:

$$\text{secundum directionem } R''r'',\ \text{vis} = \frac{2kk(g-z)}{(v)^3}\ ,$$
$$R''T,\ \text{vis} = \frac{2kk(f+x)}{(v)^3}\ ,$$
$$R'''r''',\ \text{vis} = \frac{2kk(g+z)}{(u)^3}\ ,$$
$$R'''T',\ \text{vis} = \frac{2kk(f+x)}{(u)^3}\ .$$

Omnia ergo haec octo puncta, in singulis corporis octantibus similiter posita, coniunctim has praebebunt vires, quibus corpus sollicitabitur:

$$\begin{aligned}
\text{sec. directionem } PR,\ \text{vis} &= 2kkg\left(v^{-3} + u^{-3}\right) - 2kkz\left(v^{-3} - u^{-3}\right)\ ,\\
P'R'',\ \text{vis} &= 2kkg\left((v)^{-3} + (u)^{-3}\right) - 2kkz\left((v)^{-3} - (u)^{-3}\right)\ ,\\
Ss,\ \text{vis} &= 2kkf\left(v^{-3} + (v)^{-3}\right) - 2kkx\left(v^{-3} - (v)^{-3}\right)\ ,\\
S's',\ \text{vis} &= 2kkf\left(u^{-3} + (u)^{-3}\right) - 2kkx\left(u^{-3} - (u)^{-3}\right)\ .
\end{aligned}$$

Quemadmodum ergo hae vires sunt natae ex puncto M in primo sphaeroidis octante quadranti ACG sursum imminente assumto: si omnia istius octantis puncta hoc modo colligantur, prodibunt vires, quibus totum sphaeroides sollicitatur, eaeque iam habebuntur reductae ad binas directiones, quarum alterae axi EF, alterae diametro aequatoris AB sint parallelae.

Quo autem hae vires facilius colligi queant, eae, quae directiones habent parallelas, primo summari, tum vero earum momentum exprimi debet. Ita vires PR et $P'R''$ dabunt vim[1] Yy

$$=2kkg\left(v^{-3}+u^{-3}+(v)^{-3}+(u)^{-3}\right)-2kkz\left(v^{-3}-u^{-3}+(v)^{-3}-(u)^{-3}\right),$$

eiusque momentum respectu centri C seu axis GH sumtum erit

$$Yy\cdot CY=2kkgx\left(v^{-3}+u^{-3}-(v)^{-3}-(u)^{-3}\right)-2kkxz\left(v^{-3}-u^{-3}-(v)^{-3}+(u)^{-3}\right).$$

Deinde vires Ss et $S's'$ coalescent in unam vim Xx

$$=2kkf\left(v^{-3}+u^{-3}+(v)^{-3}+(u)^{-3}\right)-2kkx\left(v^{-3}+u^{-3}-(v)^{-3}-(u)^{-3}\right),$$

cuius momentum respectu eiusdem axis GH erit

$$Xx\cdot CX=2kkfz\left(v^{-3}+(v)^{-3}-u^{-3}-(u)^{-3}\right)-2kkxz\left(v^{-3}-(v)^{-3}-u^{-3}+(u)^{-3}\right).$$

Tribuatur nunc puncto M massa elementaris $dx\,dy\,dz$, per eamque singulae istae expressiones multiplicentur, et integratione ter debito modo instituta prodibunt tam vires totales Yy et Xx ex attractione totius sphaeroidis oriundae, quam earum momenta $Yy\cdot CY$ et $Xx\cdot CX$; quae deinceps in unam vim toti attractioni aequivalentem coniungi poterunt. Quo autem hae integrationes commodius absolvi possint, transformemus formulas v^{-3}, u^{-3}, $(v)^{-3}$ et $(u)^{-3}$ in series, quae, si distantia centri virium $\sqrt{(ff+gg)}$, quam ponamus $=h$, a centro sphaeroidis C fuerit valde magna, convergant. Cum igitur sit $v=\sqrt{(hh-2fx-2gz+yy+xx+zz)}$, erit[2]

$$\begin{aligned}
v^{-3}&=\frac{1}{h^3}+\frac{3fx+3gz}{h^5}-\frac{3yy+3xx+3zz}{2h^5}+\frac{15ffxx+30fgxz+15ggzz}{2h^7},\\
u^{-3}&=\frac{1}{h^3}+\frac{3fx-3gz}{h^5}-\frac{3yy+3xx+3zz}{2h^5}+\frac{15ffxx-30fgxz+15ggzz}{2h^7},\\
(v)^{-3}&=\frac{1}{h^3}-\frac{3fx-3gz}{h^5}-\frac{3yy+3xx+3zz}{2h^5}+\frac{15ffxx-30fgxz+15ggzz}{2h^7},\\
(u)^{-3}&=\frac{1}{h^3}-\frac{3fx+3gz}{h^5}-\frac{3yy+3xx+3zz}{2h^5}+\frac{15ffxx+30fgxz+15ggzz}{2h^7}.
\end{aligned}$$

1 Intellegimus: vires secundum PR et $P'R''$, vim secundum Yy.

Hinc igitur erit vis tota Yy ex attractione totius sphaeroidis orta[3]

$$Yy = \frac{8kkg}{h^3} \int dx\,dy\,dz \left(1 - \frac{3yy + 3xx + 9zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) ,$$

et vis tota Xx pro toto sphaeroide orta[4]

$$Xx = \frac{8kkf}{h^3} \int dx\,dy\,dz \left(1 - \frac{3yy + 9xx + 3zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) .$$

Deinde vero erunt momenta totalia

$$\begin{aligned} Yy \cdot CY &= \frac{24kkfg}{h^5} \int xx\,dx\,dy\,dz - \frac{120kkfg}{h^7} \int xxzz\,dx\,dy\,dz \,, \\ Xx \cdot CX &= \frac{24kkfg}{h^5} \int zz\,dx\,dy\,dz - \frac{120kkfg}{h^7} \int xxzz\,dx\,dy\,dz \,. \end{aligned}$$

Quoniam triplici integratione opus est, ponantur primo x et z constantes, ut obtineantur vires ex elementis secundum rectas RM sitis oriundae, eritque[5]

$$\begin{aligned} Yy &= \frac{8kkg}{h^3} \int y\,dx\,dz \left(1 - \frac{yy + 3xx + 9zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) , \\ Xx &= \frac{8kkf}{h^3} \int y\,dx\,dz \left(1 - \frac{yy + 9xx + 3zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) , \\ Yy \cdot CY &= \frac{24kkfg}{h^5} \int xxy\,dx\,dz - \frac{120kkfg}{h^7} \int xxzzy\,dx\,dz \,, \\ Xx \cdot CX &= \frac{24kkfg}{h^5} \int zzy\,dx\,dz - \frac{120kkfg}{h^7} \int xxzzy\,dx\,dz \,. \end{aligned}$$

Concipiatur iam recta RM usque ad superficiem sphaeroidis producta, atque y determinari debebit ex aequatione locali pro hac superficie sphaeroidica inter coordinatas x, y et z expressa, quae est $yy = aa - xx - \frac{aazz}{bb}$. Ponatur nunc z constans, ut integrationes pateant ad sectiones sphaeroidis parallelas aequatori secundum MR factas: hunc in finem ponatur $\sqrt{\left(aa - \frac{aazz}{bb}\right)} = p$, ut p sit radius huius sectionis, atque integrationem eousque extendi oportebit, donec fiat $x = p$.

2 Editio princeps: $-\dfrac{3fx + 3gz}{h^5}$ loco $-\dfrac{3fx - 3gz}{h^5}$; $-\dfrac{3fx - 3gz}{h^5}$ loco $-\dfrac{3fx + 3gz}{h^5}$; $3yy - 3xx - 3zz$ loco $3yy + 3xx + 3zz$.

3 Editio princeps: $-3xx - 9zz$ loco $+3xx + 9zz$.

4 Editio princeps: $-9xx - 3zz$ loco $+9xx + 3zz$.

5 Vide notas praecedentes.

Sit $\frac{aa}{bb} = n$, eritque pro hoc casu[6]

vis $Yy =$

$$\int \frac{8kkg\,dz}{h^3} \int dx \left(1 - \frac{aa + 2xx - (n-9)zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) \surd(pp - xx)\,,$$

vis $Xx =$

$$\int \frac{8kkf\,dz}{h^3} \int dx \left(1 - \frac{aa + 8xx - (n-3)zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) \surd(pp - xx)\,,$$

momentum $Yy \cdot CY =$

$$\int \frac{24kkfg\,dz}{h^5} \int xx\,dx\,\surd(pp - xx) - \int \frac{120kkfg\,dz}{h^7} \int xxzz\,dx \surd(pp - xx)\ ,$$

momentum $Xx \cdot CX =$

$$\int \frac{24kkfg\,dz}{h^5} \int zz\,dx\,\surd(pp - xx) - \int \frac{120kkfg\,dz}{h^7} \int xxzz\,dx \surd(pp - xx)\ .$$

Posita autem ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, si post integrationem fiat $x = p$, erit

$$\int dx\,\surd(pp - xx) = \frac{1}{4}\pi pp\ , \qquad \int xx\,dx\,\surd(pp - xx) = \frac{1}{16}\pi p^4\ ,$$

quibus valoribus substitutis erit[7]

$$\text{vis } Yy = \int \frac{2\pi kkgpp\,dz}{h^3} \left(1 - \frac{aa + \frac{1}{2}pp - (n-9)zz}{2hh} + \frac{\frac{15}{4}ffpp + 15ggzz}{2h^4}\right)\ ,$$

$$\text{vis } Xx = \int \frac{2\pi kkfpp\,dz}{h^3} \left(1 - \frac{aa + 2pp - (n-3)zz}{2hh} + \frac{\frac{15}{4}ffpp + 15ggzz}{2h^4}\right)\ ,$$

$$\text{momentum } Yy \cdot CY = \int \frac{3\pi kkfgp^4}{2h^5}\,dz - \int \frac{15\pi kkfgp^4zz}{2h^7}\,dz\ ,$$

$$\text{momentum } Xx \cdot CX = \int \frac{6\pi kkfgppzz}{h^5}\,dz - \int \frac{15\pi kkfgp^4zz}{2h^7}\,dz\ .$$

Est autem $pp = aa - nzz = aa - \frac{aazz}{bb}$, uti assumsimus, erit ergo $aa = nbb$ et $pp = n(bb - zz)$. Instituatur nunc ultima integratio, ac ponatur $z = b$, quoniam

6 Editio princeps: $aa - 2xx + (n-9)zz$ loco $aa + 2xx - (n-9)zz$; $aa - 8xx + (n-3)zz$ loco $aa + 8xx - (n-3)zz$.

7 Editio princeps: $aa - \frac{1}{2}pp + (n-9)zz$ loco $aa + \frac{1}{2}pp - (n-9)zz$; $aa - 2pp + (n-3)zz$ loco $aa + 2pp - (n-3)zz$.

est

$$\int pp\,dz = n\int dz\,(bb-zz) = \frac{2}{3}nb^3\,,$$
$$\int p^4\,dz = nn\int dz\,(bb-zz)^2 = \frac{8}{15}nnb^5\,,$$
$$\int ppzz\,dz = n\int zz\,dz\,(bb-zz) = \frac{2}{15}nb^5\,,$$
$$\int p^4zz\,dz = nn\int zz\,dz\,(bb-zz)^2 = \frac{8}{105}nnb^7\,,$$

integralia quaesita ita se habebunt[8]:

$$\text{vis } Yy = \frac{2\pi kkg}{h^3}\left(\frac{2}{3}nb^3 - \frac{3nb^5}{5hh} - \frac{2nnb^5}{5hh} + \frac{nnb^5ff+nb^5gg}{h^4}\right)\,,$$
$$\text{vis } Xx = \frac{2\pi kkf}{h^3}\left(\frac{2}{3}nb^3 - \frac{nb^5}{5hh} - \frac{4nnb^5}{5hh} + \frac{nnb^5ff+nb^5gg}{h^4}\right)\,,$$
$$\text{momentum } Yy\cdot CY = \frac{4\pi nnkkb^5fg}{5h^5} - \frac{4\pi nnkkb^7fg}{7h^7}\,,$$
$$\text{momentum } Xx\cdot CX = \frac{4\pi nkkb^5fg}{5h^5} - \frac{4\pi nnkkb^7fg}{7h^7}\,.$$

Massa autem totius sphaeroidis est $= \frac{4}{3}\pi aab = \frac{4}{3}\pi nb^3$, quae si dicatur $= M$, eaque in formulas inventas introducatur, reperietur

$$\text{vis } Yy = \frac{Mkkg}{h^3}\left(1 - \frac{9bb}{10hh} - \frac{3aa}{5hh} + \frac{3aaff}{2h^4} + \frac{3bbgg}{2h^4}\right)\,,$$
$$\text{vis } Xx = \frac{Mkkf}{h^3}\left(1 - \frac{3bb}{10hh} - \frac{6aa}{5hh} + \frac{3aaff}{2h^4} + \frac{3bbgg}{2h^4}\right)\,,$$
$$\text{momentum } Yy\cdot CY = \frac{3Mkkaafg}{5h^5} - \frac{3Mkkaabbfg}{7h^7}\,,$$
$$\text{momentum } Xx\cdot CX = \frac{3Mkkbbfg}{5h^5} - \frac{3Mkkaabbfg}{7h^7}\,.$$

Neglectis ergo in viribus Yy et Xx terminis praeter primum omnibus, erit

$$CY = \frac{3aaf}{5hh} \qquad \text{et} \qquad CX = \frac{3bbg}{5hh}\,,$$

sicque cognitis punctis Y et X, in quibus applicatae sunt concipiendae vires Yy et Xx, quarum directiones sunt axi sphaeroidis CE et diametro aequatoris BCA respective parallelae, innotescet media directio virium, quibus totum corpus ad centrum virium O sollicitatur. Ad hoc perficiendum concipiatur (Fig. 2) sectio

8 Editio princeps:
$$\text{vis } Yy = \frac{2\pi kkg}{h^3}\left(\frac{2}{3}nb^3 - \frac{3nb^5}{5hh} - \frac{2nnb^5}{5hh} - \frac{nnb^5ff+nb^5gg}{h^4}\right)$$

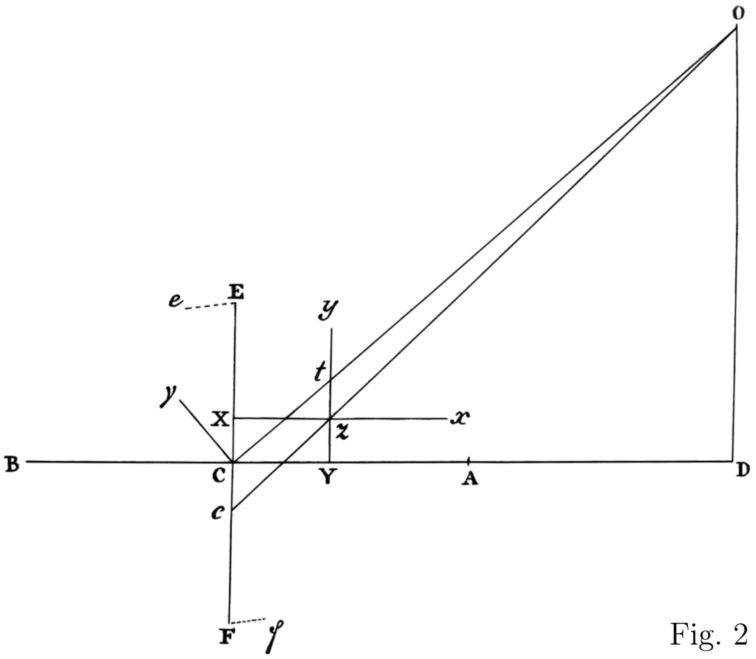


Fig. 2

sphaeroidis per eius axem ECF facta, in cuius plano situm sit centrum virium O, et AB sit diameter aequatoris in eodem plano ductus, erit $CE = CF = b$, $CA = CB = a$, $CD = f$, $OD = g$ et $CO = \sqrt{(ff + gg)} = h$, atque $\tan DCO = \frac{g}{f}$. Cum iam directiones binarum virium Xx et Yy se mutuo in z intersecent, media directio earum per punctum z transibit. Transit vero etiam per centrum virium O, eritque ergo haec media directio zO. Quantum autem a centro C distet, fiat haec proportio

$$CD(f) : DO(g) = CY\left(\frac{3aaf}{5hh}\right) : Yt\left(\frac{3aag}{5hh}\right) ;$$

erit ergo

$$zt = Yt - CX = \frac{3(aa - bb)g}{5hh} = Cc$$

proxime.

Media ergo directio virium corpus sollicitantium transit non per centrum C, sed per axis punctum inferius quodpiam c, ut sit $Cc = \frac{3(aa - bb)g}{5hh}$, atque haec directio cO per centrum virium O transibit. Denique tota haec vis erit proxime $cO = \frac{Mkk}{hh}$, seu accuratius:

$$cO = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa - bb)(2gg - ff)}{10h^4}\right) ,$$

unde actio vis centripetae determinari poterit. Q.E.I.

2. **Corollarium 1.** Nisi ergo corpus sit sphaericum seu $a = b$, neque directio vis, qua id versus centrum virium O sollicitatur, per centrum corporis C, quod simul est eius centrum gravitatis, transit, neque vis ipsa cO quadrato distantiae CO amplius est reciproce proportionalis.

3. **Corollarium 2.** Cum igitur motus corporis progressivus perinde se habeat, ac si ipsi in centro gravitatis C applicata esset vis aequalis ipsi

$$cO = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(2gg-ff)}{10h^4}\right),$$

et in directione ipsi cO parallela, haec vis neque per punctum O transibit, neque quadratis distantiarum CO erit reciproce proportionalis. Quamobrem semita corporis non erit ellipsis, in cuius altero foco sit punctum O: haecque aberratio eo erit notabilior, quo magis figura sphaeroidica a sphaerica discrepet.

4. **Corollarium 3.** Hoc quoque casu axis EF non situm sibi parallelum tenebit, sed a momento vis sollicitantis continuo declinabitur. Quoniam vero momenta $Yy \cdot CY$ et $Xx \cdot CX$ sunt inter se contraria, illud praevalebit si $a > b$, ideoque vis cO momentum ad axem EF versus situm ef inclinandum erit $= \frac{3Mkkfg(aa-bb)}{5h^5}$. Interim tamen haec vis, quia per axem transit, motum vertiginis non afficiet.

5. **Corollarium 4.** Sit nunc angulus, quo axis sphaeroidis ECF ad rectam CO inclinatur, $ECO = \varphi = COD$, et manente distantia $CO = h$, erit $CD = f = h\sin\varphi$ et $OD = g = h\cos\varphi$. Hinc itaque erit intervallum $Cc = \frac{3(aa-bb)\cos\varphi}{5h}$, denotante a semidiametrum aequatoris AC, et b semiaxem sphaeroidis CE.

6. **Corollarium 5.** Angulo porro hoc $ECO = \varphi$ loco rectarum f et g introducto, erit vis, qua sphaeroides in puncto c ad centrum virium O sollicitatur,

$$= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{10hh}\right)$$

seu, ob $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ et $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, erit haec vis

$$= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(1+3\cos 2\varphi)}{20hh}\right).$$

7. **Corollarium 6.** Si haec vis in directione parallela centro gravitatis C concipiatur applicata, eaque resolvatur secundum directiones CO, et $C\gamma$ ad CO in plano ECO normalem, reperietur[9]

$$\text{vis } CO = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(3+5\cos 2\varphi)}{20hh}\right)$$

9 Editio princeps: $(1+3\cos 2\varphi)$ loco $(3+5\cos 2\varphi)$.

et

$$\text{vis } C\gamma = \frac{Mkk}{hh} \cdot \frac{3(aa-bb)\sin 2\varphi}{10hh}\,.$$

8. **Corollarium 7.** Ob illam igitur vim CO, quatenus quadratis distantiarum CO non exacte est reciproce proportionalis, orbita, quam centrum C describet, aliquantum ab elliptica discrepabit; alterius autem vis $C\gamma$ effectus in hoc consistet, ut punctum C non in eodem plano moveatur.

9. **Corollarium 8.** Momentum denique, quo haec vis pollet ad axem corporis EF inclinandum et in situm ef compellendum, erit[10]

$$= \frac{3Mkk(aa-bb)\sin\varphi\cos\varphi}{5h^3} = \frac{3Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{10h^3}\,.$$

Est itaque ceteris paribus reciproce ut cubus distantiae CO. Ratione anguli $ECO = \varphi$ vero hoc momentum erit maximum, si hic angulus ECO fiat semirectus.

10. **Scholion 1.** Cum igitur ex observationibus summa cura ab Illustris Academiae Regiae Parisinae Membris tam in Gallia[11] quam in Lapponia[12] et America[13] institutis certissime evictum sit figuram terrae non esse sphaericam, sed sphaeroidicam compressam, cuius axis per polos ductus minor sit quam diameter aequatoris, hinc non levis mutatio tam in motu terrae quam in axis positione oriri debet. Quae ut definiri possit, non solum veram rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris determinari oportet, sed etiam utriusque quantitatem absolutam, quod sequenti modo non difficulter fieri poterit. Sit semidiameter aequatoris $= a$ et semiaxis per polos ductus $= b$, ponatur $b : a = 1 : 1+w$, ut sit $a = b + wb$, erit w fractio valde parva. Sit in quapiam terrae regione elevatio poli $= p$, erit quantitas gradus meridiani in hac regione

$$= 0{,}017453293\left(b + \frac{1}{2}wb - \frac{3}{2}wb\cos 2p\right)$$

seu

$$= \frac{b + \frac{1}{2}wb - \frac{3}{2}wb\cos 2p}{57{,}29577951}\,.$$

Gradus vero secundum longitudinem in circulo aequatori parallelo mensuratus erit

$$= 0{,}017453293\left(b + \frac{3}{2}wb - \frac{1}{2}wb\cos 2p\right)\cos p\,.$$

---

10 Editio princeps: $= \dfrac{2Mkk(aa-bb)\sin\varphi\cos\varphi}{5h^3} = \dfrac{Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{5h^3}\,.$

11 Picard, J. Cassini, C. F. Cassini. Cf. [Picard 1671], [Picard 1729], [Cassini 1716], [Cassini 1720], [Cassini 1742], [Cassini 1744].

12 Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier, Outhier.
Cf. [Maupertuis 1738], [Maupertuis 1740].

13 La Condamine, Bouguer, Godin. Cf. [La Condamine 1745].

Cum iam in Gallia sub elevatione poli $49°21'24''$ mensura gradus in meridiano inventa sit 57183 hexapedarum parisinarum[14], hinc deducitur sequens aequatio[15]:

$$b + 0{,}7087597 \cdot wb = 3276344\frac{1}{2}\,.$$

Sub circulo autem polari ab Illustri Praeside nostro de Maupertuis gradus meridiani definitur 57438 hexapedarum[16], pro elevatione poli[17] $66°30'$, unde sequitur haec aequatio:

$$b + 1{,}5229976\, wb = 3290955\,,$$

ex quibus duabus aequationibus invenitur

$$wb = 17944 \text{ hexaped. paris.}, \; b = 3263627, \text{ ac propterea } a = 3281570\,.$$

Erit ergo[18] semiaxis terrae $b = 3263627$ hexaped. paris. et semidiameter aequatoris $a = 3281570$ hexaped. paris., illiusque numeri ad hunc ratio proxime erit ut 182 ad 183, ita ut sit $w = \frac{1}{182}$ et $a = \frac{183}{182}b$. (*Scriptum autographum ad marginem*: Sub aequatore latitudine $1°$: 56725 toises, $b - wb = 3250103$, et ex circulo polari $wb = 16192$, $b = 3266295$, $a = 3282487$, ergo $a : b = 203 : 202$, $a : b = 201 : 200$.)

11. **Scholion 2.** Definita ergo figura et quantitate terrae, si vim, qua ad solem urgetur, spectamus, primum eius orbita aliquantillum ab elliptica recedet, quia vis, qua centrum terrae ad centrum solis sollicitatur, non perfecte est quadratis distantiarum reciproce proportionalis. Erit autem, ob $a = \left(1 + \frac{1}{182}\right) b$, $aa = \left(1 + \frac{1}{91}\right) bb$ proxime; ideoque vis, qua centrum terrae C ad solem pellitur, fiet $= \dfrac{Mkk}{hh}\left(1 - \dfrac{(1 + 3\cos 2\varphi)bb}{607hh}\right)$ proxime. Cum autem, posita parallaxi solis horizontali sub polis terrae $= 10''$, sit $\dfrac{b}{h} = \sin 10''$, ideoque $\dfrac{bb}{hh} = 0{,}00000000235$, erit haec vis $= \dfrac{Mkk}{hh}\left(1 - \dfrac{(1 + 3\cos 2\varphi)}{258249300000}\right)$, cuius differentia ab $\dfrac{Mkk}{hh}$ tantilla est, ut eius effectus omnino sentiri nequeat. Tum vero adest vis, qua terra de plano eclipticae detorquetur, cuius directio ad hoc planum normalis et sursum seu boream versus terram sollicitans erit $= \dfrac{Mkk}{hh} \cdot \dfrac{\sin 2\varphi}{129124650000}$, quae maxima est, quando sol proxime ad polum arcticum accedit, ubi fit $\varphi = 66\frac{1}{2}°$ ac $\sin 2\varphi = \sin 47° = 0{,}7313537$; sole autem in tropico capricorni versante, pari vi terra de ecliptica deorsum urgebitur; cum autem et haec vis sit minima, effectus erit imperceptibilis. Momentum

14 Cf. [Maupertuis 1740], p. LIV; [Cassini 1742], p. 289, et [E 132].
15 Nota: $p = 49°$.
16 Cf. [Maupertuis 1738], p. 125, et [E 132].
17 In Manuscripto interpolatum: $19'34''$.
18 Cf. [E 132].

autem, quo axis terrae inclinatur, polusque soli propior ab eo detorquetur, erit[19] $= \frac{3Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{10h^3} = \frac{Mkkbb\sin 2\varphi}{303h^3}$. Quia vero effectus minimus ab hac vi oriundus in accuratissimis observationibus animadverti potest, eam negligere non licebit.

12. **Scholion 3.** Terra deinde quoque ad lunam attrahitur, verum haec vis prae illa, qua ad solem urgetur, tam est exigua, ut in motu terrae vix perceptibilem alterationem efficiat. Quanquam ergo haec vis ad lunam tendens, ob figuram terrae sphaeroidicam, quadratis distantiarum non est reciproce proportionalis, sed ab hac proportione aliquantum recedit, tamen multo minus effectus inde in motu terrae oriundus ullo modo observabilis esse poterit. Aliter vero se res habet in illa vi, qua terra de plano eclipticae detruditur, quae ob lunae vicinitatem multo maior est simili illa vi a sole orta. Sit enim distantia lunae a terra $= H$ et vis attractiva acceleratrix $= \frac{KK}{HH}$, erit vis lunae ad terram de plano eclipticae depellendam tendens $= \frac{3MKK(aa-bb)\sin 2\varphi}{10H^4}$; vis solis autem similem effectum edens $= \frac{3Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{10h^4}$. Erit ergo vis lunae ad vim solis in similibus positionibus ut $\frac{KK}{H^4}$ ad $\frac{kk}{h^4}$. Verum ex aestu maris Newtonus conclusit[20] esse vim lunae ad mare movendum ad similem vim solis ut 4 ad 1, quam rationem quidem Celeberrimus Daniel Bernoulli multo minorem statuit[21], scilicet ut 5 : 2. Vires autem illae ad mare movendum sunt ut $\frac{KK}{H^3}$ ad $\frac{kk}{h^3}$; facto ergo $\frac{KK}{H^3} = \frac{4kk}{h^3}$, prodibit vis lunae ad terram de plano eclipticae deturbandam ad vim solis ut $\frac{4}{H}$ ad $\frac{1}{h}$, hoc est ut $4h$ ad H, quae ratio proxime erit ut 1333 ad 1, siquidem ponamus $h = 20000$ semidiametri terrae et $H = 60$; quare haec vis lunae plus quam millies excedit similem vim solis, eiusque ergo effectus non erit negligendus. Tum vero vis lunae ad axem terrae inclinandum impensa erit[22] $= \frac{3MKK(aa-bb)\sin 2\varphi}{10H^3}$, quae propterea secundum Newtonum quadruplo maior esse deberet quam vis solis; atque ex hoc fonte tam praecessio aequinoctiorum quam nutatio quaepiam axis terrae sequi debet, quem utrumque effectum, quantum principia Mechanicae etiamnunc cognita id permittunt, determinare conabor.

13. **Problema II.** Determinare motum axis terrae, quatenus is a vi solis perturbatur, seu nutationem axis terrae a vi solis oriundam definire (Fig. 3).

Solutio. Concipiamus centrum terrae in C quiescere solemque in ellipsi circa id revolvi; ad praesens enim propositum perinde est, sive motum annuum soli

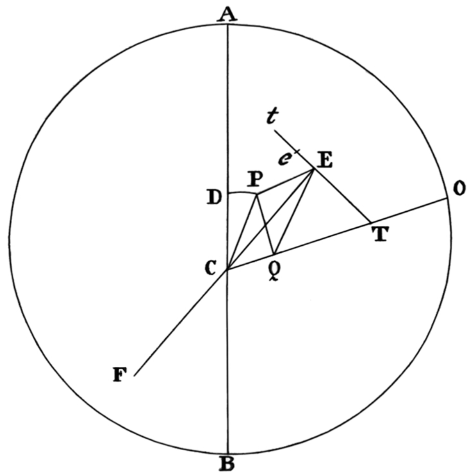
19 Editio princeps: $= \frac{Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{5h^3} = \frac{Mkkbb\sin 2\varphi}{455h^3}$.

20 [Newton 1687], Lib. III, Prop. 37, Probl. 18: Vis solis ad vim lunae ut 1 ad 4,4815.

21 Cf. [Bernoulli 1741], Chapitre VI; R 136, R 152 et R 153.

22 Editio princeps: $= \frac{MKK(aa-bb)\sin 2\varphi}{5H^3}$.

Fig. 3



tribuamus sive terrae. Repraesentet ergo planum tabulae planum eclipticae, sitque AOB orbita, in qua sol moveri videtur; sit A eius apogaeum, B perigaeum, et post tempus quodpiam t sol ex apogaeo pervenerit in situm O; vocetur semiaxis transversus orbitae solaris $= c$, excentricitas $= n$, erit $CA = (1+n)c$ et $CB = (1-n)c$. Anomalia autem vera tempori t respondens seu angulus ACO sit $= v$, et anomalia media $= u$, distantia $CO = z$. Hoc autem tempore axis terrae teneat situm CE, ita ut sumto E pro polo boreali sit $CE = b$. Ex E in planum eclipticae demittatur perpendiculum EP, ductaque CP vocentur anguli $ACP = \vartheta$ et $ECP = \varphi$, erit $EP = b\sin\varphi$ et $CP = b\cos\varphi$. Iam axis EC cum directione CO facit angulum ECO, ad quem inveniendum ex P in CO demittatur perpendiculum PQ, eritque et EQ ad CO perpendicularis. Cum iam sit angulus $OCP = v - \vartheta$, erit $PQ = b\cos\varphi\sin(v-\vartheta)$ et $CQ = b\cos\varphi\cos(v-\vartheta)$, unde fit $\frac{CQ}{CE} = \cos OCE = \cos\varphi\cos(v-\vartheta)$, qui est ille ipse angulus, quem superius $= \varphi$ vocavimus. Erit autem

$$\sin OCE = \surd\left(1 - \cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta)\right)$$

et

$$\sin 2OCE = 2\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\surd\left(1-\cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta)\right) .$$

Quoniam erit momentum vis solis ad hunc angulum OCE augendum[23]

$$= \frac{2Mkk(aa-bb)\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\surd(1-\cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta))}{5z^3} ,$$

pro quo brevitatis gratia scribatur Mp. Ducatur TEt normalis ad CE, eritque Et directio, secundum quam punctum E ab ista vi detorquebitur. Quantum autem detorqueatur, cognoscetur ex momento inertiae totius terrae respectu axis ad

23 Recte: $= \frac{3Mkk(aa-bb)\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\surd\left(1-\cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta)\right)}{5z^3}$, cf. § 4 et § 9.

CE normalis, hoc est respectu diametri aequatoris. Si igitur terra ex materia homogenea statuatur composita, respectu axis per aequatorem ducti reperitur momentum inertiae $= \frac{1}{5}M(aa+bb)$. Quodsi iam angulus OCE brevitatis gratia ponatur $= s$, mutatio ita erit comparata, ut tempusculo dt fiat

$$\frac{2\,dds}{dt^2} = \frac{Mp}{\frac{1}{5}(aa+bb)M} = \frac{5p}{aa+bb}\,,$$

ita ut sit

$$dds = \frac{5p\,dt^2}{2(aa+bb)}\,.$$

At est[24] $p = \frac{2kk(aa-bb)\sin s\cos s}{5z^3}$, ergo $dds = \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\sin s\cos s}{(aa+bb)z^3}$. Capiatur ergo Ee tantum, ut sit angulus $ECe = dds$, erit e punctum, in quod polus E tempusculo dt detorqueretur, si ante quievisset. Cum autem polo motus iam impressus concipi debeat, is ita erit comparatus, ut, si a nullis viribus urgeretur, uniformiter secundum circulum maximum esset progressurus. Quantum ergo hic motus a vi illa solis afficiatur, sequenti modo determinari poterit.

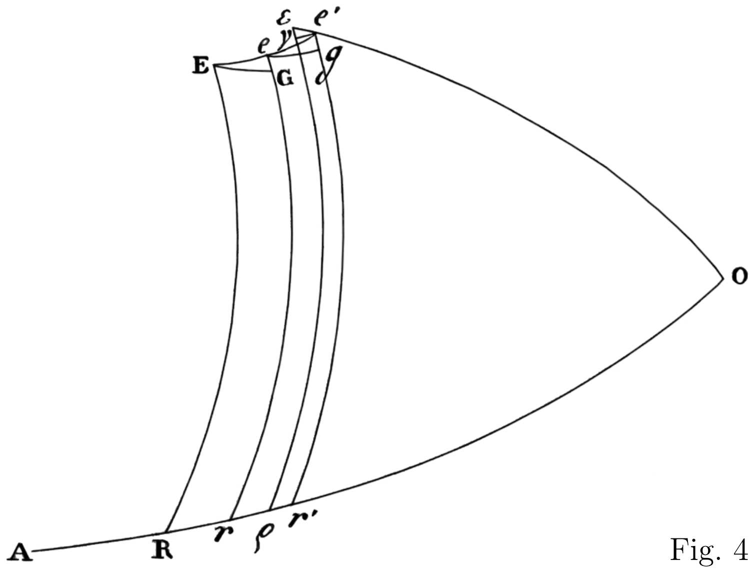


Fig. 4

Concipiatur (Fig. 4) in superficie sphaerae AO ecliptica, in eaque polus E, sumto A pro apogaeo solis. Ducatur ER ad AO normalis, erit $AR = \vartheta$ et $ER = \varphi$. Progrediatur motu iam concepto polus E tempusculo dt in e, erit $Rr = d\vartheta$ et $eG = d\varphi$, atque si motu uniformi secundum circulum maximum progrederetur, perveniret sequenti tempusculo in e', ut esset

$$rr' = d\vartheta + 2\,d\varphi\,d\vartheta\tan\varphi$$

24 Recte: $p = \frac{3kk(aa-bb)\sin s\cos s}{5z^3}$.

et

$$e'g = d\varphi - d\vartheta^2 \sin\varphi \cos\varphi \,,$$

quarum formularum demonstrationem deinceps tradam[25]. Iam capiatur $AO = v$, iunganturque circulo maximo puncta O et e', erit arcus $Oe' = s$, sumto puncto e' pro primo E, et $r'O$ seu $RO = v - \vartheta$, atque $r'e' = RE = \varphi$, unde erit $\cos s = \cos\varphi \cos(v - \vartheta)$, at erit $\sin Oe'r' = \dfrac{\sin(v-\vartheta)}{\sin s}$, seu $\tan Oe'r' = \dfrac{\tan(v-\vartheta)}{\sin\varphi}$, et $\cos Oe'r' = \dfrac{\sin\varphi\cos(v-\vartheta)}{\sin s}$. Nunc quia polus in hoc circulo Oe' pellitur, capiatur

$$e'\varepsilon = dds = \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\sin s\cos s}{(aa+bb)z^3}\,,$$

eritque ε punctum, ad quod polus fine alterius tempusculi dt reperietur; ducatur perpendiculum $\varepsilon\rho$, et $e'\gamma$ ad $\varepsilon\rho$ normalis, erit

$$\varepsilon\gamma = \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\cos s\sin\varphi\cos(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}$$

et

$$e'\gamma = \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\cos s\sin(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3} = r'\rho\cos\varphi\,,$$

ita ut sit

$$r'\rho = \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\sin(v-\vartheta)\cos(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}\,.$$

At est $r\rho = d\vartheta + dd\vartheta = rr' - r'\rho$ et $e'g + \varepsilon\gamma = d\varphi + dd\varphi$, unde fit

$$dd\vartheta = 2\,d\varphi\,d\vartheta\tan\varphi - \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\sin(v-\vartheta)\cos(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}\,,$$
$$dd\varphi = -d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{kk\,dt^2\,(aa-bb)\sin\varphi\cos\varphi\cos^2(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}\,,$$

quibus aequationibus motus poli E continetur, ita ut ex iis ad quodvis tempus positio axis CE definiri queat.

Quodsi vero loco temporis t anomaliam mediam u in calculum introducamus, reperietur $kk\,dt^2 = 2c^3\,du^2$, sicque simul quantitas kk ex calculo egreditur, eritque ergo

$$dd\vartheta = 2\,d\vartheta\,d\varphi\tan\varphi - \frac{2c^3\,du^2\,(aa-bb)\sin(v-\vartheta)\cos(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}\,,$$
$$dd\varphi = -d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2c^3\,du^2\,(aa-bb)\sin\varphi\cos\varphi\cos^2(v-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}\,.$$

25 Non exstat.

Posita autem anomalia media $= u$, quae anomaliae verae $ACO = v$ respondeat, ponatur anomalia excentrica $= r$, erit

$$\begin{aligned}
u &= r + n\sin r\,,\\
\cos v &= \frac{n+\cos r}{1+n\cos r}\,,\\
z &= c(1+n\cos r)\,,\\
du &= dr\,(1+n\cos r) = \frac{z\,dr}{c}\,,\\
\sin v &= \frac{\sin r\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos r}\,,\\
dv &= \frac{dr\,\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos r} = \frac{du\,\sqrt{(1-nn)}}{(1+n\cos r)^2}\,.
\end{aligned}$$

Cum iam du sit constans, erit introducendo r

$$ddr\,(1+n\cos r) - n\,dr^2\sin r = 0 \quad \text{seu} \quad ddr = \frac{n\,dr^2\sin r}{1+n\cos r}\,,$$

ideoque habebuntur hae duae aequationes:

$$\begin{aligned}
dd\vartheta &= 2\,d\vartheta\,d\varphi\tan\varphi - \frac{2(aa-bb)\,dr^2\sin(v-\vartheta)\cos(v-\vartheta)}{(aa+bb)(1+n\cos r)}\,,\\
dd\varphi &= -d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2(aa-bb)\,dr^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2(v-\vartheta)}{(aa+bb)(1+n\cos r)}\,;
\end{aligned}$$

multiplicetur prior per $d\vartheta\cos^2\varphi$ et posterior per $d\varphi$, ambaeque addantur, prodibit

$$\begin{aligned}
&d\vartheta\,dd\vartheta\cos^2\varphi + d\varphi\,dd\varphi - d\varphi\,d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi\\
&\quad = \frac{2(aa-bb)\,dr^2\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\,(d\varphi\sin\varphi\cos(v-\vartheta) - d\vartheta\cos\varphi\sin(v-\vartheta))}{(aa+bb)(1+n\cos r)}\,,
\end{aligned}$$

cuius pars prior est integrabilis; fiet enim

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,d\varphi^2 + \frac{1}{2}\,d\vartheta^2\cos^2\varphi\\
&= \frac{2(aa-bb)\,du^2}{aa+bb}\int\frac{\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\,(d\varphi\sin\varphi\cos(v-\vartheta) - d\vartheta\cos\varphi\sin(v-\vartheta))}{(1+n\cos r)^3}\,.
\end{aligned}$$

Ponatur $\dfrac{aa-bb}{aa+bb} = m$, eritque

$$\begin{aligned}
dd\vartheta &= 2\,d\vartheta\,d\varphi\tan\varphi - \frac{m\,du^2\sin 2(v-\vartheta)}{(1+n\cos r)^3}\,,\\
\frac{dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} + d\vartheta^2 &= \frac{m\,du^2\,(1+\cos 2(v-\vartheta))}{(1+n\cos r)^3}\,.
\end{aligned}$$

Quo clarius perspiciamus, quemadmodum has aequationes tractari conveniat, assumamus primo axem CE plano eclipticae normaliter insistere; et quia hoc casu angulus OCE est rectus, momentum vis inclinantis evanescit; quare si axis in hoc situ semel quieverit, in eodem perpetuo persistet. Id quod etiam ex aequationibus inventis intelligitur; cum enim sit $\cos\varphi = 0$ et $\tan\varphi = \infty$, prior aequatio dat $d\vartheta\, d\varphi = 0$ et altera $dd\varphi = 0$, quibus satisfit, si $d\varphi = 0$ seu si axis CE perpetuo ad planum eclipticae maneat perpendicularis.

Ponamus nunc axem in ipsum planum eclipticae incidere; et quia is ab momento vis solis de hoc plano non depellitur, perpetuo erit $\varphi = 0$, atque motus axis ex priori aequatione sola determinabitur, quae hoc casu abit in

$$dd\vartheta = -\frac{m\, du^2 \sin 2(v-\vartheta)}{(1+n\cos r)^3} \, .$$

Sit primo orbita circularis, seu $n = 0$ et $v = u$, erit $dd\vartheta + m\, du^2 \sin 2(u-\vartheta) = 0$. Fingatur $d\vartheta = \alpha\, du \cos 2(u-\vartheta) + P\, du$, erit

$$dd\vartheta = -2\alpha\, du^2 \sin 2(u-\vartheta) + 2\alpha\, du\, d\vartheta \sin 2(u-\vartheta) + dP\, du$$

seu

$$\begin{aligned} dd\vartheta = & -2\alpha\, du^2 \sin 2(u-\vartheta) + \alpha\alpha\, du^2 \sin 4(u-\vartheta) \\ & + 2\alpha P\, du^2 \sin 2(u-\vartheta) + dP\, du \\ = & -m\, du^2 \sin 2(u-\vartheta) \, . \end{aligned}$$

Fiat ergo $\alpha = \frac{1}{2}m$, ut sit

$$\frac{1}{4}mm\, du \sin 4(u-\vartheta) + mP\, du \sin 2(u-\vartheta) + dP = 0 \, .$$

Ponatur

$$P = \frac{1}{16}mm \cos 4(u-\vartheta) + Q \, ,$$

ob

$$du - d\vartheta = du - \frac{1}{2}m\, du \cos 2(u-\vartheta) - \frac{1}{16}mm\, du \cos 4(u-\vartheta) - Q\, du \, ,$$

erit

$$\begin{aligned} dP = & -\frac{1}{4}mm\, du \sin 4(u-\vartheta) + \frac{1}{8}m^3\, du \sin 4(u-\vartheta) \cos 2(u-\vartheta) \\ & + \frac{1}{64}m^4\, du \sin 4(u-\vartheta) \cos 4(u-\vartheta) + \frac{1}{4}mmQ\, du \sin 4(u-\vartheta) + dQ \\ = & -\frac{1}{4}mm\, du \sin 4(u-\vartheta) - \frac{1}{16}m^3\, du \sin 2(u-\vartheta) \cos 4(u-\vartheta) \\ & - mQ\, du \sin 2(u-\vartheta) \, , \end{aligned}$$

unde apparet Q habiturum esse coefficientem m^3, ideoque eius valorem tam fore exiguum, ut reiici queat. Erit ergo vero proxime

$$d\vartheta = \frac{1}{2}m\,du\cos 2(u-\vartheta) + \frac{1}{16}mm\,du\cos 4(u-\vartheta)\ ,$$

hincque integrando ponatur

$$\vartheta = C + \frac{1}{4}m\sin 2(u-\vartheta) + \frac{1}{64}mm\sin 4(u-\vartheta) + R\ ,$$

eritque

$$\begin{aligned} d\vartheta = \frac{1}{2}m\,du\cos 2(u-\vartheta) + \frac{1}{16}mm\,du\cos 4(u-\vartheta) + dR \\ - \frac{1}{2}m\,d\vartheta\cos 2(u-\vartheta) - \frac{1}{16}mm\,d\vartheta\cos 4(u-\vartheta)\ , \end{aligned}$$

quo valore substituto habebitur

$$\begin{aligned} dR = \frac{1}{4}mm\,du\cos^2 2(u-\vartheta) + \frac{1}{16}m^3\,du\cos 2(u-\vartheta)\cos 4(u-\vartheta) \\ + \frac{1}{256}m^4\,du\cos^2 4(u-\vartheta) \end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned} dR = \frac{1}{8}mm\,du + \frac{1}{8}mm\,du\cos 4(u-\vartheta) + \frac{1}{32}m^3\,du\cos 2(u-\vartheta) \\ + \frac{1}{32}m^3\,du\cos 6(u-\vartheta) + \frac{1}{512}m^4\,du + \frac{1}{512}m^4\,du\cos 8(u-\vartheta)\ , \end{aligned}$$

ergo

$$R = \frac{1}{8}mmu + \frac{1}{512}m^4u + \frac{1}{32}mm\sin 4(u-\vartheta)\ .$$

Consequenter habebitur[26]

$$\vartheta = C + \frac{1}{4}m\sin 2(u-\vartheta) + \frac{3}{64}m^2\sin 4(u-\vartheta) + \frac{1}{8}m^2u\ .$$

Potest autem hoc casu aequatio proposita $dd\vartheta + m\,du^2\,\sin 2(u-\vartheta) = 0$ absolute integrari, si multiplicetur per $2(du - d\vartheta)$, ut sit

$$2\,du\,dd\vartheta - 2\,d\vartheta\,dd\vartheta + 2m\,du^2\,(du - d\vartheta)\sin 2(u-\vartheta) = 0\ ,$$

erit enim

$$2\,du\,d\vartheta - d\vartheta^2 = C\,du^2 + m\,du^2\cos 2(u-\vartheta)\ ,$$

26 Reiectis terminis in quibus m ultra duas obtinet dimensiones, vide infra.

vel posito $u - \vartheta = s$, seu $\vartheta = u - s$, habebitur

$$du^2 - ds^2 = C\,du^2 + m\,du^2 \cos 2s\ ,$$

seu

$$ds^2 = du^2(\alpha - m\cos 2s)\ ,$$

hincque

$$du = \frac{ds}{\surd(\alpha - m\cos 2s)}\ ,$$

ubi α est constans a motu axis ipsi primum impresso pendens. Quoniam igitur assumimus, si momentum vis solis seu littera m evanescat, axem esse quieturum, posito $m = 0$, erit $ds = du$, ideoque $\alpha = 1$, ita ut sit $du = \frac{ds}{\surd(1 - m\cos 2s)}$, ex qua aequatione promotionem axis a vi solis oriundam definiri oportet. Cum iam sit m fractio valde parva, erit

$$\begin{aligned}\frac{1}{\surd(1 - m\cos 2s)} &= 1 + \frac{1}{2}m\cos 2s + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}m^2\cos^2 2s \\ &\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}m^3\cos^3 2s + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}m^4\cos^4 2s + \text{etc.}\end{aligned}$$

Potestatibus autem $\cos 2s$ ad cosinus angulorum multiplorum reductis, fiet

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\surd(1 - m\cos 2s)} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}m^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}m^4\right) + \left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}m^3\right)\cos 2s \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}m^2 + \frac{4}{8}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}m^4\right)\cos 4s + \frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}m^3\cos 6s \\ &\quad + \frac{1}{8}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}m^4\cos 8s + \text{etc.}\end{aligned}$$

Integrando ergo habebitur

$$\begin{aligned}u = g &+ \left(1 + \frac{3}{16}m^2 + \frac{105}{1024}m^4\right)s + \frac{1}{4}m\left(1 + \frac{15}{32}m^2\right)\sin 2s \\ &+ \frac{3}{64}m^2\left(1 + \frac{35}{48}m^2\right)\sin 4s + \frac{5}{384}m^3\sin 6s + \frac{35}{8192}m^4\sin 8s\ ;\end{aligned}$$

reiiciantur termini, in quibus m ultra duas obtinet dimensiones, eritque

$$u = g + u - \vartheta + \frac{3}{16}m^2u - \frac{3}{16}m^2\vartheta + \frac{1}{4}m\sin 2(u - \vartheta) + \frac{3}{64}m^2\sin 4(u - \vartheta)\ ,$$

seu

$$\vartheta = g + \frac{3}{16}m^2u + \frac{1}{4}m\sin 2(u - \vartheta) + \frac{3}{64}m^2\sin 4(u - \vartheta)\ ,$$

axis ergo durante quavis solis revolutione modo progredietur, modo regredietur per arcum $= \frac{1}{2}m$, ita ut, si $m = \frac{1}{200}$, hoc spatium futurum sit $= \frac{1}{400} = 0{,}14^\circ = 8'24''$. Tum vero qualibet revolutione solis, seu singulis annis, axis in ecliptica progredietur per spatium $= \frac{3}{16}m^2 \cdot 360^\circ$, quod ergo, si $m = \frac{1}{200}$, erit $= \frac{3 \cdot 360^\circ}{16 \cdot 40000} = 6''$.

Aliter autem res se habebit, si axis terrae ad eclipticam fuerit inclinatus; tum enim, posita orbita solis circulari, ut sit $n = 0$ et $v = u$, manente $\vartheta = u - s$, hae duo habebuntur aequationes resolvendae:

$$dds = 2(ds - du)\, d\varphi \tan\varphi + m\, du^2 \sin 2s\ ,$$

$$\frac{dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} + (du - ds)^2 = m\, du^2\, (1 + \cos 2s)\ .$$

Multiplicetur aequatio prior per $2q\, ds$ et posterior per $-dq$, ambaeque invicem addantur, erit

$$\begin{aligned} &2q\, ds\, dds - 4q\, ds\, (ds - du)\, d\varphi \tan\varphi - \frac{dq\, dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - dq\, (du - ds)^2 \\ &\quad = 2mq\, du^2\, ds \sin 2s - m\, du^2\, dq - m\, du^2\, dq \cos 2s\ , \end{aligned}$$

et partem posteriorem integrando fiet[27]

$$\begin{aligned} &C\, du^2 - mq\, du^2 - mq\, du^2 \cos 2s \\ &\quad = \int \Big(2q\, ds\, dds - 4q\, ds\, (ds - du)\, d\varphi \tan\varphi - \frac{dq\, dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - dq\, (du - ds)^2\Big)\ . \end{aligned}$$

Sit nunc $q = \cos^2\varphi$, erit $dq = -2\, d\varphi \sin\varphi\cos\varphi$, ideoque

$$\begin{aligned} &C\, du^2 - m\, du^2 \cos^2\varphi\, (1 + \cos 2s) \\ &\quad = \int \Big(2\, ds\, dds \cos^2\varphi - 4\, ds\, (ds - du)\, d\varphi \sin\varphi\cos\varphi \\ &\qquad\qquad + 2\, d\varphi\, dd\varphi + 2(du - ds)^2\, d\varphi \sin\varphi\cos\varphi\Big) \\ &\quad = \int \Big(2\, d\varphi\, dd\varphi + 2\, ds\, dds \cos^2\varphi \\ &\qquad\qquad - 2\, ds^2\, d\varphi \sin\varphi\cos\varphi + 2\, du^2\, d\varphi \sin\varphi\cos\varphi\Big) \\ &\quad = d\varphi^2 + ds^2 \cos^2\varphi - du^2 \cos^2\varphi\ . \end{aligned}$$

Quocirca erit

$$C\, du^2 = d\varphi^2 + (ds^2 - du^2)\cos^2\varphi + m\, du^2 \cos^2\varphi\, (1 + \cos 2s)\ .$$

27 Editio princeps: C loco $C\, du^2$.

Si iam sumamus casu, quo $m = 0$, axem quiescere, ut sit $ds = du$ et $d\varphi = 0$, fiet $C = 0$ et $\frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} = du^2 - ds^2 - m\,du^2\,(1 + \cos 2s)$, hincque

$$du = \sqrt{\frac{ds^2 + \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi}}{1 - m(1 + \cos 2s)}}\,.$$

Verum constantem C potius convenit definiri ex statu quopiam axis initiali. Si igitur assumamus principia, ubi axis primum a vi solis comitari coepit, fuisse angulum $s = u - \vartheta = \varepsilon$ et inclinationem $\varphi = \gamma$, in hoc statu motum axis nullum statui oportet, seu erit $d\vartheta = 0$ et $d\varphi = 0$, ideoque $ds = du$; quibus substitutis fiet $C\,du^2 = m\,du^2\cos^2\gamma\,(1 + \cos 2\varepsilon)$, unde hanc obtinemus aequationem:

$$m\,du^2\cos^2\gamma\,(1+\cos 2\varepsilon) = d\varphi^2 + ds^2\cos^2\varphi - du^2\cos^2\varphi + m\,du^2\cos^2\varphi\,(1+\cos 2s)\,,$$

ex qua oritur

$$du^2 = \frac{d\varphi^2 + ds^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + m\cos^2\gamma\,(1 + \cos 2\varepsilon) - m\cos^2\varphi\,(1 + \cos 2s)}\,.$$

Quoniam inclinatio φ minime a primitiva γ discrepat, ponatur $\varphi = \gamma + \omega$, erit ω quantitas minima, et $d\omega$ prae ds pro evanescente haberi potest. Fiet ergo $d\varphi = d\omega$ et $\cos\varphi = \cos\gamma - \omega\sin\gamma$, atque $\cos^2\varphi = \cos^2\gamma - \omega\sin 2\gamma$, quo valore substituto erit

$$du^2 = \frac{d\omega^2 + ds^2\cos^2\gamma - \omega\,ds^2\sin 2\gamma}{\cos^2\gamma - \omega\sin 2\gamma + m\cos 2\varepsilon + m\omega\sin 2\gamma - m\cos^2\gamma\cos 2s + m\omega\sin 2\gamma\cos 2s}\,,$$

seu

$$du^2 = \frac{ds^2}{1 - m\cos 2s + \frac{m\cos 2\varepsilon + m\omega\sin 2\gamma}{\cos^2\gamma - \omega\sin 2\gamma}} + \frac{d\omega^2}{\cos^2\gamma + m\cos 2\varepsilon - \omega\sin 2\gamma - m\cos^2\gamma\cos 2s}\,,$$

vel approximando sit $\frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2\gamma} = \alpha$, erit

$$du^2 = \frac{ds^2}{1 + m\alpha - m\cos 2s + 2m(1 + \alpha)\omega\tan\gamma} + \frac{d\omega^2}{\cos^2\gamma + m\cos 2\varepsilon - \omega\sin 2\gamma - m\cos^2\gamma\cos 2s}\,,$$

seu

$$du^2 = \frac{ds^2}{1 + m\alpha} + \frac{m\,ds^2\cos 2s}{(1 + m\alpha)^2} + \frac{mm\,ds^2\cos^2 2s}{(1 + m\alpha)^3} - \frac{2m(1 + \alpha)\omega\,ds^2\tan\gamma}{(1 + m\alpha)^2} + \frac{d\omega^2}{\cos^2\gamma + m\cos 2\varepsilon}\,.$$

Ponatur $\omega = A\cos 2\varepsilon - A\cos 2s$, quo posito $s = \varepsilon$ fiat $\varphi = \gamma$, erit $d\omega = 2A\,ds\sin 2s$ et $dd\omega = 2A\,dds\sin 2s + 4A\,ds^2\cos 2s$. At ob $dd\varphi = dd\omega$ et $\sin\varphi = \sin\gamma + \omega\cos\gamma$, erit

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sin\gamma\cos\gamma + \omega\cos 2\gamma$$

et

$$\frac{dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{dd\omega}{\sin\gamma\cos\gamma} - \frac{\omega\,dd\omega\cos 2\gamma}{\sin^2\gamma\cos^2\gamma} = -(du-ds)^2 + m\,du^2\,(1+\cos 2s)\,.$$

Ergo habebitur

$$\begin{aligned}-(du-ds)^2\sin\gamma\cos\gamma + m\,du^2\sin\gamma\cos\gamma(1+\cos 2s)\\ = 2A\,dds\sin 2s + 4A\,ds^2\cos 2s\,.\end{aligned}$$

At prior aequatio dat

$$dds = 4A(ds-du)\,ds\sin 2s\left(\tan\gamma + \frac{\omega}{\cos^2\gamma}\right) + m\,du^2\sin 2s\,,$$

quo valore ibi substituto fiet

$$\begin{aligned}&-(du-ds)^2\sin\gamma\cos\gamma + m\,du^2\sin\gamma\cos\gamma(1+\cos 2s)\\ &= 8AA(ds-du)\,ds\sin^2 2s\left(\tan\gamma + \frac{\omega}{\cos^2\gamma}\right) + 2Am\,du^2\sin^2 2s + 4A\,ds^2\cos 2s\,.\end{aligned}$$

At ex superiori aequatione est

$$\begin{aligned}du^2 = {}&\frac{ds^2}{1+m\alpha} + \frac{m^2\,ds^2}{2(1+m\alpha)^3} + \frac{m\,ds^2\cos 2s}{(1+m\alpha)^2} - \frac{2\alpha m(1+\alpha)A\,ds^2\sin\gamma\cos\gamma}{(1+m\alpha)^2}\\ &+\frac{2m(1+\alpha)A\,ds^2\tan\gamma\cos 2s}{(1+m\alpha)^2} + \frac{2AA\,ds^2}{(1+m\alpha)\cos^2\gamma} - \frac{2AA\,ds^2\cos 4s}{(1+m\alpha)\cos^2\gamma}\\ &+\frac{mm\,ds^2\cos 4s}{2(1+m\alpha)^3}\end{aligned}$$

...

RECHERCHE DES INÉGALITÉS CAUSÉES AU MOUVEMENT DES PLANÈTES PAR DES FORCES QUELCONQUES

Commentatio 841 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 2, 1862, p. 416–446
(Kommentar zu E 841)

1. Le plus difficile problème que la théorie de l'Astronomie offre de nos jours, est sans doute celui de déterminer les inégalités qui sont causées dans le mouvement des planètes par l'action des autres corps célestes. C'est de la solution de ce problème que dépend tant la détermination du vrai mouvement de la lune, que celle des inégalités qu'on observe dans les planètes de Jupiter et de Saturne. Or, bien qu'on ne remarque point des inégalités aussi sensibles dans les mouvements des autres planètes, il est cependant certain qu'elles n'en sont pas entièrement exemptes: le mouvement de leurs aphélies et de leurs noeuds, quelque lent qu'il soit, est une preuve suffisante que ces planètes aussi sont assujetties à des forces qui troublent les lois établies par KEPLER.

2. Car si chaque planète n'était attirée que vers le soleil par une force réciproquement proportionnelle aux carrés de ses distances au soleil, il est demontré 1° que son mouvement se ferait toujours dans un même plan; 2° que son aphélie et son périhélie répondraient toujours aux mêmes points du ciel, et 3° que son orbite serait une ellipse parfaite dont l'un des foyers se trouverait dans le centre du soleil, ou bien, ce mouvement serait parfaitement conforme aux règles découvertes par KEPLER. Par cette raison on dit, que le mouvement d'une planète présente des inégalités, en tant qu'il ne suit pas exactement ces règles, et qu'il s'en écarte ou par quelque mouvement de ses absides, ou de ses noeuds, ou par d'autres irrégularités dont son mouvement est affecté.

3. De là il est clair que le mouvement d'une planète sera irrégulier, lorsqu'elle est sollicitée ou vers le soleil, par une force qui ne suit pas exactement la raison réciproque des carrés des distances, ou encore par des forces qui ne sont pas dirigées vers le soleil. La même chose a aussi lieu dans la lune et les autres satellites, lorsque la force dont ils sont sollicités n'est pas dirigée vers le centre de leur planète principale, ou qu'elle n'est pas proportionnelle réciproquement au carré des distances. On aura donc, pour déterminer ces irrégularités, à résoudre le problème suivant:

Les forces dont un corps céleste est sollicité étant données,
trouver le mouvement de ce corps.

Car suivant la théorie de Newton, on peut regarder ces forces comme connues, puisqu'on ne saurait plus douter, que tous les corps célestes ne s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés de leurs distances.

4. Pour résoudre cette question, il conviendra de considérer deux cas: l'un, où le mouvement du corps se fait toujours dans le même plan, ce qui arrive lorsque les forces sollicitantes se trouvent dans ce même plan. L'autre cas est plus général et comprend les mouvements qui ne s'effectuent point dans un même plan; ce qui arrive lorsque les forces sollicitantes ont des directions quelconques, dont la moyenne ne tombe pas dans le plan où le corps se meut à chaque instant. Car quel que soit le mouvement du corps, on peut toujours concevoir un plan dans lequel le mouvement ait lieu pendant un temps infiniment petit, et c'est à cette variation du plan, qu'il faut avoir égard dans la détermination du mouvement du second cas. Je tâcherai donc de développer les règles les plus sûres pour déterminer le mouvement dans l'un et l'autre cas, et je commencerai par le premier cas, puisqu'il est le plus simple et qu'il servira de guide pour la résolution de l'autre.

5. **Problème 1.** Le corps étant sollicité par des forces quelconques données qui le font décrire la ligne courbe AQ située dans le même plan, trouver les changements instantanés de ce mouvement (Fig. 1).

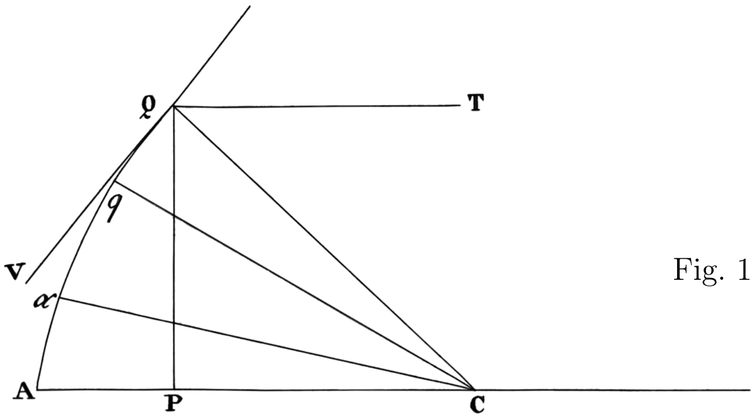


Fig. 1

Solution. Qu'on choisisse dans le plan où le mouvement se fait, un point fixe C auquel on rapporte le mouvement du corps. Pour cet effet, l'on tirera par le point C une ligne droite fixe CA, et l'on connaîtra pour chaque temps proposé, le vrai lieu du corps Q, lorsqu'on pourra assigner tant sa distance CQ au point fixe C, que l'angle ACQ qui exprimera en astronomie la longitude du corps Q. Soit donc la distance $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, et que t marque le temps écoulé depuis une certaine époque où cela arrive.

Ensuite, quelles que soient les forces qui sollicitent le corps en Q, puisque le mouvement se fait dans le plan ACQ, elles se pourront toujours réduire à deux forces, dirigées dans le même plan, dont l'une tend directement vers le point C selon QC, et l'autre selon la direction QV, perpendiculaire à QC. Comme il ne s'agit ici que des forces accélératrices, soit la force accélératrice

$$\begin{aligned} \text{selon } QC &= P \\ \text{et celle qui agit selon } QV &= Q \end{aligned}$$

et ce sera de ces deux forces qu'il faudra déduire le mouvement du corps, ou les valeurs des lettres x et φ pour un temps quelconque.

Pour ramener cette recherche aux premiers principes de la Mécanique, on doit rapporter le mouvement à des coordonnées orthogonales: Qu'on tire à cet effet, du point Q sur la droite fixe CA, la perpendiculaire QP, et à cause de $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, on aura $CP = x\cos\varphi$ et $PQ = x\sin\varphi$, valeurs que nous désignerons, pour abréger, l'abscisse $CP = x\cos\varphi$ par p, l'ordonnée $PQ = x\sin\varphi$ par q.

Qu'on décompose ensuite aussi les forces P et Q selon ces mêmes directions, et la force P suivant QC donnera une force selon QT parallèle à $PC = P\cos\varphi$, et selon $QP = P\sin\varphi$. De même, l'autre force Q suivant QV donnera pour la direction QT la force négative $-Q\sin\varphi$, et pour la direction QP la force $Q\cos\varphi$, à cause de l'angle $PQV = PCQ$. Donc le corps en Q sera sollicité

$$\text{selon } QT \text{ par une force} = P\cos\varphi - Q\sin\varphi$$

et

$$\text{selon } QP \text{ par une force} = P\sin\varphi + Q\cos\varphi\,.$$

Maintenant, sachant ces forces accélératrices, ou plutôt retardatrices, puisqu'elles tendent à diminuer les coordonnées p et q, les principes de Mécanique nous fourniront, en prenant l'élément dt du temps pour constant, les deux formules suivantes:

$$\frac{2\,ddp}{dt^2} = -P\cos\varphi + Q\sin\varphi \quad \text{et} \quad \frac{2\,ddq}{dt^2} = -P\sin\varphi - Q\cos\varphi\,,$$

d'où nous tirons

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi = -\tfrac{1}{2}\,Q\,dt^2 \quad \text{et} \quad ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}\,P\,dt^2\,.$$

Mais ayant $p = x\cos\varphi$ et $q = x\sin\varphi$, l'on aura

$$q\cos\varphi - p\sin\varphi = 0 \quad \text{et} \quad q\sin\varphi + p\cos\varphi = x\,;$$

donc en prenant les différentielles

$$\begin{aligned} dq\cos\varphi - dp\sin\varphi - q\,d\varphi\sin\varphi - p\,d\varphi\cos\varphi &= dq\cos\varphi - dp\sin\varphi - x\,d\varphi = 0 \\ dq\sin\varphi + dp\cos\varphi + q\,d\varphi\cos\varphi - p\,d\varphi\sin\varphi &= dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx\,, \end{aligned}$$

on obtiendra les formules suivantes

$$dq\cos\varphi - dp\sin\varphi = x\,d\varphi \quad \text{et} \quad dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx\,.$$

Prenons encore les différentielles, pour avoir

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi - dq\,d\varphi\sin\varphi - dp\,d\varphi\cos\varphi = dx\,d\varphi + x\,dd\varphi$$

qui, à cause de $dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx$, se change en

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi = 2\,dx\,d\varphi + x\,dd\varphi\ .$$

De même, l'autre équation différentiée donne

$$ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi + dq\,d\varphi\cos\varphi - dp\,d\varphi\sin\varphi = ddx$$

qui, à cause de $dq\cos\varphi - dp\sin\varphi = x\,d\varphi$, se change en

$$ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi = ddx - x\,d\varphi^2\ .$$

Et partant nous aurons les deux équations différentio-différentielles suivantes, qui détermineront le mouvement du corps par les variables x et φ:

$$\begin{aligned} 2\,dx\,d\varphi + x\,dd\varphi &= -\tfrac{1}{2}\,Q\,dt^2 \\ ddx - x\,d\varphi^2 &= -\tfrac{1}{2}\,P\,dt^2\ . \end{aligned}$$

Mais il faut tâcher d'en tirer des équations simplement différentielles, ce qui pourra se faire de la manière suivante: Je multiplie d'abord la première par $2x^3\,d\varphi$, pour avoir

$$4x^3\,dx\,d\varphi^2 + 2x^4\,d\varphi\,dd\varphi = -dt^2\cdot Qx^3\,d\varphi$$

dont l'intégrale est

$$x^4\,d\varphi^2 = -dt^2\int Qx^3\,d\varphi\ .$$

Ensuite, multipliant la première par $2x\,d\varphi$, et l'autre par $2\,dx$, leur somme sera:

$$4x\,dx\,d\varphi^2 + 2xx\,d\varphi\,dd\varphi + 2\,dx\,ddx - 2x\,dx\,d\varphi^2 = -dt^2\,(Qx\,d\varphi + P\,dx)$$

dont l'intégrale est:

$$dx^2 + xx\,d\varphi^2 = -dt^2\int(P\,dx + Qx\,d\varphi)\ .$$

Posons pour abréger $-\int Qx^3\,d\varphi = X$ et $-\int(P\,dx + Qx\,d\varphi) = Y$, et nous aurons

$$x^4\,d\varphi^2 = X\,dt^2 \quad \text{et} \quad dx^2 + xx\,d\varphi^2 = Y\,dt^2$$

d'où nous tirons

$$X\,dx^2 + Xxx\,d\varphi^2 = Yx^4\,d\varphi^2$$

et partant

$$d\varphi = \frac{dx\sqrt{X}}{x\sqrt{(Yxx - X)}} \quad \text{et} \quad dt = \frac{xx\,d\varphi}{\sqrt{X}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(Yxx - X)}}$$

ou bien

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx - X)}\ .$$

Par conséquent, nous connaissons, pour chaque élément dt du temps, les changements que subissent tant la longitude ou l'angle φ que la distance $CQ = x$.

6. **Corollaire 1.** Si l'on considère l'élément de la courbe Qq, décrit dans le temps dt, l'élément de l'aire ou le triangle QCq est $= \frac{1}{2}\,xx\,d\varphi$. Donc posant l'aire $ACQ = S$, on aura $xx\,d\varphi = 2\,dS = dt\sqrt{X}$ et $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{X}$. D'où l'on voit que si la force $QV = Q$ est évanouissante, à cause de $X = \text{const.} = C$, on aura $dS = \frac{1}{2}\,dt\sqrt{C}$, et partant $S = \frac{1}{2}\,t\sqrt{C}$, ou bien les aires ACQ seront proportionnelles aux temps pendant lesquels elles sont décrites.

7. **Corollaire 2.** On peut nommer $\frac{dS}{dt}$ la vitesse dont l'aire ACQ croît, ou bien la vitesse de la description des aires; donc cette vitesse sera $= \frac{1}{2}\sqrt{X}$ et le carré de cette vitesse $= \frac{1}{4}\,X$. Et partant, lorsque X n'est pas une quantité constante, ce qui arrive lorsque la force Q n'est pas $= 0$, la vitesse de la description des aires n'est pas constante, ou bien les aires ne seront pas proportionnelles aux temps.

8. **Corollaire 3.** Ensuite, l'élément de la courbe même étant $Qq = \sqrt{(dx^2 + xx\,d\varphi^2)}$, la vitesse du corps en Q sera

$$= \frac{\sqrt{(dx^2 + xx\,d\varphi^2)}}{dt} = \sqrt{Y}\ ,$$

donc la racine carré de la quantité $Y = -\int(P\,dx + Qx\,d\varphi)$ exprime la vitesse du corps en Q, et partant la quantité Y même le carré de cette vitesse.

9. **Corollaire 4.** Je remarque de plus, que la longitude $ACQ = \varphi$ va toujours en augmentant avec le temps t, à moins que ni x ne devienne infinie, ni la quantité X n'évanouisse. Cependant il peut arriver, que $\sqrt{X}$ étant devenue $= 0$, prenne ensuite une valeur négative, et alors le mouvement du corps sera rétrograde.

10. **Corollaire 5.** Ayant pour la différentielle de la distance

$$dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx - X)}\,,$$

la distance ira en croissant, tandis que la valeur de la quantité $\sqrt{(Yxx - X)}$ demeure affirmative et jusqu'à ce qu'elle évanouisse. Ensuite, elle pourra devenir négative, et le corps se rapprochera du centre C. Dans ce cas, la distance x croîtra et décroîtra alternativement.

11. **Corollaire 6.** Il faut donc principalement avoir égard à la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$, en tant que sa valeur est tantôt affirmative, tantôt négative, et aux changements mêmes $= 0$. Or puisque le signe radical porte en soi l'ambigüité du signe $\pm$, et que les deux signes ne sauraient avoir lieu à la fois, il est absolument nécessaire de délivrer cette expression de toute ambigüité de signe.

12. **Scholie 1.** Le moyen le plus sûr pour fixer le signe de la quantité $\sqrt{(Yxx - X)}$ est, sans doute, de la réduire au sinus d'un certain angle, puisque le sinus d'un angle variable peut subir les mêmes variations auxquelles cette formule est assujettie. Car posant $\sqrt{(Yxx - X)} = Z \sin v$, de sorte que $dx = \dfrac{Z \sin v}{x}\, dt$, on voit que tandis que l'angle v subsiste entre 0° et 180°, la distance x va en croissant, et qu'elle diminue, lorsque l'angle v passe de 180° à 360°. Donc quand l'angle v est $= 0$, la distance $CQ = x$ sera la plus petite; elle sera la plus grande lorsque v est de 180°, c'est à dire qu'alors le corps passe par ses absides à l'égard du point C. De sorte que, si le point C est pris au centre du soleil, le corps Q se trouvera dans son périhélie lorsque $v = 0$, et dans son aphélie lorsque $v = 180°$. Ainsi l'angle v est dans un certain rapport avec l'élongation du corps de ses absides, et exprime, par conséquent, ce qu'on nomme en Astronomie l'anomalie d'une planète. Car quoiqu'on ait plusieurs espèces d'anomalies, comme l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie, toutes conviennent en ce qu'elles évanouissent ou deviennent 180°, lorsque le corps se trouve dans ses absides. C'est donc de la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ qu'il faut tirer la détermination de l'anomalie du corps, de même que de la variabilité de la ligne des absides, s'il y en a.

13. **Scholie 2.** Mais il n'est presque pas possible de tirer en général de ces formules quelques conclusions d'où l'on puisse connaître le mouvement du corps. Car regardant les quantités P et Q qui expriment les forces, comme des fonctions quelconques de nos variables x, φ et t, les formules intégrales X et Y renferment déjà ce qui est en question, c'est à dire le rapport entre nos variables. Mais lorsque la force Q s'évanouit, et que la force P dépend uniquement de la distance x, la valeur de X deviendra constante, et Y marquera une fonction de x, de sorte que la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ sera aussi fonction de x. En l'égalant donc à $Z \sin v$, on obtiendra la distance x exprimé par l'anomalie v, ce qui pourra se faire d'une infinité de manières différentes, puisque Z peut être prise à volonté; il sera donc aisé de choisir la manière qu'on jugera la plus convenable pour le calcul. Or quoique le corps Q, en tant qu'il représente une planète, soit sollicité par plusieurs forces, il s'en trouvera toujours une, dirigée selon QC et exprimée par une fonction de x, par rapport à laquelle les autres soient très petites; et c'est dans ce cas que nos formules pourront fournir des approximations assez propres pour nous représenter le vrai mouvement du corps.

14. **Problème 2.** Le corps étant d'abord attiré au point C par une force qui est réciproquement proportionnelle aux carrés de ses distances à ce point, et ensuite, par d'autres forces quelconques, très petites à l'égard de la première, et situées dans le plan du mouvement du corps, trouver la nature de ce mouvement.

Solution. Posant, comme auparavant, la distance $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, soit la première force agissant selon $QC = \dfrac{A}{xx}$, et, que les petites forces se réduisent à deux, P et Q, dont la première P soit dirigée vers QC, et l'autre Q vers QV, perpendiculaire à QC. Ainsi la force exprimée dans le problème précédent par P, sera ici $\dfrac{A}{xx} + P$, et la force Q sera Q. Nous aurons donc, comme auparavant, $X = -\int Qx^3\,d\varphi$, et à cause de $\int -\dfrac{A}{xx}\,dx = \dfrac{A}{x}$, si nous posons $Y = -\int(P\,dx + Qx\,d\varphi)$, ce que Y était ci-dessus, sera ici $Y + \dfrac{A}{x}$, X et Y renfermant les constantes qui entrent dans le calcul par ces deux intégrations. Mais on voit que les parties variables renfermées dans les lettres X et Y seront fort petites, puisqu'elles résultent des petites forces P et Q. Cela posé, nos deux équations différentielles, qui contiennent le mouvement du corps, seront

$$d\varphi = \frac{dt\,\surd X}{xx} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{x}\,\surd(Yxx + Ax - X)$$

où il faut remarquer, que si les petites forces P et Q étaient $= 0$, les quantites X et Y seraient constantes, et le corps décrirait une section conique autour du foyer C, selon les règles de Kepler. On aurait donc, dans ce cas,

$$x = \frac{b}{1 - g\cos v}$$

où b marquerait le demi-paramètre de la section, g l'excentricité, et v l'anomalie vraie, ou l'élongation de la plus haute abside. Gardons donc pour le cas proposé la même formule avec cette différence, que les quantités b et g ne soient plus constantes, mais variables; et il est évident, que leur variabilité dépendra des forces P et Q. Soit donc

$$x = \frac{p}{1 - q\cos v}$$

et par là nous introduisons, au lieu d'une variable x, trois nouvelles variables p, q et v, mais dont deux seront déterminées par cette condition, que la valeur de dx doit être exprimée par une telle formule $Z\,dt\sin v$, ou plutôt par $-Z\,dt\sin v$, parce que depuis l'angle $v = 0$, la distance x va en diminuant. Ayant donc

$$dx = \frac{dt}{x}\,\surd(Yxx + Ax - X)\,, \quad \text{ou} \quad dx = dt\,\surd\left(Y + \frac{A}{x} - \frac{X}{xx}\right)$$

et substituant pour x sa valeur $\frac{p}{1 - g\cos v}$, nous aurons

$$dx = \frac{dt}{p}\,\surd\left(ppY + Ap(1 - q\cos v) - X(1 - q\cos v)^2\right)\,.$$

Développons la quantité qui se trouve sous le signe radical, nous aurons

$$ppY + Ap - X - Apq\cos v + 2qX\cos v - qqX\cos^2 v$$

et faisons d'abord évanouir les termes qui contiennent $\cos v$; nous aurons $Ap = 2X$, partant $p = \frac{2X}{A}$. Donc notre quantité sera

$$ppY + X - qqX\cos^2 v = ppY + X(1 - qq) + qqX\sin^2 v$$

et partant, afin que le seul terme $qqX\sin^2 v$ reste, posons

$$ppY + X(1 - qq) = 0\ , \quad \text{ou} \quad qq = 1 + \frac{Y}{X}pp$$

et ainsi nous aurons pour p et q les valeurs suivantes

$$p = \frac{2X}{A} \quad \text{et} \quad qq = 1 + \frac{4XY}{AA}$$

et pour dx nous aurons cette valeur

$$dx = -\frac{dt}{p}\sqrt{qqX\sin^2 v} = -\frac{q\,dt\sin v}{p}\sqrt{X}$$

et

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{X} = \frac{dt\,(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{X}\ .$$

Mais puisque $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, nous en tirons $q\cos v = 1 - \frac{p}{x}$, et par la différentiation

$$dq\cos v - q\,dv\sin v = -\frac{dp}{x} + \frac{p\,dx}{xx}\ ; \quad \text{donc} \quad q\,dv\sin v = dq\cos v + \frac{dp}{x} - \frac{p\,dx}{xx}\ ,$$

équation qui sert à déterminer l'anomalie v. Pour cet effet, ayant déjà

$$dx = -\frac{q\,dt\sin v}{p}\sqrt{X}\ ,$$

il faut aussi chercher les valeurs des différentielles dp et dq. Or à cause de

$$dX = -Qx^3\,d\varphi = -Qx\,dt\sqrt{X}$$

et

$$dY = -P\,dx - Qx\,d\varphi = \frac{Pq\,dt\sin v}{p}\sqrt{X} - \frac{Q\,dt}{x}\sqrt{X}$$

nous aurons

$$dp = -\frac{2Qx\,dt}{A}\sqrt{X}\ .$$

Ensuite puisque $qq = 1 + \frac{4XY}{AA} = 1 + \frac{2pY}{A}$ et partant $\frac{2Y}{A} = \frac{qq}{p} - \frac{1}{p}$, nous aurons

$$\frac{2Pq\,dt\sin v}{Ap}\sqrt{X} - \frac{2Q\,dt}{Ax}\sqrt{X} = \frac{dp}{pp}(1-qq) + \frac{2q\,dq}{p}$$

et en resubstituant pour dp sa valeur trouvée

$$\frac{Pq\,dt\sin v}{Ap}\sqrt{X} - \frac{Q\,dt}{Ax}\sqrt{X} = -\frac{Q(1-qq)x\,dt}{App}\sqrt{X} + \frac{q\,dq}{p}$$

donc

$$dq = \frac{P\,dt\sin v}{A}\sqrt{X} - \frac{Qx\,dt\sqrt{X}}{Aq}\left(\frac{p}{xx} - \frac{(1-qq)}{p}\right) .$$

Or à cause de $x = \frac{p}{1-q\cos v}$ on aura[1]

$$\frac{p}{xx} - \frac{1-qq}{p} = \frac{1-2q\cos v + qq\cos^2 v - 1 + qq}{p} = \frac{-2q\cos v + qq(1+\cos^2 v)}{p}$$

et partant

$$dq = \frac{P\,dt\sin v}{A}\sqrt{X} + \frac{Q\,dt\sqrt{X}}{A}\left(\frac{2\cos v - q - q\cos^2 v}{1-q\cos v}\right)$$

donc

$$dq\cos v + \frac{dp}{x} = \frac{P\,dt\sin v\cos v}{A}\sqrt{X} - \frac{Q\,dt\sin^2 v\sqrt{X}}{A}\left(\frac{2-q\cos v}{1-q\cos v}\right) .$$

Ces valeurs étant substituées pour dv, à cause de $\frac{-p\,dx}{xx} = \frac{q\,dt\sin v}{xx}\sqrt{X}$ donneront

$$dv = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} + \frac{dt\sqrt{X}}{Aq}\left(P\cos v - Q\sin v\left(\frac{2-q\cos v}{1-q\cos v}\right)\right) .$$

Donc posant $x = \frac{p}{1-q\cos v}$, on aura les changements de toutes les quantités qui se rencontrent dans l'élément dt du temps, savoir

$$\begin{aligned}
dx &= -\frac{q\,dt\sin v}{p}\sqrt{X} ,\\
d\varphi &= \frac{dt}{xx}\sqrt{X} = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{X} ,\\
dp &= -\frac{2Qx\,dt}{A}\sqrt{X} ,\quad \text{ou}\quad p = \frac{2X}{A} ,\\
dq &= \frac{dt\sqrt{X}}{A}\left(P\sin v + 2Q\cos v - \frac{Qq\sin^2 v}{1-q\cos v}\right) ,\\
dv &= \frac{dt\sqrt{X}}{xx} + \frac{dt\sqrt{X}}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right) .
\end{aligned}$$

1 Édition originale: $\frac{p}{xx} - \frac{1+qq}{p}$ au lieu de $\frac{p}{xx} - \frac{1-qq}{p}$.

Si l'on met pour X sa valeur $\frac{1}{2}Ap$, on aura

$$dp = -\frac{2Qp\,dt}{A(1-q\cos v)}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

et dans les autres formules on éliminera la quantité X.

15. **Corollaire 1.** Si les petites forces P et Q étaient $= 0$, on aurait tant $dp = 0$ que $dq = 0$, et partant le paramètre p et l'excentricité q seraient constants. De plus, on aurait $dv = d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\frac{1}{2}Ap}$, et l'anomalie v croîtrait également avec la longitude φ, ou bien, la longitude φ serait égale à l'anomalie v, plus une quantité constante. Ce qui s'accorde parfaitement avec les lois du mouvement de Kepler.

16. **Corollaire 2.** Mais si les forces P et Q ne sont pas évanouissantes, ni le paramètre p, ni l'excentricité q ne sera constante. Le paramètre p se trouvera alors par l'intégration de cette équation

$$dp = -\frac{2Qp\,dt}{A(1-q\cos v)}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

et l'excentricité q par l'intégration de celle-ci

$$dq = \frac{dt\sqrt{\frac{1}{2}Ap}}{A}\left(P\sin v + 2Q\cos v - \frac{Qq\sin^2 v}{1-q\cos v}\right).$$

17. **Corollaire 3.** Pour l'anomalie v, elle se trouvera par l'intégration de cette équation

$$dv = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{dt\sqrt{\frac{1}{2}Ap}}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right).$$

Or ayant trouvé l'anomalie vraie v, avec le paramètre p et l'excentricité q, on aura de suite la vraie distance de Q au point fixe C, savoir $x = \frac{p}{1-q\cos v}$.

18. **Corollaire 4.** Pour la longitude du corps, ou l'angle $ACQ = \varphi$, on la tirera de cette équation

$$d\varphi = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}\,.$$

Or quoique les variables p, q, v soient mêlées entre elles, on trouvera moyen de déterminer chacune, puisqu'on sait le rapport de la différentielle de chacune à l'élément dt du temps.

19. **Corollaire 5.** Puisque l'angle v représente l'élongation du corps de l'aphélie (supposant en C le centre du soleil), si l'on prend $QC\alpha = v$, la droite

$C\alpha$ passera par l'aphélie, et l'angle $AC\alpha = \varphi - v$ donnera la longitude de l'aphélie, pour laquelle on aura par conséquent

$$AC\alpha = \varphi - v = -\int \frac{dt\sqrt{\frac{1}{2}}\,Ap}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)$$

d'où l'on connaîtra les changements de l'aphélie, s'il y en a. Car si les forces P et Q étaient $= 0$, on aurait $\varphi - v = \text{const.}$, ou le lieu de l'aphélie α serait fixe.

20. **Corollaire 6.** Si le corps n'était sollicité que par la seule force $\frac{A}{xx}$, on aurait $p = b$ et $q = g$, et partant pour l'anomalie vraie v au temps donné $= t$, cette équation

$$dv = \frac{dt\,(1 - g\cos v)^2}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,Ab\,, \quad \text{ou} \quad dt\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{dv}{(1 - g\cos v)^2}$$

dont l'intégrale est[2]

$$t\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{g}{1 - gg}\cdot\frac{\sin v}{1 - g\cos v} - \frac{1}{(1 - gg)^{\frac{3}{2}}}\arccos\frac{g - \cos v}{1 - g\cos v}\,.$$

Or si l'excentricité g est fort petite, il vaudra mieux se servir de cette intégrale[3]

$$t\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \left(1 + \tfrac{3}{2}\,gg\right)v + 2g\,(1 + 2gg)\sin v + \tfrac{3}{4}\,gg\sin 2v - \tfrac{4}{3}\,g^3\sin 3v$$

et alors on aura $\varphi = \text{Const.} + v$ et $x = \dfrac{b}{1 - g\cos v}$.

21. **Scholie 1.** Si nous ajoutons à la force principale $\frac{A}{xx}$ encore la force $\frac{2\alpha}{x^3}$, et que nous retranchions cette même force de P, pour conserver le même cas que nous avons développé dans le problème, nous obtiendrons des formules plus générales pour la résolution du même problème. Car ayant comme auparavant

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = dt\sqrt{\left(Y + \frac{A}{x} + \frac{\alpha}{xx} - \frac{X}{xx}\right)}\,,$$

nous n'avons qu'à écrire $P - \frac{2\alpha}{x^3}$ au lieu de P. Posant donc $x = \dfrac{p}{1 - q\cos v}$, la

---

2 Édition originale: $t\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{g}{1 - gg}\cdot\frac{\sin v}{1 - g\cos v} + \frac{1}{(1 - gg)^{\frac{3}{2}}}\arccos\frac{g - \cos v}{1 - g\cos v}$.

3 Édition originale:

$$t\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \left(1 + \tfrac{3}{2}\,gg\right)v + 2g\left(1 + \tfrac{3}{2}\,gg\right)\sin v + \tfrac{3}{4}\,gg\sin 2v + \tfrac{1}{3}\,g^3\sin 3v\,.$$

formule irrationelle nous fournit $X = \alpha + \frac{1}{2}\,Ap$ et $Y = -\frac{A(1-qq)}{2p}$, pour avoir[4]

$$dx = -\frac{q\,dt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\,Ap\right)}\ .$$

Ensuite différentions les valeurs X et Y, et nous aurons

$$\begin{aligned} dX &= -Qx^3\,d\varphi = -\frac{Qp\,dt}{1-q\cos v}\sqrt{\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\,Ap\right)} = \tfrac{1}{2}\,A\,dp \\ dY &= -P\,dx + \frac{2\alpha\,dx}{x^3} - Qx\,d\varphi \\ &= \frac{Pq\,dt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} - \frac{2\alpha q\,dt\sin v}{px^3}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} - \frac{Q\,dt\,(1-q\cos v)}{p}\sqrt{\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\,Ap\right)}\,. \end{aligned}$$

Or

$$dY = \frac{A\,dp\,(1-qq)}{2pp} + \frac{Aq\,dq}{p} = -\frac{Q\,dt\,(1-qq)}{p(1-q\cos v)}\sqrt{\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\,Ap\right)} + \frac{Aq\,dq}{p}$$

à cause de $\frac{1}{2}\,A\,dp = -\frac{Qp\,dt}{1-q\cos v}\sqrt{\left(\alpha+\frac{1}{2}\,Ap\right)}$. Donc

$$\frac{Aq\,dq}{p} = \frac{q\,dt\sin v}{p}\left(P-\frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} + \frac{Q\,dt\sqrt{\left(\alpha+\frac{1}{2}Ap\right)}}{p(1-q\cos v)}\left(1-qq-(1-q\cos v)^2\right)$$

ou bien

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{2Qp\,dt\sqrt{\left(\alpha+\frac{1}{2}\,Ap\right)}}{A(1-q\cos v)} \\ dq &= \frac{dt\sin v}{A}\left(P-\frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} + \frac{Q\,dt}{A}\left(2\cos v - \frac{q\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\,Ap\right)}\ . \end{aligned}$$

Enfin, parce que $q\,dv\sin v = dq\cos v + \frac{dp}{x} - \frac{p\,dx}{xx}$, nous aurons en substituant pour dq, dp et dx les valeurs trouvées

$$\begin{aligned} dv = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} + \frac{dt\ \cos v}{Aq}\left(P-\frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} \\ -\frac{Q\,dt}{Aq}\left(2\sin v + \frac{q\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\,Ap\right)} \end{aligned}$$

où l'on peut prendre pour α une quantité constante quelconque, ce qui aura dans la suite un très grand avantage. Car, puisque l'excentricité q est à l'ordinaire fort petite, les termes dans l'expression de dv, qui sont divisés par q, pourraient

4 Cf. [Verdun 2015], p. 917.

devenir fort grands; alors on prendra pour α une telle valeur qui rende ces termes aussi petits qu'il sera possible.

22. **Scholie 2.** Il n'est pas même nécessaire que α soit une quantité constante; car posant $\frac{\alpha}{xx} = V$, ou $\alpha = Vxx$, on n'a qu'à mettre $-\frac{dV}{dx}$ pour $\frac{2\alpha}{x^3}$, et les formules trouvées seront

$$\begin{aligned}
dx &= -\frac{q\,dt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap}\,,\\
d\varphi &= \frac{dt}{xx}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\,,\\
dp &= -\frac{2Qx\,dt}{A}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\,,\\
dq &= \frac{dt\sin v}{A}\left(P + \frac{dV}{dx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap}\\
&\quad + \frac{Q\,dt}{A}\left(2\cos v - \frac{q\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\,,\\
dv &= \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} + \frac{dt\cos v}{Aq}\left(P + \frac{dV}{dx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap}\\
&\quad - \frac{Q\,dt}{Aq}\left(2\sin v + \frac{q\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\,.
\end{aligned}$$

Maintenant, s'il était possible de déterminer V en sorte, qu'il devienne

$$\cos v\left(P + \frac{dV}{dx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} = Q\sin v\left(2 + \frac{q\cos v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}$$

ou

$$dV = -P\,dx + Q\,dx\tan v\left(2 + \frac{q\cos v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{2Vxx}{Ap}\right)}$$

on aurait

$$dv = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap} \quad \text{et} \quad dq = \frac{2Q\,dt}{A\cos v}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}$$

et de là la détermination du mouvement de l'aphélie serait fort aisée; car la longitude de l'aphélie étant $= \varphi - v$, on aurait

$$d\varphi - dv = \frac{dt}{xx}\left(\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ap}\right)$$

et si V, ainsi qu'il arrivera dans la plupart des cas, est fort petit par rapport à A, on aurait à très peu près

$$d\varphi - dv = \frac{V\,dt}{\sqrt{2Ap}}\,.$$

Dans ce cas, le mouvement même du corps se déterminerait fort commodément. Mais cette discussion dépend de la nature des forces P et Q par lesquelles le corps est sollicité. Or comme on peut supposer, que les corps célestes s'attirent mutuellement en raison de leurs masses divisées par le carré de leurs distances, voyons quelles seront ces forces, lorsqu'il y a trois corps qui, en s'attirant mutuellement, se meuvent tous les trois dans le même plan.

23. **Problème 3.** Déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, et se meuvent dans le même plan.

Solution. Le meilleur moyen est de regarder un de ces corps comme fixe, et de chercher le mouvement des deux autres tel qu'il devrait paraître à un spectateur placé dans le troisième. A cet effet, on n'aura qu'à transporter les forces qui agissent sur le troisième corps, suivant des directions contraires, sur les deux autres corps. Soit donc (Fig. 2) C le corps qu'on veut regarder comme fixe, et E

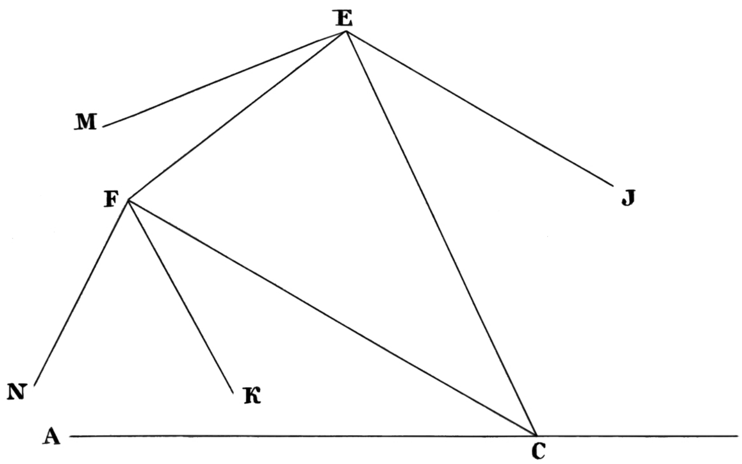


Fig. 2

et F les deux autres corps. Représentons les masses respectivement par C, E, F. Soient en suite les distances $CE = x$, $CF = y$ et $EF = z$. Ayant pris CA pour une ligne fixe, soient les angles $ACE = \varphi$, $ACF = \theta$ et $ECF = \varphi - \theta = \eta$, et l'on aura

$$z = \sqrt{(xx + yy - 2xy\cos\eta)}\ .$$

Maintenant le corps C étant attiré vers E par la force $= \dfrac{E}{xx}$, et vers F par la force $= \dfrac{F}{yy}$; qu'on transporte ces forces sur les corps E et F: alors, tirant les lignes EJ et FK parallèles à FC et EC, à cause du corps C, les deux autres corps seront sollicités par les forces suivantes

le corps E par la force $EC = \frac{E}{xx}$, et par la force $EJ = \frac{F}{yy}$

le corps F par la force $FC = \frac{F}{yy}$, et par la force $FK = \frac{E}{xx}$.

Or le corps E étant actuellement sollicité par les forces $EC = \frac{C}{xx}$ et $EF = \frac{F}{zz}$, et le corps F par les forces $FC = \frac{C}{yy}$ et $FE = \frac{E}{zz}$, ces forces doivent être ajoutées aux précédentes qu'on réduira ensuite à deux, dont les unes soient dirigées vers C, et les autres leur seraient perpendiculaires. Qu'on mène, à cet effet, EM perpendiculaire à EC, et FN perpendiculaire à FC.

Pour le corps E on a d'abord, dans la direction EC, la force $\frac{C+E}{xx}$; et la force $EJ = \frac{F}{yy}$, à cause de l'angle $CEJ = \eta$, donnera

$$\text{une force } EC = \frac{F\cos\eta}{yy} \quad \text{et} \quad \text{une force } EM = -\frac{F\sin\eta}{yy}.$$

Or la force $EF = \frac{F}{zz}$ donnera

$$\begin{aligned} &\text{pour la direction } EC, \text{ la force} \quad \frac{F\cos CEF}{zz} = -\frac{F(y\cos\eta - x)}{z^3} \\ &\text{pour la direction } EM, \text{ la force} \quad \frac{F\sin CEF}{zz} = \frac{Fy\sin\eta}{z^3} \end{aligned}$$

et ainsi les deux forces par lesquelles le corps E est sollicité, seront

$$\begin{aligned} \text{la force } EC &= \frac{C+E}{xx} + \frac{F(x - y\cos\eta)}{z^3} + \frac{F\cos\eta}{yy} \\ \text{la force } EM &= \frac{Fy\sin\eta}{z^3} - \frac{F\sin\eta}{yy}. \end{aligned}$$

Pour l'autre corps F on a d'abord pour la direction FC, la force $\frac{C+F}{yy}$; et la force $FK = \frac{E}{xx}$, à cause de l'angle $CFK = \eta$, donnera

$$\text{une force } FC = \frac{E\cos\eta}{xx} \quad \text{et} \quad \text{une force } FN = \frac{E\sin\eta}{xx}.$$

Enfin la force $FE = \frac{E}{zz}$ donne

$$\begin{aligned} &\text{pour la direction } FC, \text{ la force} \quad \frac{E\cos EFC}{zz} = \frac{E(y - x\cos\eta)}{z^3} \\ &\text{pour la direction } FN, \text{ la force} \quad -\frac{E\sin EFC}{zz} = -\frac{Ex\sin\eta}{z^3} \end{aligned}$$

donc les deux forces qui agissent sur le corps F sont

$$\begin{aligned} \text{la force } FC &= \frac{C+F}{yy} + \frac{E(y - x\cos\eta)}{z^3} + \frac{E\cos\eta}{xx} \\ \text{la force } FN &= -\frac{Ex\sin\eta}{z^3} + \frac{E\sin\eta}{xx}. \end{aligned}$$

Et partant, pour le mouvement du corps E, en y appliquant le problème précédent, nous aurons

$$A = C + E\,, \quad P = \frac{F(x - y\cos\eta)}{z^3} + \frac{F\cos\eta}{yy} \quad \text{et} \quad Q = F\sin\eta\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\,;$$

donc, posant $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, il y aura

$$\begin{aligned}
dp &= -\frac{2Fp\,dt\sin\eta}{(C+E)(1-q\cos v)}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+E)p\\
dq &= \frac{F\,dt\sqrt{\frac{1}{2}}\,(C+E)p}{C+E}\left(\frac{x\sin v}{z^3}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\right)\\
dv &= \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+E)p\\
&\quad+\frac{F\,dt\sqrt{\frac{1}{2}}\,(C+E)p}{(C+E)q}\left(\frac{x\cos v}{z^3}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)
\end{aligned}$$

et enfin

$$d\varphi = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+E)p\,.$$

De la même manière, pour le mouvement de l'autre corps F, en supposant sa distance $y = \frac{r}{1 - s\cos u}$, sa longitude étant $= \theta$, on aura

$$\begin{aligned}
dr &= \frac{2Er\,dt\sin\eta}{(C+F)(1-s\cos u)}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+F)r\\
ds &= \frac{E\,dt\sqrt{\frac{1}{2}}\,(C+F)r}{C+F}\left(\frac{y\sin u}{z^3}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1-s\cos u}\right)\right)\\
du &= \frac{dt\,(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+F)r\\
&\quad+\frac{E\,dt\sqrt{\frac{1}{2}}\,(C+F)r}{(C+F)s}\left(\frac{y\cos u}{z^3}\right.
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\cos u-2\sin\eta\sin u-\frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\Bigg)$$

et

$$d\theta=\frac{dt\,(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+F)r$$

d'où l'on aura

$$d\eta=d\varphi-d\theta=\frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+E)p-\frac{dt\,(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+F)r\ ,$$

de sorte que les changements que subissent tous les éléments du mouvement de l'un et de l'autre corps pendant le temps dt sont connus.

24. **Corollaire 1.** Le mouvement des absides de l'un et de l'autre corps se trouvera par les formules suivantes. Pour le corps E on aura

$$d\varphi-dv=-\frac{F\,dt\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+E)p}{(C+E)q}\Bigg(\frac{x\cos v}{z^3}$$
$$-\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\cos v+2\sin\eta\sin v+\frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\Bigg)$$

et pour le corps F

$$d\theta-du=-\frac{E\,dt\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(C+F)r}{(C+F)s}\Bigg(\frac{y\cos u}{z^3}$$
$$-\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\cos u-2\sin\eta\sin u-\frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\Bigg)\ .$$

25. **Corollaire 2.** On pourra aussi chercher par le Scholie 2 [§22] la quantité V. Soit

$$dV=-\frac{Fx\,dx}{z^3}+F\,dx\cos\eta\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right)$$
$$+F\,dx\sin\eta\tan v\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right)\left(2+\frac{q\cos v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{\left(1+\frac{2Vxx}{Ap}\right)}$$

où

$$dx=-\frac{q\,dt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,Ap\quad\text{et}\quad A=C+E,$$

et alors on aura

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\ ,$$
$$dv = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,Ap\ ,$$
$$dp = -\,\frac{2Fx\,dt\sin\eta}{A}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\ ,$$
$$dq = \frac{2F\,dt\sin\eta}{A\cos v}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Ap + Vxx\right)}\ .$$

26. **Corollaire 3.** De la même manière, pour l'autre corps F, on cherchera la quantité U. Soit

$$dU = -\,\frac{Ey\,dy}{z^3} + E\,dy\cos\eta\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right) - E\,dy\sin\eta\tan u\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(2 + \frac{s\cos u}{1 - s\cos u}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{2Uyy}{Br}\right)}$$

où $dy = -\frac{s\,dt\sin u}{r}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,Br$ et $B = C + F$. Alors on aura

$$d\theta = \frac{dt}{yy}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Br + Uyy\right)}\ ,$$
$$du = \frac{dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,Br\ ,$$
$$dr = \frac{2Ey\,dt\sin\eta}{B}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Br + Uyy\right)}\ ,$$
$$ds = -\frac{2E\,dt\sin\eta}{B\cos u}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,Br + Uyy\right)}\ .$$

27. **Scholie.** Jusqu'ici nous n'avons employé aucune approximation, et partant les formules trouvées sont toutes exactes à la rigueur. Mais dans cet état on n'en peut aussi tirer aucune conclusion pour la connaissance du mouvement. Or, j'ai déjà remarqué que, pour que cette méthode puisse réussir, il faut que le mouvement des corps qu'on cherche, ne s'écarte pas beaucoup des règles de Kepler, ce qui arrive lorsque les forces P et Q sont fort petites à l'égard de la force $\frac{A}{xx}$. Donc pour les corps E et F cette méthode sera applicable lorsque les quantités

$$\frac{Fxx}{C+E}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right) \quad \text{et} \quad \frac{Eyy}{C+F}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)$$

avec celles-ci

$$\frac{Fx^3}{(C+E)z^3} \quad \text{et} \quad \frac{Ey^3}{(C+F)z^3}$$

seront fort petites, ou des fractions beaucoup moindres que l'unité.

A cet effet, considérons les forces P et Q au cas de leur maximum, et il suffira d'avoir égard à la seule P: l'on voit d'abord que, dans le cas de $y = x$, cette force pourrait devenir infinie. C'est donc une condition absolument nécessaire, que les distances x et y soient toujours inégales entre elles. Posons donc $y > x$, et soit $y = \lambda x$ où λ sera un nombre plus grand que l'unité. Or nous admettrons pour λ le plus petit nombre possible qui puisse résulter de $\frac{y}{x}$. La plus petite valeur de z sera donc $(\lambda - 1)x$ qui a lieu lorsque $y = 0$, et alors la force P deviendra

$$= \frac{F(1-\lambda)}{(\lambda-1)^3 xx} + \frac{F}{\lambda\lambda xx} = -\frac{F(2\lambda-1)}{\lambda\lambda(\lambda-1)^2 xx}$$

laquelle étant divisée par la force $\frac{A}{xx} = \frac{C+E}{xx}$ donnera

$$\frac{F(2\lambda-1)}{(C+E)\lambda\lambda(\lambda-1)^2}$$

dont la valeur doit être fort au dessous de l'unité. De même, pour le corps F, la force P étant

$$= \frac{E(y-x)}{z^3} + \frac{E}{xx} = \frac{E}{(\lambda-1)^2 xx} + \frac{E}{xx} = \frac{E(\lambda\lambda - 2\lambda + 2)}{(\lambda-1)^2 xx}$$

cette force divisée par $\frac{C+F}{yy} = \frac{C+F}{\lambda\lambda xx}$, donne

$$\frac{E\lambda\lambda(\lambda\lambda - 2\lambda + 2)}{(C+F)(\lambda-1)^2}$$

dont la valeur doit aussi être fort au-dessous de l'unité. Il faut donc qu'il y ait

$$\frac{F}{C+E} < \frac{\lambda\lambda(\lambda-1)^2}{2\lambda-1} \quad \text{et} \quad \frac{E}{C+F} < \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}$$

d'où l'on voit dans quels cas cette méthode peut être employée avec succès. Et d'abord, puisque $\lambda > 1$, il est clair que $C + F$ doit être beaucoup plus grand que E, puisque

$$\frac{C+F}{E} > \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2},$$

ce qui nous fournit les deux cas que voici:

I. Si la masse C est extrêmement grande, supposant, par exemple que le soleil se trouvât en C; alors, puisque

$$\frac{F}{C+E} < \frac{\lambda\lambda(\lambda-1)^2}{2\lambda-1},$$

les inégalités causées dans le corps E seront assez petites, pourvu que $\lambda - 1$ ne soit pas trop petit: mais les inégalités causées dans le corps F, qui est plus éloigné, seront d'autant plus considérables, plus la quantité

$$\frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda - 2\lambda + 2)}{(\lambda - 1)^2}$$

sera grande. Or, elle devient même infinie tant pour $\lambda = 1$ que pour $\lambda = \infty$, c'est à dire soit que $x = y$, soit que $x = 0$, d'où l'on voit que les planètes plus voisines du soleil causent des dérangements plus considérables aux planètes plus éloignées, que celles-ci à celles-là, les masses étant égales. Ce cas sert donc à déterminer les dérangements que les planètes principales se causent mutuellement.

II. Si le corps F est extrêmement grand par rapport aux autres C et E, ce qui arrive quand C marque une planète principale, E un satellite et F le soleil. Or, puisque alors λ est un nombre très grand, il faut qu'il y ait

$$\frac{F}{C+E} < \tfrac{1}{2}\lambda^3 \quad \text{et} \quad \frac{F+C}{E} > \lambda\lambda\,;$$

car si ces conditions n'avaient point lieu, ou le mouvement du satellite, ou celui de la planète deviendrait si irrégulier qu'il ne s'accorderait plus avec les règles de Kepler. Ce cas servira donc à déterminer le mouvement des satellites, de même que les dérangements qu'ils peuvent opérer dans le mouvement de la planète principale.

Ce cas étant plus aisé à développer par le calcul que l'autre, – puisque le nombre λ est fort grand, ou la distance y incomparablement plus grand que la distance x, ce qui procure la facilité de convertir la quantité irrationnelle $z = \sqrt{(xx + yy - 2xy\cos\eta)}$ en une série fort convergente, – je traiterai d'abord ce cas, et ensuite, je passerai à l'autre, celui de deux planètes principales.

28. **Problème 4.** Trouver les inégalités élémentaires dans le mouvement d'un satellite et de sa planète principale qui se meuvent dans le même plan.

Solution. Que C représente la planète principale, E son satellite et F le soleil; pour trouver le mouvement du satellite, tel qu'il doit paraître à un spectateur placé au centre de la planète C, en gardant les mêmes dénominations que dans le problème précédent, nous pourrons ici regarder la distance y comme incomparablement plus grande que la distance x; ce qui nous fournit l'avantage de convertir la distance $z = \sqrt{(yy + xx - 2xy\cos\eta)}$ en une série fort convergente dont il suffira de prendre quelques uns des premiers termes. Ayant donc

$$\frac{1}{z^3} = (yy + xx - 2xy\cos\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{y^3} + \frac{3x\cos\eta}{y^4} + \frac{3xx}{2y^5}(5\cos^2\eta - 1)$$

nous obtiendrons

$$\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy} = \frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1) \quad \text{et} \quad \frac{x}{z^3} = \frac{x}{y^3} + \frac{3xx\cos\eta}{y^4}$$

en négligeant les termes divisés par des puissances de y supérieures à la quatrième.

Posant donc pour le mouvement du satellite $x = \dfrac{p}{1 - q\cos v}$, nous aurons

$$dp = -\frac{2Fx\,dt\sin\eta}{C+E}\left(\frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1)\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$\begin{aligned}dq = \frac{F\,dt\sqrt{\frac{1}{2}(C+E)p}}{C+E}\Bigg\{&\frac{x}{y^3}\left(\sin v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\right)\\ &+ \frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\sin v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$\begin{aligned}dv = d\varphi + \frac{F\,dt\sqrt{\frac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\Bigg\{&\frac{x}{y^3}\left(\cos v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)\\ &+ \frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\cos v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Or pour le mouvement apparent du soleil, ou de la planète principale même, il suffira de poser $\dfrac{x}{z^3} - \dfrac{1}{xx} = -\dfrac{1}{xx}$ et $\dfrac{y}{z^3} = \dfrac{1}{yy}$. Donc faisant $y = \dfrac{r}{1 - s\cos u}$ nous aurons

$$dr = -\frac{2Ey\,dt\sin\eta}{(C+F)xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

$$ds = \frac{E\,dt\sqrt{\frac{1}{2}(C+F)r}}{C+F}\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

$$d\theta = \frac{dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r} = \frac{dt\,(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

$$du = d\theta + \frac{E\,dt\,\sqrt{\frac{1}{2}}\,(C+F)r}{(C+F)s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1 - s\cos u}\right)\right)$$

où l'on voit qu'on pourrait encore omettre les termes divisés par yy par rapport à ceux qui sont divisés par xx.

Si nous considérons un corps qui décrirait autour du centre C un cercle dont le rayon $= a$, et que ce corps, attiré vers le point C par la force $\frac{A}{aa}$, parcourt dans le temps t un angle $= \omega$, nous aurons $d\omega = \frac{dt}{aa}\sqrt{\frac{1}{2}}\,Aa$, et partant $dt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{aa\,d\omega}{\sqrt{Aa}}$, et nous pourrons introduire ce mouvement uniforme au lieu du temps dont il nous servira de mesure. Soit donc pour abréger

$$\frac{F\sqrt{(C+E)}}{(C+E)\sqrt{A}} = \frac{F}{\sqrt{A(C+E)}} = m\,, \qquad \frac{E\sqrt{(C+F)}}{(C+F)\sqrt{A}} = \frac{E}{\sqrt{A(C+F)}} = n$$

et nous aurons pour le mouvement du satellite

$$x = \frac{p}{1 - q\cos v}$$
$$d\varphi = \frac{d\omega}{xx}\sqrt{\frac{(C+E)a^3p}{A}}$$
$$dp = -\,2mx\,d\omega\sin\eta\left(\frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1)\right)\sqrt{a^3p}$$
$$dq = m\,d\omega\left\{\frac{x}{y^3}\left(\sin v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right)\right.$$
$$+\frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\sin v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right)\right\}\sqrt{a^3p}$$

$$dv = d\varphi + \frac{m\,d\omega}{q}\left\{\frac{x}{y^3}\left(\cos v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right)$$
$$+\frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\cos v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right)\right\}\sqrt{a^3p}$$

et pour le mouvement apparent du soleil, ou plutôt de la planète principale

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{r}{1 - s\cos u} \\
d\theta &= \frac{d\omega}{yy}\sqrt{\frac{(C+F)a^3 r}{A}} \\
dr &= -\frac{2ny\,d\omega\sin\eta}{xx}\sqrt{a^3 r} \\
ds &= n\,d\omega\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1 - s\cos u}\right)\right)\sqrt{a^3 r} \\
du &= d\theta + \frac{n\,d\omega}{s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u\right.\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left. - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1 - s\cos u}\right)\right)\sqrt{a^3 r}
\end{aligned}
$$

et pour le changement élémentaire de l'angle η on aura

$$d\eta = d\varphi - d\theta = \frac{d\omega}{xx}\sqrt{\frac{(C+E)a^3 p}{A}} - \frac{d\omega}{yy}\sqrt{\frac{(C+F)a^3 r}{A}}\,.$$

29. **Corollaire 1.** Puisque F, désignant la masse du soleil, est une quantité très grande par rapport à C et E, le nombre m sera aussi fort grand, à moins que la masse A ne soit prise extrêmement grande. Mais le calcul ne dépend point de cette masse A, puisqu'elle a été introduite conjointement avec la distance a pour nous fournir une mesure propre du temps.

30. **Corollaire 2.** Cependant ce nombre m étant multiplié par $\frac{x}{y^3}\sqrt{a^3 p}$ qui, y étant beaucoup plus grand que x, sera un nombre très petit, – ce produit, disons nous, sera réduit à une fraction très petite; ou bien, si cela n'arrivait point, alors le mouvement du satellite s'écarterait trop des règles de Kepler, pour qu'on puisse le déterminer par cette méthode.

31. **Corollaire 3.** Or le nombre n, étant extrêmement petit par lui-même, sera considérablement agrandi par le facteur $\frac{\sqrt{a^3 r}}{xx}$, et il faut remarquer de même, que s'il devenait alors trop grand, le mouvement de la planète principale résulterait trop irrégulier pour pouvoir être représenté par cette méthode. Or, heureusement, ces cas ne se rencontrent point dans notre système planétaire.

32. **Corollaire 4.** Il sera aussi bon de réduire les produits des sinus et cosinus, qui se trouvent dans nos formules, à des sinus ou cosinus simples. Ainsi, ayant

$$\sin\eta\cos\eta = \tfrac{1}{2}\sin 2\eta\,, \qquad 5\cos^2\eta - 1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}\cos 2\eta$$

et partant

$$\sin\eta\,(5\cos^2\eta - 1) = \tfrac{1}{4}\sin\eta + \tfrac{5}{4}\sin 3\eta\,,$$

nous aurons

$$dp = -3mx\,d\omega\left(\frac{x\sin 2\eta}{y^3} + \frac{xx}{4y^4}(\sin\eta + 5\sin 3\eta)\right)\sqrt{a^3p}\,.$$

33. **Corollaire 5.** De la même manière on trouvera[5]

$$\begin{aligned}\frac{dq}{m\,d\omega\sqrt{a^3p}} = \frac{x}{y^3}\Bigg(&-\frac{1}{2}\sin v + \frac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \frac{3}{4}\sin(2\eta + v)\\ &-\frac{3q}{8(1-q\cos v)}\Big(2\sin 2\eta - \sin(2\eta - 2v) - \sin(2\eta + 2v)\Big)\Bigg)\\ &+\frac{3xx}{2y^4}\left(\frac{5}{8}\sin(\eta - v) - \frac{1}{8}\sin(\eta + v) + \frac{15}{8}\sin(3\eta - v) + \frac{5}{8}\sin(3\eta + v)\right)\\ &-\frac{3qxx}{2y^4(1-q\cos v)}\Bigg(\frac{1}{8}\sin\eta - \frac{1}{16}\sin(\eta - 2v) - \frac{1}{16}\sin(\eta + 2v)\\ &\qquad + \frac{5}{8}\sin 3\eta - \frac{5}{16}\sin(3\eta - 2v) - \frac{5}{16}\sin(3\eta + 2v)\Bigg)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{q(dv - d\varphi)}{m\,d\omega\sqrt{a^3p}} = \frac{x}{y^3}\Bigg(&-\frac{1}{2}\cos v - \frac{9}{4}\cos(2\eta - v) + \frac{3}{4}\cos(2\eta + v)\\ &-\frac{3q}{8(1-q\cos v)}\Big(\cos(2\eta - 2v) - \cos(2\eta + 2v)\Big)\Bigg)\\ &+\frac{3xx}{2y^4}\left(-\frac{5}{8}\cos(\eta - v) - \frac{1}{8}\cos(\eta + v) - \frac{15}{8}\cos(3\eta - v) + \frac{5}{8}\cos(3\eta + v)\right)\\ &-\frac{3qxx}{2y^4(1-q\cos v)}\Bigg(\frac{1}{16}\cos(\eta - 2v) - \frac{1}{16}\cos(\eta + 2v)\\ &\qquad + \frac{5}{16}\cos(3\eta - 2v) - \frac{5}{16}\cos(3\eta + 2v)\Bigg)\,.\end{aligned}$$

34. **Corollaire 6.** Pour le mouvement apparent du soleil ou le vrai mouvement de la planète, nous aurons après cette réduction

$$\begin{aligned}dr &= -\frac{2ny\,d\omega\sin\eta}{xx}\sqrt{a^3r}\\ ds &= n\,d\omega\left\{\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\Big(\tfrac{1}{2}\sin(\eta - u) + \tfrac{3}{2}\sin(\eta + u)\right.\\ &\qquad\left. - \frac{s}{4(1-s\cos u)}\Big(2\sin\eta - \sin(\eta - 2u) - \sin(\eta + 2u)\Big)\Big)\right\}\sqrt{a^3r}\end{aligned}$$

5 Édition originale: $-\frac{5}{16}\sin(3\eta + 3v)$ au lieu de $-\frac{5}{16}\sin(3\eta + 2v)$.

$$du = d\theta + \frac{n\,d\omega}{s}\left\{\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(-\tfrac{1}{2}\cos(\eta-u) + \tfrac{3}{2}\cos(\eta+u)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{s}{4(1-s\cos u)}\Big(\cos(\eta-2u) - \cos(\eta+2u)\Big)\right)\right\}\sqrt{a^3r}\,.$$

Ainsi toutes les différentielles de nos éléments sont réduites à l'élément $d\omega$ du temps.

35. **Scholie 1.** Ces expressions affectées par m et n contiennent les inégalités ou plutôt les aberrations de l'un et de l'autre mouvement des règles de KEPLER. Car si ces lettres m et n étaient $= 0$, tant les demi-paramètres p et r, que les excentricités q et s seraient constantes, et le mouvement des absides, ou bien $d\varphi - dv$ et $d\theta - du$ s'évanouirait, tout comme les règles de KEPLER le supposent. De là on comprend, en quoi les inégalités, causées par les lettres m et n, consistent: les demi-paramètres p et r, de même que les excentricités q et s, ne seront plus constants, mais contiendront, outre les valeurs constantes qu'ils auraient s'il y avait $m = 0$ et $n = 0$, encore des parties variables affectées de m et n, d'où dépendra aussi le mouvement des absides, de sorte que les angles $\varphi - v$ et $\theta - u$ ne seront plus constants, mais contiendront aussi des membres variables affectés des valeurs m et n. Ce seront donc les inégalités dont il faut chercher les valeurs; or, pour que cela puisse se faire par la voie d'approximation, je remarque d'abord, que les termes affectés de m et n doivent être fort petits par rapport aux autres qui ne contiennent pas ces lettres, et parmi ces termes il y en aura deux espèces pour le mouvement du satellite: les uns étant multipliés par $\frac{x}{y^3}$, et les autres par $\frac{xx}{y^4}$ dont ceux-ci seront incomparablement plus petits que ceux-là; c'est pourquoi aussi nous avons déjà négligé les termes qui seraient multipliés par $\frac{x^3}{y^5}$, $\frac{x^4}{y^6}$ etc. comme quantités tout à fait evanouissantes. Il conviendra donc de commencer par la recherche des termes affectés par $\frac{x}{y^3}$ comme de ceux qui renferment les inégalités principales; et ensuite, on pourra procéder à la recherche de ceux qui ont $\frac{xx}{y^4}$ pour facteur et qu'on nomme les inégalités parallactiques. Ensuite on parviendra aussi à des termes affectés de mm, ou mn, ou nn; car si, par exemple, les valeurs de p, r, q, s, v et u contiennent des termes affectés de m et n, ces quantités sont jointes dans nos formules aux facteurs m et n, il en résultera des termes affectés de mm, mn et nn qui seront, par conséquent, incomparablement plus petit que ceux qui contiennent simplement m et n; on pourra donc les négliger, à moins qu'il ne s'agisse du mouvement de la ligne des absides dont il faut connaître les moindres inégalités. Or, par cette raison, on omettra entièrement les termes dérivatifs de ceux qui seraient affectés des dimensions plus élvées de m et n. On aura donc trois sortes d'inégalités pour le mouvement du satellite: 1° les inégalités principales qui contiennent simplement $\frac{mx}{y^3}$, 2° les inégalités parallactiques qui contiennent $\frac{mxx}{y^4}$, et 3° les inégalités dérivatives qui renferment mm ou mn ou nn et qui résultent des

principales; car quoique les inégalités parallactiques fournissent aussi de pareilles dérivées, on pourra s'en passer à cause de leur extrême petitesse.

36. **Scholie 2.** Outre cela, il faut avoir égard à une autre circonstance qui favorisera l'approximation: c'est la petitesse des excentricités q et s; car, si elles étaient trop considérables, il faut avouer qu'il serait extrêmement difficile de réussir dans cette besogne. Mais il arrive encore fort heureusement qu'il n'y a point dans notre système planétaire des excentricités assez grandes pour rendre cette méthode inutile ou impraticable. Les quantités q et s seront donc exprimées par des fractions assez petites, en sorte que les formules $q\cos v$ et $s\sin\omega$ seront considérablement plus petites que l'unité. De là nous tirerons cet avantage, que même dans les termes fournis par les lois de Kepler, ou qui ne sont affectés ni de m ni de n, on puisse négliger ceux qui renferment des puissances de q et s, supérieurs à la troisième, à la quatrième ou tout au plus à la cinquième. Donc dans les inégalités principales, on n'aura pas besoin de les pousser au delà des carrés des excentricités, ou bien on négligera les termes affectés des degrés supérieurs aux carrés des excentricités q et s. Or dans les inégalités parallactiques et dérivées, on pourra même négliger les parties affectés des carrés de q et de s. Telle sera donc la marche à suivre dans la recherche des inégalités qui altèrent le mouvement tant du satellite que de la planète principale.

37. **Problème 5.** Trouver les inégalités principales qui doivent se trouver dans le mouvement d'un satellite.

Solution. Puisque $x = \dfrac{p}{1-q\cos v}$ et $y = \dfrac{r}{1-s\cos u}$, nous aurons pour les inégalités principales

$$\frac{x}{y^3} = \frac{p(1-s\cos u)^3}{r^3(1-q\cos v)} .$$

Donc, puisque ce terme est fort petit par lui-même, nous négligerons les termes qui contiendraient plus d'une dimension de q et s, et partant nous aurons

$$\frac{x}{y^3} = \frac{p}{r^3}(1+q\cos v-3s\cos u) ,$$

et par conséquent

$$\frac{xx}{y^3} = \frac{pp}{r^3}(1+2q\cos v-3s\cos u) .$$

Donc, ayant pour les inégalités principales $dp = -\dfrac{3mxx\,d\omega\sin 2\eta}{y^3}\sqrt{a^3p}$, nous aurons

$$\text{I.}\quad dp = -\frac{3mpp\,d\omega\sqrt{a^3p}}{r^3}\Big(\sin 2\eta + q\sin(2\eta-v) + q\sin(2\eta+v) - \tfrac{3}{2}\,s\sin(2\eta-u) - \tfrac{3}{2}\,s\sin(2\eta+u)\Big) .$$

Ensuite, pour dq, posant q pour $\frac{q}{1-q\cos v}$, de sorte que nous ayons pour les inégalités principales[6]

$$\frac{dq}{m\,d\omega\,\sqrt{a^3p}} = \frac{x}{y^3}\Big(-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v) \\ - \tfrac{3}{4}q\sin 2\eta + \tfrac{3}{8}q\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{8}q\sin(2\eta + 2v)\Big)$$

nous aurons

$$\text{II.}\quad dq = \frac{mp\,d\omega\,\sqrt{a^3p}}{r^3}\Big(-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v) \\ + \tfrac{3}{4}q\sin 2\eta - \tfrac{1}{4}q\sin 2v \\ + \tfrac{3}{2}q\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}q\sin(2\eta + 2v) \\ + \tfrac{3}{4}s\sin(v - u) + \tfrac{3}{4}s\sin(v + u) \\ - \tfrac{27}{8}s\sin(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8}s\sin(2\eta - v + u) \\ - \tfrac{9}{8}s\sin(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}s\sin(2\eta + v + u)\Big)\,.$$

Enfin nous aurons

$$\text{III.}\quad q(dv - d\varphi) = \frac{mp\,d\omega\,\sqrt{a^3p}}{r^3}\Big(-\tfrac{1}{4}q - \tfrac{1}{2}\cos v - \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v) \\ - \tfrac{1}{4}q\cos 2v - \tfrac{3}{4}q\cos 2\eta \\ - \tfrac{3}{2}q\cos(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}q\cos(2\eta + 2v) \\ + \tfrac{3}{4}s\cos(v - u) + \tfrac{3}{4}s\cos(v + u) \\ + \tfrac{27}{8}s\cos(2\eta - v - u) + \tfrac{27}{8}s\cos(2\eta - v + u) \\ - \tfrac{9}{8}s\cos(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}s\cos(2\eta + v + u)\Big)\,.$$

Or puisque nous ne cherchons que les inégalités principales qui sont simplement multipliées par m, nous négligerons, dans les membres de ces équations affectés par m, les termes qui dépendent déjà de m ou de n, et partant les quantités p, r, q et s, y seront constantes. De plus, dans ces mêmes termes nous supposerons $dv = d\varphi$ et $du = d\theta$. Donc puisque

$$d\varphi = \frac{d\omega\,(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\frac{(C+E)a^3p}{A}}\,,$$

6 Édition originale: $\frac{7}{4}\sin(2\eta + v)$ au lieu de $\frac{3}{4}\sin(2\eta + v)$.

on aura

$$dv = d\omega\,(1 - 2q\cos v)\,\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ap^3}}$$

ou p et q seront regardées comme constantes. De même nous aurons

$$du = d\omega\,(1 - 2s\cos u)\,\sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ar^3}}$$

et partant

$$d\eta = d\omega\,\left((1 - 2q\cos v)\,\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ap^3}} - (1 - 2s\cos u)\,\sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ar^3}}\right)\ .$$

Or $\sqrt{\dfrac{C+E}{A}} = \dfrac{F}{mA}$ et $\sqrt{\dfrac{C+F}{A}} = \dfrac{E}{nA}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{F\,d\omega}{mA}(1 - 2q\cos v)\,\sqrt{\frac{a^3}{p^3}}\ ,\\
du &= \frac{E\,d\omega}{nA}(1 - 2s\cos u)\,\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}\ ,\\
d\eta &= d\omega\,\left(\frac{F}{mA}(1 - 2q\cos v)\,\sqrt{\frac{a^3}{p^3}} - \frac{E}{nA}(1 - 2s\cos u)\,\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}\right)\ .
\end{aligned}$$

Maintenant, parce que nous regardons p, q, r et s comme constantes, soit

$$p = b + \dots\ ,\quad q = g + \dots\ ,\quad r = c + \dots\ ,\quad s = h + \dots\ ;$$

ce sont les valeurs naturelles ou moyennes de ces lettres, auxquelles il faut ensuite ajouter les particules qui leur conviennent à cause des inégalités. Soit donc pour abréger

$$\frac{F}{mA}\,\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ab^3}} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{E}{nA}\,\sqrt{\frac{a^3}{c^3}} = \sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ac^3}} = \nu$$

et partant

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\omega} &= \mu - 2\mu g\cos v\ ,\\
\frac{du}{d\omega} &= \nu - 2\nu h\cos u\ ,\\
\frac{d\eta}{d\omega} &= \mu - \nu - 2\mu g\cos v + 2\nu h\cos u\ .
\end{aligned}$$

Soit de plus $\dfrac{m\sqrt{a^3b^3}}{c^3} = \kappa$, pour qu'il y ait

$$\frac{dp}{d\omega} = -3\kappa b\big(\sin 2\eta + g\sin(2\eta - v) + g\sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{2}h\sin(2\eta - u) - \tfrac{3}{2}h\sin(2\eta + u)\big)$$

et qu'on pose pour intégrer

$$\begin{aligned} p = b\Big(1 &+ \kappa\,\mathfrak{A}\cos 2\eta + \kappa\,\mathfrak{B}\,g\cos(2\eta - v) + \kappa\,\mathfrak{C}\,g\cos(2\eta + v) \\ &- \kappa\,\mathfrak{D}\,h\cos(2\eta - u) - \kappa\,\mathfrak{E}\,h\cos(2\eta + u)\Big)\,. \end{aligned}$$

Donc pour trouver ces coefficients, qu'on différentie cette valeur supposée

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\kappa\,b\,d\omega} = &- 2(\mu - \nu)\mathfrak{A}\sin 2\eta \\ &+ \Big(2\mu g\mathfrak{A} - (\mu - 2\nu)g\mathfrak{B}\Big)\sin(2\eta - v) \\ &+ \Big(2\mu g\mathfrak{A} - (3\mu - 2\nu)g\mathfrak{C}\Big)\sin(2\eta + v) \\ &+ \Big(-2\nu h\mathfrak{A} + (2\mu - 3\nu)h\mathfrak{D}\Big)\sin(2\eta - u) \\ &+ \Big(-2\nu h\mathfrak{A} + (2\mu - \nu)h\mathfrak{E}\Big)\sin(2\eta + u) \end{aligned}$$

d'où il faut qu'il soit

$$\begin{aligned} -2(\mu - \nu)\mathfrak{A} &= -3 &\quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} &= \tfrac{3}{2(\mu-\nu)} \\ 2\mu\mathfrak{A} - (\mu - 2\nu)\mathfrak{B} &= -3 & \mathfrak{B} &= \tfrac{2\mu\mathfrak{A}+3}{\mu-2\nu} = \tfrac{3(2\mu-\nu)}{(\mu-\nu)(\mu-2\nu)} \\ 2\mu\mathfrak{A} - (3\mu - 2\nu)\mathfrak{C} &= -3 & \mathfrak{C} &= \tfrac{2\mu\mathfrak{A}+3}{3\mu-2\nu} = \tfrac{3(2\mu-\nu)}{(\mu-\nu)(3\mu-2\nu)} \\ -2\nu\mathfrak{A} + (2\mu - 3\nu)\mathfrak{D} &= +\tfrac{9}{2} & \mathfrak{D} &= \tfrac{4\nu\mathfrak{A}+9}{2(2\mu-3\nu)} = \tfrac{3(3\mu-\nu)}{2(\mu-\nu)(2\mu-3\nu)} \\ -2\nu\mathfrak{A} + (2\mu - \nu)\mathfrak{E} &= +\tfrac{9}{2} & \mathfrak{E} &= \tfrac{4\nu\mathfrak{A}+9}{2(2\mu-\nu)} = \tfrac{3(3\mu-\nu)}{2(\mu-\nu)(2\mu-\nu)} \end{aligned}$$

et de là nous tirons

$$\begin{aligned} \frac{p}{b} = 1 &+ \frac{3\kappa}{2(\mu - \nu)}\cos 2\eta \\ &+ \frac{3\kappa(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)}g\cos(2\eta - v) - \frac{3\kappa(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - 3\nu)}h\cos(2\eta - u) \\ &+ \frac{3\kappa(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(3\mu - 2\nu)}g\cos(2\eta + v) - \frac{3\kappa(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - \nu)}h\cos(2\eta + u)\,. \end{aligned}$$

C'est donc en ces termes que sont comprises les inégalités principales du demi paramètre p. Cherchons de la même manière les inégalités principales de l'excentricité q, pour la quelle nous avons cette équation

$$\begin{aligned}\frac{dq}{\kappa\,d\omega} = &-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v)\\ &+\tfrac{3}{4}g\sin 2\eta - \tfrac{1}{4}g\sin 2v + \tfrac{3}{2}g\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}g\sin(2\eta + 2v)\\ &+\tfrac{3}{4}h\sin(v-u) + \tfrac{3}{4}h\sin(v+u)\\ &-\tfrac{27}{8}h\sin(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8}h\sin(2\eta - v + u)\\ &-\tfrac{9}{8}h\sin(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}h\sin(2\eta + v + u)\ .\end{aligned}$$

Posons donc

$$\begin{aligned}q = g &+ \kappa\,\mathfrak{A}\cos v + \kappa\,\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) + \kappa\,\mathfrak{C}\cos(2\eta + v)\\ &+\kappa\,\mathfrak{D}\,g\cos 2\eta + \kappa\,\mathfrak{E}\,g\cos 2v + \kappa\,\mathfrak{F}\,g\cos(2\eta - 2v) + \kappa\,\mathfrak{G}\,g\cos(2\eta + 2v)\\ &+\kappa\,\mathfrak{H}\,h\cos(v-u) + \kappa\,\mathfrak{J}\,h\cos(v+u)\\ &+\kappa\,\mathfrak{L}\,h\cos(2\eta - v - u) + \kappa\,\mathfrak{M}\,h\cos(2\eta - v + u)\\ &+\kappa\,\mathfrak{N}\,h\cos(2\eta + v - u) + \kappa\,\mathfrak{O}\,h\cos(2\eta + v + u)\end{aligned}$$

et la différentielle sera[7]

$$\begin{aligned}\frac{dq}{\kappa\,d\omega} = &-\mu\,\mathfrak{A}\sin v - (\mu - 2\nu)\,\mathfrak{B}\sin(2\eta - v) - (3\mu - 2\nu)\,\mathfrak{C}\sin(2\eta + v)\\ &+\Big(\mu\,\mathfrak{B}\,g + 3\mu\,\mathfrak{C}\,g - 2(\mu-\nu)\,\mathfrak{D}\,g\Big)\sin 2\eta\\ &+\Big(\mu\,\mathfrak{A}\,g - 2\mu\,\mathfrak{E}\,g\Big)\sin 2v + \Big(\mu\,\mathfrak{B}\,g + 2\nu\,\mathfrak{F}\,g\Big)\sin(2\eta - 2v)\\ &+\Big(3\mu\,\mathfrak{C}\,g - 2(2\mu-\nu)\,\mathfrak{G}\,g\Big)\sin(2\eta + 2v)\\ &-(\mu-\nu)\,\mathfrak{H}\,h\sin(v-u) - (\mu+\nu)\,\mathfrak{J}\,h\sin(v+u)\\ &+\Big(-2\nu\,\mathfrak{B}\,h - (\mu - 3\nu)\,\mathfrak{L}\,h\Big)\sin(2\eta - v - u)\\ &+\Big(-2\nu\,\mathfrak{B}\,h - (\mu - \nu)\,\mathfrak{M}\,h\Big)\sin(2\eta - v + u)\\ &+\Big(-2\nu\,\mathfrak{C}\,h - (3\mu - 3\nu)\,\mathfrak{N}\,h\Big)\sin(2\eta + v - u)\\ &+\Big(-2\nu\,\mathfrak{C}\,h - (3\mu - \nu)\,\mathfrak{O}\,h\Big)\sin(2\eta + v + u)\end{aligned}$$

7 Édition originale: $-2(\mu-\nu)\,\mathfrak{D}\sin 2\eta$ au lieu de $-2(\mu-\nu)\,\mathfrak{D}g\sin 2\eta$; $3\mu\,\mathfrak{B}\,g\sin(2\eta+2v)$ au lieu de $3\mu\,\mathfrak{C}\,g\sin(2\eta+2v)$.

d'où nous concluons

$$
\begin{aligned}
\mu\,\mathfrak{A} &= \tfrac{1}{2} & &\text{ou} & \mathfrak{A} &= \tfrac{1}{2\mu}\\
-(\mu-2\nu)\,\mathfrak{B} &= \tfrac{9}{4} & & & \mathfrak{B} &= -\tfrac{9}{4(\mu-2\nu)}\\
-(3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C} &= \tfrac{3}{4} & & & \mathfrak{C} &= -\tfrac{3}{4(3\mu-2\nu)}\\
\mu\,\mathfrak{B}+3\mu\,\mathfrak{C}-2(\mu-\nu)\,\mathfrak{D} &= \tfrac{3}{4} & & & \mathfrak{D} &= -\tfrac{9\mu}{2(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)}-\tfrac{3}{8(\mu-\nu)}\\
\mu\,\mathfrak{A}-2\mu\,\mathfrak{E} &= -\tfrac{1}{4} & & & \mathfrak{E} &= \tfrac{3}{8\mu}\\
\mu\,\mathfrak{B}+2\nu\,\mathfrak{F} &= \tfrac{3}{2} & & & \mathfrak{F} &= \tfrac{3(5\mu-4\nu)}{8\nu(\mu-2\nu)}\\
3\mu\,\mathfrak{C}-2(2\mu-\nu)\,\mathfrak{G} &= \tfrac{3}{4} & & & \mathfrak{G} &= -\tfrac{3(3\mu-\nu)}{4(2\mu-\nu)(3\mu-2\nu)}\\
-(\mu-\nu)\,\mathfrak{H} &= \tfrac{3}{4} & & & \mathfrak{H} &= -\tfrac{3}{4(\mu-\nu)}\\
-(\mu+\nu)\,\mathfrak{J} &= \tfrac{3}{4} & & & \mathfrak{J} &= -\tfrac{3}{4(\mu+\nu)}\\
-2\nu\,\mathfrak{B}-(\mu-3\nu)\,\mathfrak{L} &= -\tfrac{27}{8} & & & \mathfrak{L} &= \tfrac{9(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-3\nu)}\\
-2\nu\,\mathfrak{B}-(\mu-\nu)\,\mathfrak{M} &= -\tfrac{27}{8} & & & \mathfrak{M} &= \tfrac{9(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-\nu)}\\
-2\nu\,\mathfrak{C}-(3\mu-3\nu)\,\mathfrak{N} &= -\tfrac{9}{8} & & & \mathfrak{N} &= \tfrac{3(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-3\nu)}\\
-2\nu\,\mathfrak{C}-(3\mu-\nu)\,\mathfrak{O} &= -\tfrac{9}{8} & & & \mathfrak{O} &= \tfrac{3(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-\nu)}
\end{aligned}
$$

et partant nous aurons

$$
\begin{aligned}
q = g &+ \frac{\kappa}{2\mu}\cos\upsilon - \frac{9\kappa}{4(\mu-2\nu)}\cos(2\eta-\upsilon) - \frac{3\kappa}{4(3\mu-2\nu)}\cos(2\eta+\upsilon)\\
&- \left(\frac{9\mu}{2(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)} + \frac{3}{8(\mu-\nu)}\right)\kappa g\cos 2\eta + \frac{3\kappa}{8\mu} g\cos 2\upsilon\\
&+ \frac{3\kappa(5\mu-4\nu)}{8\nu(\mu-2\nu)}\,g\cos(2\eta-2\upsilon) - \frac{3\kappa(3\mu-\nu)}{4(2\mu-\nu)(3\mu-2\nu)}\,g\cos(2\eta+2\upsilon)\\
&- \frac{3\kappa}{4(\mu-\nu)}\,h\cos(\upsilon-u) - \frac{3\kappa}{4(\mu+\nu)}\,h\cos(\upsilon+u)\\
&+ \frac{9\kappa(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-3\nu)}\,h\cos(2\eta-\upsilon-u)\\
&+ \frac{9\kappa(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-\nu)}\,h\cos(2\eta-\upsilon+u)\\
&+ \frac{3\kappa(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-3\nu)}\,h\cos(2\eta+\upsilon-u)\\
&+ \frac{3\kappa(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-\nu)}\,h\cos(2\eta+\upsilon+u)\,.
\end{aligned}
$$

Enfin, pour le mouvement des absides nous avons

$$\begin{aligned}\frac{q(d\varphi - dv)}{\kappa\, d\omega} = \tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{2}\cos v + \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) - \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v)\\ + \tfrac{1}{4}g\cos 2v + \tfrac{3}{4}g\cos 2\eta + \tfrac{3}{2}g\cos(2\eta - 2v) - \tfrac{3}{4}g\cos(2\eta + 2v)\\ - \tfrac{3}{4}h\cos(v - u) - \tfrac{3}{4}h\cos(v + u)\\ - \tfrac{27}{8}h\cos(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8}h\cos(2\eta - v + u)\\ + \tfrac{9}{8}h\cos(2\eta + v - u) + \tfrac{9}{8}h\cos(2\eta + v + u)\ .\end{aligned}$$

Posons donc[8]

$$\begin{aligned}\varphi - v = \kappa O\omega + \kappa\,\mathfrak{A}\sin v + \kappa\,\mathfrak{B}\sin(2\eta - v) + \kappa\,\mathfrak{C}\sin(2\eta + v)\\ + \kappa\,\mathfrak{D}\,g\sin 2\eta + \kappa\,\mathfrak{E}\,g\sin 2v + \kappa\,\mathfrak{F}\,g\sin(2\eta - 2v) + \kappa\,\mathfrak{G}\,g\sin(2\eta + 2v)\\ + \kappa\,\mathfrak{H}\,h\sin(v - u) + \kappa\,\mathfrak{J}\,h\sin(v + u)\\ + \kappa\,\mathfrak{L}\,h\sin(2\eta - v - u) + \kappa\,\mathfrak{M}\,h\sin(2\eta - v + u)\\ + \kappa\,\mathfrak{N}\,h\sin(2\eta + v - u) + \kappa\,\mathfrak{O}\,h\sin(2\eta + v + u)\end{aligned}$$

et la différentielle sera

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi - dv}{\kappa\, d\omega} = O + \mu\,\mathfrak{A}\cos v + (\mu - 2\nu)\,\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) + (3\mu - 2\nu)\,\mathfrak{C}\cos(2\eta + v)\\ - \mu\,\mathfrak{A}\,g + \Big(- \mu\,\mathfrak{B}\,g - 3\mu\,\mathfrak{C}\,g + 2(\mu - \nu)\,\mathfrak{D}\,g\Big)\cos 2\eta\\ + \Big(- \mu\,\mathfrak{A}\,g + 2\mu\,\mathfrak{E}\,g\Big)\cos 2v + \Big(- \mu\,\mathfrak{B}\,g - 2\nu\,\mathfrak{F}\,g\Big)\cos(2\eta - 2v)\\ + \Big(- 3\mu\,\mathfrak{C}\,g + 2(2\mu - \nu)\,\mathfrak{G}\,g\Big)\cos(2\eta + 2v)\\ + (\mu - \nu)\,\mathfrak{H}\,h\cos(v - u) + (\mu + \nu)\,\mathfrak{J}\,h\cos(v + u)\\ + \Big(2\nu\,\mathfrak{B}\,h + (\mu - 3\nu)\,\mathfrak{L}\,h\Big)\cos(2\eta - v - u)\\ + \Big(2\nu\,\mathfrak{B}\,h + (\mu - \nu)\,\mathfrak{M}\,h\Big)\cos(2\eta - v + u)\\ + \Big(2\nu\,\mathfrak{C}\,h + (3\mu - 3\nu)\,\mathfrak{N}\,h\Big)\cos(2\eta + v - u)\\ + \Big(2\nu\,\mathfrak{C}\,h + (3\mu - \nu)\,\mathfrak{O}\,h\Big)\cos(2\eta + v + u)\ .\end{aligned}$$

Qu'on la multiplie par[9] $q = g + \alpha\cos v - \beta\cos(2\eta - v) - \gamma\cos(2\eta + v)$, posant

8 Édition originale: $+\kappa\,\mathfrak{G}\,g\sin(2\eta + v)$ au lieu de $+\kappa\,\mathfrak{G}\,g\sin(2\eta + 2v)$.
9 Édition originale: $+\beta\cos(2\eta - v)$ au lieu de $-\beta\cos(2\eta - v)$.

pour abréger $\alpha = \frac{\kappa}{2\mu}$, $\beta = \frac{9\kappa}{4(\mu-2\nu)}$ et $\gamma = \frac{3\kappa}{4(3\mu-2\nu)}$, et l'on aura[10]

$$\begin{aligned}
\frac{q(d\varphi - dv)}{\kappa\, d\omega} = Og - \mu\,\mathfrak{A}\,gg + \Big(\mu\,\mathfrak{A}\,g + O\alpha\Big)\cos v \\
+ \Big((\mu-2\nu)\,\mathfrak{B}\,g - O\beta\Big)\cos(2\eta - v) \\
+ \Big((3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C}\,g - O\gamma\Big)\cos(2\eta + v) \\
+ \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\alpha - \tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\,\mathfrak{B}\,\beta - \tfrac{1}{2}(3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\,\gamma \\
+ \Big(-\mu\,\mathfrak{B}\,gg - 3\mu\,\mathfrak{C}\,gg + 2(\mu-\nu)\,\mathfrak{D}\,gg + \tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\,\mathfrak{B}\,\alpha \\
+ \tfrac{1}{2}(3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C}\,\alpha - \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\beta - \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\gamma\Big)\cos 2\eta \\
+ \Big(-\mu\,\mathfrak{A}\,gg + 2\mu\,\mathfrak{E}\,gg + \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\alpha\Big)\cos 2v \\
+ \Big(-\mu\,\mathfrak{B}\,gg - 2\nu\,\mathfrak{F}\,gg + \tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\,\mathfrak{B}\,\alpha - \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\beta\Big)\cos(2\eta - 2v) \\
+ \Big(-3\mu\,\mathfrak{C}\,gg + 2(2\mu-\nu)\,\mathfrak{G}\,gg \\
+ \tfrac{1}{2}(3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C}\,\alpha - \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\gamma\Big)\cos(2\eta + 2v) \\
+ (\mu-\nu)\,\mathfrak{H}\,gh\cos(v-u) + (\mu+\nu)\,\mathfrak{J}\,gh\cos(v+u) \\
+ \Big(2\nu\,\mathfrak{B}\,gh + (\mu-3\nu)\,\mathfrak{L}\,gh\Big)\cos(2\eta - v - u) \\
+ \Big(2\nu\,\mathfrak{B}\,gh + (\mu-\nu)\,\mathfrak{M}\,gh\Big)\cos(2\eta - v + u) \\
+ \Big(2\nu\,\mathfrak{C}\,gh + (3\mu-3\nu)\,\mathfrak{N}\,gh\Big)\cos(2\eta + v - u) \\
+ \Big(2\nu\,\mathfrak{C}\,gh + (3\mu-\nu)\,\mathfrak{O}\,gh\Big)\cos(2\eta + v + u)
\end{aligned}$$

Donc[11]

$$\begin{aligned}
\mu\,\mathfrak{A}\,g + O\alpha &= \tfrac{1}{2} &\quad \text{ou} \quad&& \mu\,\mathfrak{A} &= \tfrac{1-2\,O\alpha}{2g} \\
(\mu-2\nu)\,\mathfrak{B}\,g - O\beta &= \tfrac{9}{4} &&& (\mu-2\nu)\,\mathfrak{B} &= \tfrac{9+4\,O\beta}{4g} \\
(3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C}\,g - O\gamma &= -\tfrac{3}{4} &&& (3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C} &= \tfrac{-3+4\,O\gamma}{4g}
\end{aligned}$$

et ces valeurs substituées dans le premier terme constant donnent[12]

$$Og - \tfrac{1}{2}g + O\alpha g + \frac{\alpha - 2O\alpha\alpha}{4g} - \frac{9\beta + 4O\beta\beta}{8g} + \frac{3\gamma - 4O\gamma\gamma}{8g} = \frac{1}{4}g$$

10 Édition originale: $+\frac{1}{2}(\mu-2\nu)\,\mathfrak{C}\,\alpha$ dans le coefficient de $\cos 2\eta$. Cf. [Verdun 2015], p. 924.
11 Édition originale: $9 - 4\,O\beta$ au lieu de $9 + 4\,O\beta$.
12 Édition originale: $9\beta - 4O\beta\beta$ au lieu de $9\beta + 4O\beta\beta$.

ou[13]

$$O\left(g+\alpha g-\frac{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma}{2g}\right)=\frac{3}{4}g-\frac{2\alpha-9\beta+3\gamma}{8g}$$

donc

$$O=\frac{6gg-2\alpha+9\beta-3\gamma}{8gg(1+\alpha)-4\alpha\alpha-4\beta\beta-4\gamma\gamma}\,.$$

Ensuite on aura[14]

$$\begin{aligned}
2(\mu-\nu)\,\mathfrak{D}\,gg &= \mu\,(\mathfrak{B}+3\mathfrak{C})gg-\frac{3\alpha}{4g}+\frac{(\beta+\gamma)(1-4O\alpha)}{4g}+\frac{3}{4}g\\
2\mu\,\mathfrak{E}\,gg &= \mu\,\mathfrak{A}\,gg-\frac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\alpha+\frac{1}{4}g+\frac{\gamma(3+4O\beta)}{4g}\\
-2\nu\,\mathfrak{F}\,gg &= \mu\,\mathfrak{B}\,gg-\frac{1}{2}(\mu-2\nu)\,\mathfrak{B}\,\alpha+\frac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\beta+\frac{3}{2}g\\
2(2\mu-\nu)\,\mathfrak{G}\,gg &= 3\mu\,\mathfrak{C}\,gg-\frac{1}{2}(3\mu-2\nu)\,\mathfrak{C}\,\alpha+\frac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\gamma-\frac{3}{4}g\\
(\mu-\nu)\,\mathfrak{H}\,gh &= -\frac{3}{4}h\\
(\mu+\nu)\,\mathfrak{I}\,gh &= -\frac{3}{4}h\\
(\mu-3\nu)\mathfrak{L}\,gh &= -2\nu\,\mathfrak{B}\,gh-\frac{27}{8}h\\
(\mu-\nu)\mathfrak{M}\,gh &= -2\nu\,\mathfrak{B}\,gh-\frac{27}{8}h\\
(3\mu-3\nu)\mathfrak{N}\,gh &= -2\nu\,\mathfrak{C}\,gh+\frac{9}{8}h\\
(3\mu-\nu)\mathfrak{O}\,gh &= -2\nu\,\mathfrak{C}\,gh+\frac{9}{8}h\,.
\end{aligned}$$

Or les quantités α, β, γ étant des fractions extrêmement petites, on aura à peu près[15]

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{1}{2\mu g}\\
\mathfrak{B} &= \frac{9}{4(\mu-2\nu)g}\\
\mathfrak{C} &= -\frac{3}{4(3\mu-2\nu)g}\\
\mathfrak{D}\,g &= \frac{9\mu\mu}{4(\mu-\nu)(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)}+\frac{3}{8(\mu-\nu)}+\frac{\beta+\gamma-3\alpha}{8(\mu-\nu)gg}
\end{aligned}$$

13 Édition originale: $\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma$ au lieu de $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma$; $2\alpha+9\beta-3\gamma$ au lieu de $2\alpha-9\beta+3\gamma$.
14 Édition originale: $2\mu\,\mathfrak{E}\,gg=\mu\,\mathfrak{A}\,gg-\frac{1}{2}\mu\,\mathfrak{A}\,\alpha+\frac{1}{4}g$.
15 Édition originale: $\mathfrak{E}\,g=\frac{3}{8\mu}-\frac{\alpha}{8\mu gg}$.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}\,g &= \frac{3}{8\mu} - \frac{\alpha - 3\gamma(1+\beta)}{8\mu gg} \\
\mathfrak{F}\,g &= -\frac{3(5\mu - 4\nu)}{8\nu(\mu - 2\nu)} + \frac{9\alpha - 2\beta}{16\nu gg} \\
\mathfrak{G}\,g &= -\frac{3(3\mu - \nu)}{4(3\mu - 2\nu)(2\mu - \nu)} + \frac{3\alpha + 2\gamma}{16(2\mu - \nu)gg} \\
\mathfrak{H}\,h &= -\frac{3h}{4(\mu - \nu)g} \\
\mathfrak{J}\,h &= -\frac{3h}{4(\mu + \nu)g} \\
\mathfrak{L}\,h &= -\frac{9(3\mu - 2\nu)h}{8(\mu - 2\nu)(\mu - 3\nu)g} \\
\mathfrak{M}\,h &= -\frac{9(3\mu - 2\nu)h}{8(\mu - 2\nu)(\mu - \nu)g} \\
\mathfrak{N}\,h &= \frac{3(9\mu - 2\nu)h}{8(3\mu - 2\nu)(3\mu - 3\nu)g} \\
\mathfrak{O}\,h &= \frac{3(9\mu - 2\nu)h}{8(3\mu - 2\nu)(3\mu - \nu)g}
\end{aligned}
$$

d'où l'on aura la longitude de l'abside $\varphi - v$.

38. **Scholie 1.** Il est évident que ces formules n'auraient pas lieu, si l'excentricité moyenne g était trop petite, voire même évanouissante, puisque alors tous les coefficients deviendraient infinis. Car, en effet, si l'on supposait dans nos formules $q = g$ et qu'on négligeait, par conséquent, les inégalités de q, cela reviendrait au même que de supposer g incomparablement plus grand que les coefficients des inégalités de q. Ainsi, à moins que g ne soit beaucoup plus grand que

$$\frac{\kappa}{2\mu} \quad \text{et} \quad \frac{9\kappa}{4(\mu - 2\nu)} \quad \text{etc.},$$

on se tromperait fort si l'on voulait faire usage de ces formules. Ensuite, puisqu'il a été supposé aussi que l'excentricité ne soit pas trop grande, on voit que pour que les formules trouvées puissent avoir lieu, il faut que l'excentricité moyenne g ne soit ni trop grande, ni trop petite. Donc puisque

$$\frac{\kappa}{\mu} = \frac{Fb^3}{(C+E)c^3},$$

il faut que cette fraction soit extrêmement petite, et que l'excentricité moyenne g tienne, pour ainsi dire, le milieu entre cette petite fraction et l'unité. Cela se comprend aussi fort aisément, car lorsque l'excentricité est fort petite, les autres inégalités du mouvement changeront très considérablement les points de l'orbite où la direction du mouvement est perpendiculaire au rayon vecteur, ou $dx = 0$, en sorte qu'à proprement parler, les absides ne seront plus marquées. Dans ces cas, il faudra donc recourir à une autre méthode, où l'on ne considère plus ces points mêmes, mais plutôt des points rapprochés où l'on placerait le lieu des vraies absides. Dans cette méthode l'anomalie v ne serait donc plus comptée depuis la vraie abside, mais de ce point imaginaire, de sorte que dx ne s'évanouirait plus lorsque $\sin v = 0$. Cependant il faut aussi remarquer, que lorsque l'excentricité est fort petite, une faute assez considérable dans le lieu des absides n'exerce presque aucune influence sur la longitude du satellite.

39. **Corollaire 1.** L'expression que nous venons de trouver pour la longitude des absides $\varphi - v$ renferme d'abord le terme $\kappa O\omega$ qui marque la longitude moyenne; d'où l'on voit que cette longitude est variable, et que la ligne des absides a un mouvement progressif $= \kappa O\omega$, pendant le temps exprimé par ω.

40. **Corollaire 2.** Dans la valeur trouvée[16]

$$O = \frac{6gg - 2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8gg(1+\alpha) - 4\alpha\alpha - 4\beta\beta - 4\gamma\gamma}\,,$$

puisque les quantités

$$\alpha = \frac{\kappa}{2\mu}\,,\quad \beta = \frac{9\kappa}{4(\mu - 2\nu)}\quad \text{et}\quad \gamma = \frac{3\kappa}{4(3\mu - 2\nu)}$$

sont fort petites par rapport à g, leurs carrés pourront bien être rejetés par rapport à gg; mais ces quantités mêmes pourront être de la même grandeur que gg, et partant changer très sensiblement le numérateur.

41. **Corollaire 3.** Si la quantité

$$-2\alpha + 9\beta - 3\gamma = \frac{\kappa(111\mu\mu - 56\mu\nu - 8\nu\nu)}{2\mu(\mu - 2\nu)(3\mu - 2\nu)}$$

était incomparablement plus petite que gg, ou $6gg$, alors on aurait $O = \frac{3}{4}$, et le mouvement moyen des absides serait $= \frac{3}{4}\kappa\omega$, mouvement que l'on trouve par les méthodes ordinaires, lorsqu'on ne fait pas attention à ce que les inégalités y peuvent changer.

42. **Corollaire 4.** Pour les inégalités qui se trouvent dans le mouvement des absides, elles peuvent devenir assez considérables, vu que les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. sont divisés par l'excentricité g, et elles le seront d'autant plus, que l'excentricité sera plus petite.

43. **Scholie 2.** Ayant ainsi trouvé les valeurs assez approchantes des quantités p, q et v, il sera aisé de les déterminer plus exactement et de découvrir les inégalités dérivées. Car, soit pour abréger, $p = b(1+\pi)$, où π marque les inégalités principales de p, et $q = g + \xi$, et l'on aura

$$d\varphi = d\omega\,(1 - (g+\xi)\cos v)^2\ \sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ab^3(1+\pi)^3}}$$

16 Édition originale: $8gg$ au lieu de $8gg(1+\alpha)$.

donc à cause de $\sqrt{\dfrac{(C+E)a^3}{Ab^3}} = \mu$ et $\sqrt{\dfrac{1}{(1+\pi)^3}} = 1 - \frac{3}{2}\pi$, on aura

$$d\varphi = \mu\, d\omega \left(1 - \frac{3}{2}\pi\right) \left(1 + \tfrac{1}{2}(g+\xi)^2 - 2(g+\xi)\cos v + \tfrac{1}{2}(g+\xi)^2 \cos 2v\right)$$

ou bien

$$d\varphi = \mu\, d\omega \Big(1 + \tfrac{1}{2}gg - 2g\cos v + \tfrac{1}{2}gg\cos 2v + g\xi - 2\xi\cos v + g\xi\cos 2v \\ - \tfrac{3}{2}\pi + 3g\pi\cos v\Big)$$

en négligeant les termes trop petits. De là on aura

$$dv = d\varphi - \frac{\kappa\, d\omega}{q}\left(\frac{1}{4}g + \frac{1}{2}\cos v + \frac{9}{4}\cos(2\eta - v) - \frac{3}{4}\cos(2\eta + v) + \text{ etc.}\right).$$

Or, pour les éléments de nos angles, dont nous servirons dans les intégrations, nous pourrons considérer le mouvement du soleil comme régulier, admettant $du = d\theta = \nu(1 + \frac{1}{2}hh) - 2\nu h\cos u$, et dans les petits termes il suffira de poser $q = g$. Soit donc

$$\mu(1 + \tfrac{1}{2}gg) - \frac{1}{4}\kappa = \alpha\,, \quad \mu g + \frac{\kappa}{4g} = \beta\,, \quad \nu(1 + \tfrac{1}{2}hh) = \gamma\,,$$
$$\mu(1 + \tfrac{1}{2}gg) - \nu(1 + \tfrac{1}{2}hh) = \delta\,,$$

et nous aurons[17]

$$\frac{dv}{d\omega} = \alpha - 2\beta\cos v + \frac{1}{2}\,g^2\mu\cos 2v - \frac{9\kappa}{4g}\cos(2\eta - v) + \frac{3\kappa}{4g}\cos(2\eta + v)$$
$$\frac{du}{d\omega} = \gamma - 2\nu h\cos u$$
$$\frac{d\eta}{d\omega} = \delta - 2\mu g\cos v + 2\nu h\cos u$$

et ces éléments peuvent être suffisants pour trouver les inégalités des quantités p, q et de $\varphi - v$, puisqu'elles sont peu considérables en elles-mêmes. Ensuite nous aurons

$$\frac{mp\sqrt{a^3p}}{r^3} = \kappa\sqrt{(1+\pi)^3} = \kappa\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)$$

à cause de r constant $= c$.

Or les variations trouvées pour p et q étant assez exactes puisqu'elles sont extrêmement petites, nous n'aurons besoin que de déterminer plus exactement les inégalités des absides, ou l'angle $\varphi - v$. Car supposant pour $\varphi - v$ la même valeur que dans la solution, avec ces termes

$$\kappa\,\mathfrak{P}\sin(4\eta - 2v) + \kappa\,\mathfrak{Q}\sin 4\eta + \kappa\,\mathfrak{R}\sin(4\eta + 2v)$$

17 Édition originale: $\frac{dv}{d\omega} = \alpha - 2\beta\cos v - \frac{9\kappa}{4g}\cos(2\eta - v) + \frac{3\kappa}{4g}\cos(2\eta + v)$.

nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi - dv}{\kappa\, d\omega} = O - \beta\,\mathfrak{A} + \frac{9\kappa\,\mathfrak{B}}{8g} + \frac{3\kappa\,\mathfrak{C}}{8g}
&+ \alpha\,\mathfrak{A}\cos v + (2\delta - \alpha)\,\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) + (2\delta + \alpha)\,\mathfrak{C}\cos(2\eta + v)\\
&+ \left(-\beta\,\mathfrak{A} - \frac{3\kappa\,\mathfrak{B}}{8g} - \frac{9\kappa\,\mathfrak{C}}{8g} + 2\alpha\,\mathfrak{E}\,g \right)\cos 2v\\
&+ \left(-\frac{3\kappa\,\mathfrak{A}}{4g} - (2\mu g - \beta)\,\mathfrak{B} - (2\mu g + \beta)\,\mathfrak{C} + 2\delta\,\mathfrak{D}\,g \right)\cos 2\eta\\
&+ \left(-\frac{9\kappa\,\mathfrak{A}}{8g} - (2\mu g - \beta)\,\mathfrak{B} + 2(\delta - \alpha)\,\mathfrak{F}\,g \right)\cos(2\eta - 2v)\\
&+ \left(+\frac{3\kappa\,\mathfrak{A}}{8g} - (2\mu g + \beta)\,\mathfrak{C} + 2(\delta + \alpha)\,\mathfrak{G}\,g \right)\cos(2\eta + 2v)\\
&+ (\alpha - \gamma)\,\mathfrak{H}\,h\cos(v - u) + (\alpha + \gamma)\,\mathfrak{I}\,h\cos(v + u)\\
&+ \Big(2\nu h\,\mathfrak{B} + (2\delta - \alpha - \gamma)\,\mathfrak{L}\,h\Big)\cos(2\eta - v - u)\\
&+ \Big(2\nu h\,\mathfrak{B} + (2\delta - \alpha + \gamma)\,\mathfrak{M}\,h\Big)\cos(2\eta - v + u)\\
&+ \Big(2\nu h\,\mathfrak{C} + (2\delta + \alpha - \gamma)\,\mathfrak{N}\,h\Big)\cos(2\eta + v - u)\\
&+ \Big(2\nu h\,\mathfrak{C} + (2\delta + \alpha + \gamma)\,\mathfrak{O}\,h\Big)\cos(2\eta + v + u)\\
&+ \left(\frac{9\kappa\,\mathfrak{B}}{8g} + (4\delta - 2\alpha)\,\mathfrak{P} \right)\cos(4\eta - 2v)\\
&+ \left(-\frac{3\kappa\,\mathfrak{B}}{8g} - \frac{9\kappa\,\mathfrak{C}}{8g} + 4\delta\,\mathfrak{Q} \right)\cos 4\eta\\
&+ \left(\frac{3\kappa\,\mathfrak{C}}{8g} + (4\delta + 2\alpha)\,\mathfrak{R} \right)\cos(4\eta + 2v)\,.
\end{aligned}
$$

Cette valeur étant multipliée par

$$
\begin{aligned}
q = g + A\cos v - B\cos(2\eta - v) - C\cos(2\eta + v) - Dg\cos 2\eta\\
+ Eg\cos 2v + Fg\cos(2\eta - 2v) - Gg\cos(2\eta + 2v)
\end{aligned}
$$

où les quantités A, B, C, D etc. sont connues par la valeur de q, nous aurons[18]

$$
\begin{aligned}
\frac{q(d\varphi - dv)}{\kappa\, d\omega} = Og \\
& - \beta\,\mathfrak{A}\,g + \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{B} + \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + \tfrac{1}{2}\alpha A\,\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\,\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\,\mathfrak{C} \\
& + \Big(\alpha\,\mathfrak{A}\,g + OA\Big)\cos v \\
& + \Big((2\delta-\alpha)\,\mathfrak{B}\,g - OB\Big)\cos(2\eta - v) \\
& + \Big((2\delta+\alpha)\,\mathfrak{C}\,g - OC\Big)\cos(2\eta + v) \\
& + \Big(-(2\mu g - \beta)\,\mathfrak{B}\,g - (2\mu g + \beta)\,\mathfrak{C}\,g + 2\delta\,\mathfrak{D}\,gg - \tfrac{3}{4}\kappa\,\mathfrak{A} \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\,\mathfrak{B} + \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\alpha B\,\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}\alpha C\,\mathfrak{A}\Big)\cos 2\eta \\
& + \Big(-\beta\,\mathfrak{A}\,g - \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 2\alpha\,\mathfrak{E}\,gg + \tfrac{1}{2}\alpha A\,\mathfrak{A} \\
& \qquad - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\,\mathfrak{B}\Big)\cos 2v \\
& + \Big(-\tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{A} - (2\mu g - \beta)\,\mathfrak{B}\,g + 2(\delta-\alpha)\,\mathfrak{F}\,gg \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\,\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\alpha B\,\mathfrak{A}\Big)\cos(2\eta - 2v) \\
& + \Big(\tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{A} - (2\mu g + \beta)\,\mathfrak{C}\,g + 2(\delta+\alpha)\,\mathfrak{G}\,g \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\alpha C\,\mathfrak{A}\Big)\cos(2\eta + 2v) \\
& + (\alpha-\gamma)\,\mathfrak{H}\,gh\cos(v-u) + (\alpha+\gamma)\,\mathfrak{J}\,gh\cos(v+u) \\
& + \Big(2\nu\,\mathfrak{B}\,gh + (2\delta-\alpha-\gamma)\,\mathfrak{L}\,gh\Big)\cos(2\eta - v - u) \\
& + \Big(2\nu\,\mathfrak{B}\,gh + (2\delta-\alpha+\gamma)\,\mathfrak{M}\,gh\Big)\cos(2\eta - v + u) \\
& + \Big(2\nu\,\mathfrak{C}\,gh + (2\delta+\alpha-\gamma)\,\mathfrak{N}\,gh\Big)\cos(2\eta + v - u) \\
& + \Big(2\nu\,\mathfrak{C}\,gh + (2\delta+\alpha+\gamma)\,\mathfrak{O}\,gh\Big)\cos(2\eta + v + u) \\
& + \Big(\tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{B} + 2(2\delta-\alpha)\,\mathfrak{P}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\,\mathfrak{B}\Big)\cos(4\eta - 2v) \\
& + \Big(-\tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 4\delta\,\mathfrak{Q}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\,\mathfrak{B}\Big)\cos 4\eta \\
& + \Big(\tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 2(2\delta+\alpha)\,\mathfrak{R}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\,\mathfrak{C}\Big)\cos(4\eta + 2v)\,.
\end{aligned}
$$

18 Édition originale: $-2\nu\,\mathfrak{C}\,gh\cos(2\eta+v+u)$ au lieu de $+2\nu\,\mathfrak{C}\,gh\cos(2\eta+v+u)$. Cf. [Verdun 2015], p. 926.

De là nous tirerons

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}g = Og - \beta\,\mathfrak{A}\,g + \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{B} + \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + \tfrac{1}{2}\alpha A\,\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\,\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\,\mathfrak{C}\\
+ \tfrac{1}{2}D\left(\tfrac{3}{4}\kappa\,\mathfrak{A} + (2\mu g-\beta)\,\mathfrak{B}\,g + (2\mu g+\beta)\,\mathfrak{C}\,g - 2\delta\,\mathfrak{D}\,gg\right)\\
+ \tfrac{1}{2}E\left(2\alpha\,\mathfrak{E}\,gg - \beta\,\mathfrak{A}\,g - \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{C}\right)\\
+ \tfrac{1}{2}F\left(2(\delta-\alpha)\,\mathfrak{F}\,gg - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{A} - (2\mu g-\beta)\,\mathfrak{B}\,g\right)\\
- \tfrac{1}{2}G\left(2(\delta+\alpha)\,\mathfrak{G}\,gg + \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{A} - (2\mu g+\beta)\,\mathfrak{C}\,g\right) \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

et par suite[19]

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &= \alpha\,\mathfrak{A}\,g + OA\\
\tfrac{9}{4} &= (2\delta-\alpha)\,\mathfrak{B}\,g - OB\\
-\tfrac{3}{4} &= (2\delta+\alpha)\,\mathfrak{C}\,g - OC\\
\tfrac{1}{4}g &= -\beta\,\mathfrak{A}\,g - \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 2\alpha\,\mathfrak{E}\,gg + \tfrac{1}{2}\alpha A\,\mathfrak{A}\\
&\quad - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\,\mathfrak{B}\\
\tfrac{3}{4}g &= 2\delta\,\mathfrak{D}\,gg - (2\mu g-\beta)\,\mathfrak{B}\,g - \tfrac{3}{4}\alpha\,\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\,\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\alpha B\,\mathfrak{A}\\
&\quad - (2\mu g+\beta)\,\mathfrak{C}\,g + \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\alpha C\,\mathfrak{A}\\
\tfrac{3}{2}g &= 2(\delta-\alpha)\,\mathfrak{F}\,gg - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{A} - (2\mu g-\beta)\,\mathfrak{B}\,g + \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\,\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\alpha B\,\mathfrak{A}\\
-\tfrac{3}{4}g &= 2(\delta+\alpha)\,\mathfrak{G}\,gg + \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{A} - (2\mu g+\beta)\,\mathfrak{C}\,g + \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\alpha C\,\mathfrak{A}\\
-\tfrac{3}{4}h &= (\alpha-\gamma)\,\mathfrak{H}\,gh\\
-\tfrac{3}{4}h &= (\alpha+\gamma)\,\mathfrak{J}\,gh\\
-\tfrac{27}{8}h &= (2\delta-\alpha-\gamma)\,\mathfrak{L}\,gh + 2\nu\,\mathfrak{B}\,gh\\
-\tfrac{27}{8}h &= (2\delta-\alpha+\gamma)\,\mathfrak{M}\,gh + 2\nu\,\mathfrak{B}\,gh\\
+\tfrac{9}{8}h &= (2\delta+\alpha-\gamma)\,\mathfrak{N}\,gh + 2\nu\,\mathfrak{C}\,gh\\
+\tfrac{9}{8}h &= (2\delta+\alpha+\gamma)\,\mathfrak{O}\,gh + 2\nu\,\mathfrak{C}\,gh\\
0 &= \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{B} + 2(2\delta-\alpha)\,\mathfrak{P}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\,\mathfrak{B}\\
0 &= -\tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 4\delta\,\mathfrak{Q}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\,\mathfrak{B}\\
0 &= \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 2(2\delta+\alpha)\,\mathfrak{R}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\,\mathfrak{C}\,.
\end{aligned}$$

19 Édition originale:

$$\begin{aligned}0 &= \tfrac{9}{8}\kappa\,\mathfrak{B} + 2(2\delta-\alpha)\,\mathfrak{P}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\,\mathfrak{B}\\
0 &= \tfrac{3}{8}\kappa\,\mathfrak{C} + 2(2\delta-\alpha)\,\mathfrak{R}\,g - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\,\mathfrak{C}\,.\end{aligned}$$

Et si nous substituons dans la première égalité les valeurs des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. que les équations suivantes (?)[20] fournissent, et que nous écrivions[21]

$$B \quad \text{pour} \quad \frac{9\kappa}{16(2\delta-\alpha)}\,, \quad \text{et} \quad C \quad \text{pour} \quad \frac{3\kappa}{16(2\delta+\alpha)}\,,$$

plusieurs termes se détruiront et nous trouverons en négligeant les termes D, E, F etc.[22]

$$O = \frac{\frac{1}{4}g + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{A}{4g}}{g + \frac{\beta A}{\alpha} - \frac{AA}{2g}} = \frac{\frac{1}{4}g + \frac{\mu g}{2\alpha} + \frac{\kappa}{8\alpha g} - \frac{A}{4g}}{g + \frac{\mu A g}{\alpha} + \frac{\kappa A}{4\alpha g} - \frac{AA}{2g}} = \frac{2\alpha gg + 4\mu gg + \kappa - 2\alpha A}{8\alpha gg + 8\mu A gg + 2\kappa A - 4\alpha AA}$$

et partant[23]

$$O = \frac{6\mu - \frac{1}{2}\kappa}{8\mu - 2\kappa}\,,$$

de sorte que l'augmentation du mouvement des absides, qui a été trouvée auparavant, s'évanouit maintenant.

20 Les «équations suivantes» manquent dans l'édition originale.
21 Édition originale: $4(2\delta-\alpha)$ au lieu de $16(2\delta-\alpha)$; $4(2\delta+\alpha)$ au lieu de $16(2\delta+\alpha)$.
22 Édition originale:

$$O = \frac{\frac{1}{4}g + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{A}{4g}}{g + \frac{\beta A}{\alpha} - \frac{AA}{4g}} = \frac{\frac{1}{4}g + \frac{\mu g}{2\alpha}}{g + \frac{\mu A g}{\alpha} + \frac{\kappa A}{8\alpha g}} = \frac{2\alpha gg + 4\mu gg}{8\alpha gg + 8\mu A gg + \kappa A}\,.$$

23 Édition originale: $8\mu + 2\kappa$ au lieu de $8\mu - 2\kappa$.

ABKÜRZUNGEN

Ac. Sc. Berlin	Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin
Ac. Sc. Munich	Bayerische Akademie der Wissenschaften
Ac. Sc. Paris	Académie royale des sciences de Paris
Ac. Sc. SPb	Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg
Ac. Hist. Sc.	Académie Internationale d'Histoire des Sciences
Ac. Sc. Stockholm	Königlich Schwedische Akademie der Wissenschaften
Ac. Sc. Turin	Académie des sciences de Turin
Acta Petrop.	Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
Am. Ac. Arts Sc.	American Academy of Arts and Sciences
Comm. Petrop.	Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
FRS	Fellow of the Royal Society
Mém. Berlin	Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin. Avec les Mémoires pour la même Année, tirez des Registres de cette Académie [wechselnder Titel]
Mém. Paris	Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie
Misc. Berol.	Miscellanea Berolinensia
N. Acta Petrop.	Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
N. Comm. Petrop.	Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
Opera omnia	Leonhardi Euleri Opera omnia [angegeben werden die Serie und die Bandnummer]
Opera postuma	Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica [E 805]

Phil. Trans.	Philosophical Transactions [of the Royal Society of London]
PV	Procès-verbaux de l'Académie Royale des Sciences [de Paris]
Recueil des pièces	Recueil des Pièces qui ont remporté les Prix de l'Académie Royale des Sciences [de Paris]
A xyz	Nummer xyz des Verzeichnisses der Schriften J. A. Eulers in [Eneström 1910/13]
E xyz	Nummer xyz des Verzeichnisses der Schriften Eulers in [Eneström 1910/13]
Ms xyz	Nummer xyz des Verzeichnisses der Manuskripte Eulers in [Kopelevič et al. 1962]
R xyz	Regestennummer nach [Juškevič et al. 1975]

IN DIESEM BAND ZITIERTE SCHRIFTEN EULERS

Abhandlungen

[E 76] 1745: *Novae et correctae tabulae ad loca lunae computanda.* Berolini, 1745.[24] XVII, L

[E 78] 1738.07.03: Dissertation sur la meilleure construction du cabestan. *Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1741.* Paris, 1745, pp. 29–87 ; *Opera omnia* II 20, pp. 36–82. XVIII, LXIII, 404

[E 80] *Opuscula varii argumenti.* Berolini, 1746.

[E 86] 1745(?): De motu corporum in superficiebus mobilibus, in: [E 80], pp. 1–136 ; *Opera omnia* II 6, pp. 75–174. XVIII

[E 87] 1745: Tabulae astronomicae solis et lunae, in: [E 80], pp. 137–168 ; *Opera omnia* II 23, pp. 1–10. XVI, XVII, L, 392

[E 89] 1746: De relaxatione motus planetarum, in: [E 80], pp. 277–286 ; *Opera omnia* II 31, pp. 195–220. XVI, XIX, XXIX, XLII, XLIII

[E 96] 1738.03.27: De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso. *Comm. Petrop.* 10 (1738), 1747, 67–94 ; *Opera omnia* II 17, pp. 16–39. XVIII

[E 97] 1738.05.05: De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum. *Comm. Petrop.* 10 (1738), 1747, 102–115 ; *Opera omnia* II 6, pp. 175–188. XVIII, XIX, XXV, 403

[E 102] 1745: *Introductio in analysin infinitorum.* Tomus secundus. Lausannae, 1748 ; *Opera omnia* I 9. LXXIV

[E 105] vor 1748: Mémoire sur la plus grande équation des planètes. *Mém. Berlin* 2 (1746), 1748, 225–248 ; *Opera omnia* II 28, pp. 252–268. XVI, LIX, 170, 176, 404

[E 109] 1743: Dissertatio de magnete. *Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1743 et 1746.* Paris, 1748, pp. 1–47 ; *Opera omnia* III 10, pp. 139–179. XIX, XXVII

[E 110] 1738: *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus.* Pars prior. Petropoli, 1749 ; *Opera omnia* II 18. XVIII, LXII, LXIII, LXXIII

[E 112] 1747.06.08: Recherches sur le mouvement des corps célestes en général. *Mém. Berlin* 3 (1747), 1749, 93–143 ; *Opera omnia* II 25, pp. 1–44. XVI, XVII, XVIII, XIX, XXVI, XXVII, XLVI, L, LXI, LXII, LXXII, LXXVIII, LXXXIV

[E 113] 1747.06.08: Méthode pour trouver les vrais momens tant des nouvelles que des pleines lunes. *Mém. Berlin* 3 (1747), 1749, 154–173 ; *Opera omnia* II 30, pp. 26–44. XVII, LXXXIV

24 Dieses Werk wurde von Eneström irrtümlich als Sonderabdruck eines Teils von [E 87] angesehen und daher in den *Opera omnia* nicht publiziert, s. [Verdun 2011], pp. 277–281.

[E 114] 1748: Méthode de trouver le vrai lieu géocentrique de la lune par l'observation de l'occultation d'une étoile fixe. *Mém. Berlin* 3 (1747), 1749, 174–177 ; *Opera omnia* II 30, pp. 45–48. XVII, LXXXIV

[E 115] 1748: Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la lune. *Mém. Berlin* 3 (1747), 1749, 178–179 ; *Opera omnia* II 30, pp. 49–50. XVII

[E 117] 1748.09.12: Réflexions sur la dernière éclipse du Soleil du 25 juillet a. 1748. *Mém. Berlin* 3 (1747), 1749, 250–273 ; *Opera omnia* II 30, pp. 51–72. XVII, LXXXIV

[E 120] 1747.10.24: Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. *Pièce qui a remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1748.* Paris, 1749 ; *Opera omnia* II 25, pp. 45–157. XVII, XIX, XXVII, XXXV, XL, XLIV, LI, LIII, LXV, LXXVIII, LXXXI, LXXXII, LXXXIV, XC, 29, 40

[E 126] 1738.12.04: De novo genere oscillationum. *Comm. Petrop.* 11 (1739), 1750, 128–149 ; *Opera omnia* II 10, pp. 78–97. XLVI, LXVI

[E 128] 1739.12.17: Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales. *Comm. Petrop.* 11 (1739), 1750, 194–230 ; *Opera omnia* I 14, pp. 364–406. LXVI

[E 131] 1740.03.28: Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica. *Comm. Petrop.* 12 (1740), 1750, 109–221 ; *Opera omnia* II 29, pp. 1–91. XVI, LVIII, LXXXIII, 404

[E 132] 1741.01.26: Methodus viri celeberrimi Leonh. Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli telluris, secundum mensuram a celeb. de Maupertuis cum sociis institutam. *Comm. Petrop.* 12 (1740), 1750, 224–231 ; *Opera omnia* II 30, pp. 73–88. XIX, 335, 406

[E 138] 1748.09.02: De motu nodorum lunae ejusque inclinationis ad eclipticam variatione. *N. Comm. Petrop.* 1 (1747/48), 1750, 387–427 ; *Opera omnia* II 23, pp. 11–48. XVI, XVII, XVIII, XXVI, XXXIX, XL, XLVI, XLVII, XLVIII, L, LXIII, LXIV, LXXII, LXXVIII, LXXXIII, 405

[E 138a] 1744.10.05: Sur le mouvement des noeuds de la Lune et sur la variation de son inclinaison à l'écliptique. *Mém. Berlin* 1 (1745), 1746, 40–44. XVIII, XLVII, XLVIII, LXV

[E 139] 1748.09.02: Quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquiritur. *N. Comm. Petrop.* 1 (1747/48), 1750, 428–443 ; *Opera omnia* II 23, pp. 49–63. XVI, XXXIX, XL, XLVI, LXV, LXXXIII, 405

[E 141] 1748.10.24: Sur l'accord des deux dernières éclipses du soleil et de la lune avec mes tables pour trouver les vrais momens des pléni-lunes et novilunes. *Mém. Berlin* 4 (1748), 1750, 86–98 ; *Opera omnia* II 30, pp. 89–100. XVII, LXXXIV

[E 156] *L. Euleri Opusculorum tomus III.* Berolini, 1751. LXXVI, 394

[E 171] 1750.03.05: Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la terre. *Mém. Berlin* 5 (1749), 1751, 289–325 ; *Opera omnia* II 29, pp. 92–123. XVIII, XIX, XXX

[E 172] 1747.12.06: De la parallaxe de la lune par rapport à sa hauteur qu'à son azimuth, dans l'hypothèse de la terre sphéroidique. *Mém. Berlin* 5 (1749), 1751, 326–388 ; *Opera omnia* II 30, pp. 140–150. XVII

[E 174] 1744.11.05: De motu corporum flexibilium, in: [E 156], pp. 88–165 ; *Opera omnia* II 10, pp. 177–232. XVIII, XLVI, LXIII, LXXVI, LXXVIII

[E 174a] 1744.11.05: Sur le mouvement des corps flexibles. *Mém. Berlin* 1 (1745), 1746, 54–55. XVIII

[E 177] 1750.09.03: Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin* 6 (1750), 1752, 185–217 ; *Opera omnia* II 5, pp. 81–108. XVIII, LXXIV

[E 180] 1750: Avertissement au sujet des recherches sur la précession des équinoxes. *Mém. Berlin* 6 (1750), 1752, 412 ; *Opera omnia* II 29, p. 124. XVIII, XIX

[E 183] 1749.06.28: Part of a Letter from Leonard Euler, Prof. Math. at Berlin, and F.R.S. to the Rev. Mr. Caspar Wetstein, Chaplain to his Royal Highness the Prince of Wales, concerning the gradual Approach of the Earth to the Sun. *Phil. Trans.* 46 (1749/50), 1752, 203–205 ; *Opera omnia* II 31, pp. 257–258. XIX, XXIX

[E 184] 1749.12.20: Part of a Letter from Mr. Professor Euler to the Reverend Mr. Wetstein, Chaplain to his Royal Highness the Prince, concerning the Contraction of the Orbits of the Planets. *Phil. Trans.* 46 (1749/50), 1752, 356–359 ; *Opera omnia* II 31, pp. 259–260. XIX, XXIX, XXX

[E 187] 1752: *Theoria motus lunae exhibens omnes eius inaequalitates.* Petropoli, 1753 ; *Opera omnia* II 23, pp. 64–336. XVII, XIX, XXX, L, LI, LXXXI, 405

[E 193] 1749.12.04: De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda. *N. Comm. Petrop.* 3 (1750/51), 1753, 235–253 ; *Opera omnia* II 25, pp. 158–174. XVII, XIX, 404

[E 204] 1751.10.24 (1753): Extract of a Letter from Professor Euler, of Berlin, to the Rev. Mr. Caspar Wetstein, Chaplain to her Royal Highness the Princess Dowager of Wales. *Phil. Trans.* 47 (1751/2), 1753, 263–264 ; *Opera omnia* II 24, p. 1. XVII

[E 215] 1754.09.11: Élémens de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. *Mém. Berlin* 9 (1753), 1755, 258–293 ; *Opera omnia* I 27, pp. 309–339. XIX, LXXXIV

[E 218] 1754.05.11: Lettre du 11 Mai 1754 à Erich Pontoppidan, in: [Pontoppidan 1755] ; *Opera omnia* II 31, pp. 261–264. XXIX, XXX, XLIII, 407

[E 223] 1755.04.24: De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique. *Mém. Berlin* 10 (1754), 1756, 296–336 ; *Opera omnia* II 29, pp. 125–159. XVI, XIX, XLI, XLII, LXI

[E 224] 1754: Avertissement. *Mém. Berlin* 10 (1754), 1756, 346 ; *Opera omnia* I 27, p. 364. XIX

[E 225] 1753.10.11: Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides. *Mém. Berlin* 11 (1755), 1757, 217–273 ; *Opera omnia* II 12, pp. 2–53. XVIII

[E 232] 1750.11.12: De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato. *N. Comm. Petrop.* 4 (1752/53), 1758, 161–196 ; *Opera omnia* II 25, pp. 175–209. XVI, 404

[E 289] 1758: *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.* Rostochii et Gryphiswaldiae, 1765 ; *Opera omnia* II 3, 4. XVIII, XIX, 149, 403

[E 291] 1758.07.06: Recherches sur la connoissance mécanique des corps. *Mém. Berlin* 14 (1758), 1765, 131–153 ; *Opera omnia* II 8, pp. 178–199. XVIII, LXXIV

[E 292] 1758.11.09: Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mém. Berlin* 14 (1758), 1765, 154–193 ; *Opera omnia* II 8, pp. 200–235. XVIII

[E 293] 1758.01.12: Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes. *Mém. Berlin* 14 (1758), 1765, 194–218 ; *Opera omnia* II 29, pp. 199–219. XIX

[E 301] 1759.04.05: De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti. *N. Comm. Petrop.* 10 (1764), 1766, 207–242 ; *Opera omnia* II 6, pp. 209–246. XVI

[E 304] 1762.04.22: Considerationes de motu corporum coelestium. *N. Comm. Petrop.* 10 (1764), 1766, 544–558 ; *Opera omnia* II 25, pp. 246–257. XVI, XVII

[E 308] 1759.01.18: Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes. *Mém. Berlin* 15 (1759), 1766, 265–309 ; *Opera omnia* II 29, pp. 220–256. XVIII, XIX

[E 327] 1763.12.21: De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *N. Comm. Petrop.* 11 (1765), 1767, 144–151 ; *Opera omnia* II 25, pp. 281–289. XVI

[E 328] 1763.07.15: De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti. *N. Comm. Petrop.* 11 (1765), 1767, 152–184 ; *Opera omnia* II 6, pp. 247–273. XVI

[E 336] 1751.10.07: Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. *Mém. Berlin* 16 (1760), 1767, 176–227 ; *Opera omnia* II 8, pp. 313–356. XVIII, XIX, LXXIV

[E 337] 1762.10.28: Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique. *Mém. Berlin* 16 (1760), 1767, 228–249 ; *Opera omnia* II 6, pp. 274–293. XVI, 403

[E 342] 1759/1760: *Institutionum calculi integralis volumen primum.* Petropoli, 1768 ; *Opera omnia* I 11. LXVIII, 161

[E 343] 1767.05.21: *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie.* Tome premier. Saint Pétersbourg, 1768 ; *Opera omnia* III 11. XIX, XXXI, XLIII

[E 348] 1765.12.19: Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi. *N. Comm. Petrop.* 12 (1766/67), 1768, 129–165 ; *Opera omnia* II 25, pp. 305–331. XVI

[E 371] 1763.12.21: Considerationes de theoria motus lunae perficienda et imprimis de ejus variatione. *N. Comm. Petrop.* 13 (1768), 1769, 120–158 ; *Opera omnia* II 24, pp. 35–73. XVII

[E 372] 1763.12.21: Annotatio quarundam cautelarum in investigatione inaequalitatum quibus corpora coelestia in motu perturbantur observandarum. *N. Comm. Petrop.* 13 (1768), 1769, 159–201 ; *Opera omnia* II 26, pp. 1–34. XVI

[E 373] 1763.03.24: Investigatio accuratior phaenomenorum quae in motu Terrae diurno a viribus coelestibus produci possunt. *N. Comm. Petrop.* 13 (1768), 1769, 202–241 ; *Opera omnia* II 26, pp. 35–63. XVIII, XIX

[E 374] 1763.12.01: De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis iunctorum. *N. Comm. Petrop.* 13 (1768), 1769, 259–304 ; *Opera omnia* II 11, pp. 3–36. XVIII

[E 375] 1766.01.09: Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum. *N. Comm. Petrop.* 13 (1768), 1769, 305–416 ; *Opera omnia* II 13, pp. 1–72. XVIII

[E 384] 1752: Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne. *Recueil des pièces* 7. Paris, 1769, pp. 1–84 ; *Opera omnia* II 26, pp. 65–121. XVII, XIX, LI, LIII, LIX, LX, LXVII, LXXXI, 29, 404

[E 389] 1770.09.10: Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la comète de l'an 1769 et son tems périodique. St. Pétersbourg, 1770 ; *Opera omnia* II 28, pp. 269–313. XVI

[E 397] vor 1770.08.20: Expositio methodorum, cum pro determinanda parallaxi solis ex observatio transitu Veneris per solem, tum pro inveniendis longitudinibus locorum super terra, ex observationibus eclipsium solis, una cum calculis et conclusionibus inde deductis. *N. Comm. Petrop.* 14:II (1769), 1770, 322–554 ; *Opera omnia* II 30, pp. 153–231. XVI, XXXV, LXXXV

[E 398] 1762.07.08: Nouvelle méthode de déterminer les dérangemens dans le mouvement des corps célestes, causés par leur action mutuelle. *Mém. Berlin* 19 (1763), 1770, 141–179 ; *Opera omnia* II 26, pp. 123–152. XVI, XXXIII, LXVIII, XCIII, 66

[E 399] 1763.12.18: Réflexions sur les diverses manières dont on peut représenter le mouvement de la lune. *Mém. Berlin* 19 (1763), 1770, 180–193 ; *Opera omnia* II 24, pp. 74–87. XVII

[E 400] 1765.12.04: Considérations sur le problème des trois corps. *Mém. Berlin* 19 (1763), 1770, 194–220 ; *Opera omnia* II 26, pp. 153–173. XVI, 404

[E 401] 1766.02.06: Nouvelle manière de comparer les observations de la lune avec la théorie. *Mém. Berlin* 19 (1763), 1770, 221–234 ; *Opera omnia* II 24, pp. 89–100. XVII

[E 402] 1759.09.20: Du mouvement des absides des satellites de Jupiter. *Mém. Berlin* 19 (1763), 1770, 311–338 ; *Opera omnia* II 26, pp. 175–198. XIX, 404

[E 407] 1770.03.05: Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. *N. Comm. Petrop.* 15 (1770), 1771, 75–106 ; *Opera omnia* I 6, pp. 287–315. LXXV

[E 414] 1756: Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur. *Recueil des pièces* 8, Troisième pièce, 138 p. Paris, 1771 ; *Opera omnia* II 26, pp. 200–300. XVI, XL, XLII, XLIV, LXI, LXVIII, LXXXIX, C, 404

[E 415] 1759: Sur le roulis et le tangage. *Recueil des pièces* 8, Cinquième pièce, 47 p. Paris, 1771 ; *Opera omnia* II 21, pp. 1–30. XVIII

[E 416] 1760: Meditationes in quaestionem utrum motus medius planetarum semper maneat aeque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur ? et quaenam sit eius causa ? *Recueil des pièces* 8, Sixième pièce, 44 p. Paris, 1771 ; *Opera omnia* II 27, pp. 1–28. XVI

[E 418] 1768.10.20: *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis.* Petropoli, 1772 ; *Opera omnia* II 22. XVII, LXVI, LXVII, LXXIII, LXXXI, 47, 397

[E 418A] 1772.07 *Novae tabulae lunares singulari methodo constructae, quarum ope loca lunae ad quodvis tempus expedite computare licet.* Petropoli, 1772.[25] XVII, L, 47

[E 425] 1772.05.14: De perturbatione motus terrae ab actione Veneris oriunda, *N. Comm. Petrop.* 16 (1771), 1772, 426–467; *Opera omnia* II 26, pp. 301–328. XVI, LXXXIX, XC, 31, 35

[E 426] 1773.04.19: *Théorie complette de la construction et de la manœuvre des vaisseaux, mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la navigation.* St. Pétersbourg, 1773 ; *Opera omnia* II 21, pp. 82–213. XVIII

[E 434] 1772: De collisione corporum gyrantium. *N. Comm. Petrop.* 17 (1772), 1773, 272–314 ; *Opera omnia* II 8, pp. 369–402. XVIII

25 Dieses Werk wurde von Eneström als Auszug aus [E 418] angesehen und daher in den *Opera omnia* nicht publiziert, s. [Verdun 2011], pp. 287–288; [Verdun 2015], pp. 429–430.

[E 458] 1772.01.13: Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi. *N. Comm. Petrop.* 18 (1773), 1774, 354–376; *Opera omnia* II 29, pp. 273–292. XVI

[E 469] 1774.10.10: De motu oscillatorio binarum lancium ex libra suspensarum. *N. Comm. Petrop.* 19 (1774), 1775, 302–324; *Opera omnia* II 9, pp. 51–70. XVIII

[E 471] 1774.11.10: De motu turbinatorio chordarum musicarum ubi simul universa theoria tam aequilibrii quam motus corporum flexibilium simulque etiam elasticorum breviter explicatur. *N. Comm. Petrop.* 19 (1774), 1775, 340–370; *Opera omnia* II 11/1, pp. 158–179. XVIII

[E 472] 1775.01.16: Commentatio hypothetica de periculo, a nimia cometae appropinquatione metuendo. *N. Comm. Petrop.* 19 (1774), 1775, 499–548; *Opera omnia* II 29, pp. 293–335. XVI

[E 478] 1775.10.09: Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. *N. Comm. Petrop.* 20 (1775), 1776, 189–207; *Opera omnia* II 9, pp. 84–98. XVIII, LXXV

[E 479] 1775.10.16: Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. *N. Comm. Petrop.* 20 (1775), 1776, 208–238; *Opera omnia* II 9, pp. 99–125. XVIII, LXXV

[E 481] 1774.10.31: De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et utriusque egregio consensu. *N. Comm. Petrop.* 20 (1775), 1776, 286–303; *Opera omnia* II 11/1, pp. 180–193. XVIII

[E 482] 1775.05.15: De pressione funium tensorum in corpora subiecta eorumque motu a frictione impedito. *N. Comm. Petrop.* 20 (1775), 1776, 304–326, 327–342; *Opera omnia* II 11/1, pp. 194–210, 211–222. XVIII

[E 484] 1775.04.27: De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur. *N. Comm. Petrop.* 20 (1775), 1776, 509–540; *Opera omnia* II 30, pp. 237–261. LXI

[E 485] 1769: Réponse à la question proposée par l'académie royale des sciences de Paris, pour l'année 1770 – Théorie de la Lune. *Recueil des pièces* 9, Septième pièce, 94 p. Paris, 1777; *Opera omnia* II 24, pp. 101–166. XVII, XXX, 405

[E 486] 1771: Réponse à la question proposée par l'académie royale des sciences de Paris, pour l'année 1772 – Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune. *Recueil des pièces* 9, Neuvième pièce, 38 p. Paris, 1777; *Opera omnia* II 24, pp. 167–190. XVII, XXX

[E 504] 1775.03.06: De theoria lunae ad majorem perfectionis gradum evehenda. *Acta Petrop.* (1777:II), 1780, 281–327; *Opera omnia* II 24, pp. 191–234. XVII

[E 511] 1777.04.28: Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la terre, causées par l'action de Venus. *Acta Petrop.* (1778:I), 1780, 297–307 ; *Opera omnia* II 27, pp. 29–36. XVI, LXVIII, LXXXIX

[E 512] 1780.05.11: Investigatio perturbationum, quae in motu terrae ab actione Veneris producuntur. *Acta Petrop.* (1778:I), 1780, 308–316 ; *Opera omnia* II 27, pp. 37–46. XVI, LXVIII

[E 519] 1775.02.16: Nova methodus motum planetarum determinandi. *Acta Petrop.* (1778:II), 1781, 277–302 ; *Opera omnia* II 29, pp. 336–359. XVI

[E 525] 1774.10.13: De motu oscillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili suspensorum. *Acta Petrop.* (1779:I), 1782, 89–102 ; *Opera omnia* II 9, pp. 126–137. XVIII

[E 529] 1780.03.13: Theoria parallaxeos, ad figuram terrae sphaeroidicam accommodata. *Acta Petrop.* (1779:I),1782, 241–278 ; *Opera omnia* II 30, pp. 306–333. XVII

[E 538] 1775.05.08: Cautiones necessariae in determinatione motus planetarum observandae. *Acta Petrop.* (1779:II), 1783, 295–334 ; *Opera omnia* II 29, pp. 360–391. XVI, XVII, LIII

[E 546] 1775.11.02: De statu aequilibrii maris a viribus solis et lunae sollicitati. *Acta Petrop.* (1780:I), 1783, 132–153 ; *Opera omnia* II 31, pp. 329–347. XVIII

[E 547] 1776.08.19: Determinatio facilis orbitae cometae cuius transitum per eclipticam bis observare licuit. *Acta Petrop.* (1780:I), 1783, 243–254 ; *Opera omnia* II 29, pp. 392–400. XVI

[E 548] 1777.01.16: De variis motuum generibus, qui in satellitibus planetarum locum habere possunt. *Acta Petrop.* (1780:I), 1783, 255–279 ; *Opera omnia* II 27, pp. 47–64. XVII, XCIV, 65, 67, 68

[E 549] 1777.01.23: De motibus maxime irregularibus, qui in systemate mundano locum habere possent. *Acta Petrop.* (1780:I), 1783, 280–302 ; *Opera omnia* II 27, pp. 65–80. XVI, XVII

[E 568] 1776.08.19: De motu penduli circa axem cylindricum, fulcro datae figurae incumbentum, mobilis, remota frictione. *Acta Petrop.* (1780:II), 1784, 133–163 ; *Opera omnia* II 9, pp. 163–187. XVIII

[E 569] 1776.08.19: De motu penduli circa axem cylindricum, fulcro datae figurae incumbentum, mobilis, habita frictionis ratione. *Acta Petrop.* (1780:II), 1784, 164–174 ; *Opera omnia* II 9, pp. 188–196. XVIII

[E 578] 1776.12.05: De perturbatione motus planetarum et cometarum. *Acta Petrop.* (1781:I), 1784, 297–340 ; *Opera omnia* II 27, pp. 81–116. XVI, LXI

[E 585] 1775.04.03: De effectu frictionis in motu volutorio. *Acta Petrop.* (1781:II), 1785, 131–175 ; *Opera omnia* II 9, pp. 197–238. XVIII

[E 603] 1775.03.27: De descensu baculi super hypomochlio cylindrico fixo delabentis. *Acta Petrop.* (1782:I), 1786, 117–156 ; *Opera omnia* II 9, pp. 239–270. XVIII

[E 608] 1775.05.22: Accuratior evolutio formularum pro filorum flexibilium aequilibrio et motu inventarum. *N. Acta Petrop.* 2 (1782), 1786, 148–169 ; *Opera omnia* II 11/1, pp. 335–354. XVIII

[E 612] 1775.04.20: De motu globi heterogenei super plano horizontali, una cum dilucidationibus necessariis super motu vacillatorio. *N. Acta Petrop.* 1 (1783), 1787, 119–139 ; *Opera omnia* II 9, pp. 307–327. XVIII

[E 619] 1775.11.02: Enodatio difficultatis super figura terrae a vi centrifuga oriunda. *N. Acta Petrop.* 2 (1784), 1788, 121–130 ; *Opera omnia* II 31, pp. 349–358. XIX

[E 626] 1776.12.12: De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta. *N. Acta Petrop.* 3 (1785), 1788, 126–141 ; *Opera omnia* II 27, pp. 117–130. XVI, XXXIII

[E 634] 1775.11.13: De motu oscillatorio tabulae suspensae et a vento agitatae. *N. Acta Petrop.* 4 (1786), 1789, 119–139 ; *Opera omnia* II 9, pp. 307–327. XVIII

[E 641] 1779.04.08: De motu quodam maxime memorabili, satis quidem simplici, at solutu difficillimo. *N. Acta Petrop.* 5 (1787), 1789, 149–175 ; *Opera omnia* II 9, pp. 352–378. XVIII

[E 649] 1780.08.14: De motu oscillatorio penduli circa axem cylindricum plano horizontali incumbentem. *N. Acta Petrop.* 6 (1788), 1790, 145–153 ; *Opera omnia* II 9, pp. 379–386. XVIII

[E 658] 1780.08.14: De momentis virium respectu axis cujuscunque inveniendis; ubi plura insignia symptomata circa binas rectas, non in eodem plano sitas, explicantur. *N. Acta Petrop.* 7 (1789), 1793, 191–204 ; *Opera omnia* II 9, pp. 387–398. XVIII

[E 659] 1780.08.14: Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi. *N. Acta Petrop.* 7 (1789), 1793, 205–214 ; *Opera omnia* II 9, pp. 399–406. XVIII

[E 704] 1777.05.26: Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cujusdam anguli progredientibus. *N. Acta Petrop.* 11 (1793), 1798, 114–132 ; *Opera omnia* I 16/1, pp. 333–355. LXXXII

[E 805] *Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica*. Tomus prior – Tomus alter, ed. P. H. Fuss et N. Fuss. Petropoli, 1862.

[E 825] 1753: De motu corporum circa punctum fixum mobilium. *Opera postuma* 2, pp. 43–62 ; *Opera omnia* II 9, pp. 413–441. XVIII, LXXV

[E 827] 1742: De motu corporum in tubo rectilineo mobili circa axem fixum per ipsum tubum transeuntem. *Opera postuma* 2, pp. 74–84 ; *Opera omnia* II 7, pp. 248–265. XVIII

[E 828] 1743: Dissertation sur le mouvement des corps enfermés dans un tube droit, mobile autour d'un axe fixe. *Opera postuma* 2, pp. 85–113 ; *Opera omnia* II 7, pp. 266–307. XVIII

[E 829] 1743: De motu corporum in tubis circa punctum fixum mobilius. *Opera postuma* 2, pp. 114–124 ; *Opera omnia* II 7, pp. 308–326. XVIII

[E 834] 1758/59: Astronomia mechanica, *Opera postuma* 2, pp. 177–316 ; *Opera omnia* II 27, pp. 131–324. XVI, XVIII, 404

[E 835] 1745/49: Solutio duorum problematum, astronomiam mechanicam spectantium. *Opera postuma* 2, pp. 317–332 ; *Opera omnia* II 27, pp. 325–346. XVIII, XIX, 404

[E 836] 1744: Nouvelles tables astronomiques pour calculer la place du soleil. *Opera postuma* 2, pp. 335–353 ; *Opera omnia* II 24, pp. 241–270. XVI, XXXIX, LXXXIII

[E 836a] 1744.04.09: Sur de nouvelles tables astronomiques pour calculer la place du Soleil. *Mém. Berlin* 1 (1745), 1746, 36–40 ; *Opera omnia* II 24, pp. 235–239. XVI, XXXVIII, XXXIX, XL, LXXXIII

[E 837] 1746: De emendatione tabularum lunarium per observationes eclipsium lunae. *Opera postuma* 2, pp. 354–364 ; *Opera omnia* II 24, pp. 271–285. XVII, LXXXIV, 405

[E 838] 1747: Tria capita ex opere quodam majori inedito de theoria lunae. *Opera postuma* 2, pp. 365–390 ; *Opera omnia* II 24, pp. 287–326. XVII, LXXXIV, 405

[E 840] vor 1745: De motu cometarum in orbitis parabolicis, solem in foco habentibus. *Opera postuma* 2, pp. 402–415 ; *Opera omnia* II 29, pp. 401–420. XVI, 405

[E 841] 1750er: Recherche des inégalités causées au mouvement des planètes par des forces quelconques. *Opera postuma* 2, pp. 416–446 ; *Opera omnia* II 27, pp. 347–387. XVI, 404

[E 842] 1755/60: Anleitung zur Naturlehre. *Opera postuma* 2, pp. 449–560 ; *Opera omnia* III 1, pp. 16–178. XIX, XXVIII

Mit 'E' gefolgt von einer Jahreszahl werden anonym publizierte Arbeiten EULERs *bezeichnet, die nicht von* ENESTRÖM *erfasst wurden.*

[E 1740] 1740: Von der Beobachtung der Ebbe und Fluth des Meeres. *Anmerckungen bey den Zeitungen*, St. Petersburg, 1740, 33–40.[26] XVIII

[E 1743] 1742: De causa gravitatis. *Misc. Berol.* 7 (1743), 360–370 ; *Opera omnia* II 31, pp. 373–378. XIX, XXVII

26 Cf. [Kopelevič 1983], p. 379; [Verdun 2015], pp. 38–45.

[E 1749] 1748: [Voll- und Neumond-Tafeln], in: *Calendarium ad annum Christi MDCCXLIX. Pro meridiano Berolinensi.* Berlin, 1749, pp. [L1r]–[M4v].[27] XVII

[E 1750a] 1749: [Tafeln der stündlichen Mondbewegung], in: *Vollständiger Astronomischer Calender für das Jahr nach Christi Geburt MDCCL. Welches ein gemein Jahr ist. Auf den Berlinischen Mittagszirkel berechnet.* Berlin, 1750, pp. [G4v]–[H4r]; *Calendarium ad annum Christi MDCCL. Pro meridiano Berolinensi.* Berlin, 1750, pp. [G4v]–[H4r].[28] XVII

[E 1750b] 1749: [Mondtafeln], in: *Almanac Astronomique pour l'an de Grace MDCCL au meridien de Berlin.* Berlin, 1750, pp. [G8v]–[M2r].[29] XVII

[E 1751] 1750: Gedanken von der allmählichen Annäherung der Erde zu der Sonne. *Physikalische Belustigungen*, 1751, 4. Stück, pp. 313–315.[30] XIX

[A 6] 1760: *Ioh. Alberti Euleri academici Berolinensis Meditationes de motu vertiginis planetarum.* Petropoli, 1760; *Opera omnia* II 29, pp. 160–198. XVIII, XIX

[A 7] 1762: *Ioh. Alb. Euleri academici Berolinensis Meditationes de perturbatione motus Cometarum ab attractione Planetarum orta.* Petropoli, 1762; *Opera omnia* II 25, pp. 210–245. XVI

[A 8] 1761.06.18: *Recherches sur la résistance du milieu dans lequel les planètes se meuvent.* Berlin, 1762; *Opera omnia* II 31, p. 265. XIX, XXIX, LXXXVIII

[A 8^2] 1761.06.18: Mémoire dans lequel on examine si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leur mouvement. *Recueil des pièces* 8, Septième pièce, 50 p. Paris, 1771; *Opera omnia* II 31, pp. 267–305. XIX, XXIX, XLIII

[A 11] 1758.10.05: Recherches des mouvemens d'un globe sur un plan horizontal. *Mém. Berlin* 14 (1758), 1765, 284–353; *Opera omnia* II 8, pp. 236–293. XVIII

[A 14] 1759.07.19: Recherches sur le dérangement du mouvement d'une planète par l'action d'une autre planète ou d'une comète. *Mém. Berlin* 15 (1759), 1766, 338–364; *Opera omnia* II 25, pp. 258–280. XVI

[A 18] 1758/65: Recherches des forces dont les corps célestes sont sollicités en tant qu'ils ne sont pas sphériques. *Mém. Berlin* 21 (1765), 1767, 414–432; *Opera omnia* II 25, pp. 290–304. XVIII

27 Cf. [Verdun 2011], pp. 281–282; [Verdun 2015], pp. 418–420.
28 Cf. [Verdun 2011], p. 282; [Verdun 2015], pp. 420–422.
29 Cf. [Verdun 2011], pp. 283–284; [Verdun 2015], pp. 422–424.
30 Cf. [Verdun 2015], pp. 45–46.

[A 19] 1762.05.06: Beantwortung über die Preisfrage: In was für einer Verhältniss sowohl die mittlere Bewegung des Monds, als auch seine mittlere Entfernung von der Erde mit den Kräften stehen, welche auf den Mond wirken? *Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften* 4:II (1767), 231–270 ; *Opera omnia* II 24, pp. 3–33. XVII

[A 22] 1766.04.17: Réflexions sur la variation de la lune. *Mém. Berlin* 22 (1766), 1768, 334–353 ; *Opera omnia* II 29, pp. 257–272. XVII

[A 24] 1768: Versuch die Figur der Erden durch Beobachtungen des Monds zu bestimmen. *Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften* 5 (1768), 197–214 ; *Opera omnia* II 30, pp. 103–115. XIX

[A 26] 1767.10.05: De rotatione solis circa axem ex motu macularum apparente determinanda. *N. Comm. Petrop.* 12 (1766/67), 1768, 273–286 ; *Opera omnia* II 30, pp. 124–133. XIX

[A 27] 1761: Recherches sur l'arrimage des vaisseaux. *Recueil des pièces* 7, Sixième pièce, 56 p. Paris 1769 ; *Opera omnia* II 21, pp. 31–81. XVIII

[A 29] 1772.03.05: A Deduction of the Quantity of the Sun's Parallax from the Comparison of the several Observations of the late Transit of Venus, made in Europe, with those made in George Island in the South Seas. *Phil. Trans.* 62 (1772), 69–76 ; *Opera omnia* II 30, pp. 134–139. XVI

Manuskripte

[Ms 167] 1730–1734: Mechanica seu scientia motus. [Mikhailov 1965], pp. 93–224. ([E 15], [E 16]) XVI, XVIII, XLVII, LXII, LXXI

[Ms 179] 1725–1726: De attractione corporum finitae magnitudinis. XVIII

[Ms 185] 1726–1728: [Fragmentum ex fundamentis theoriae motus corporum a viribus centralibus sollicitatorum]. [Mikhailov 1965], pp. 63–73. XVI

[Ms 189] 1738: De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum. ([E 97]) XVIII

[Ms 198] 1762: Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas ou la courbe décrite par ce corps sera algébrique. ([E 337]) XVI

[Ms 202] 1740–1749: Caput primum. De motu corporum rigidorum a nullis potentiis sollicitatorum. ([E 289]) XVIII

[Ms 204] 1745–1750: [Tractatus de motu corporum rigidorum]. ([E 289]) XVIII

[Ms 220] 1739: Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris. ([E 57]) XVIII

[Ms 245] 1738: Dissertatio ad quaestionem de optimo modo anchoras attolendi ab Illustrissima Academia Regia Scientiarum Parisina pro anno 1739 propositam cum annexo praemio 2000 libr. ([E 78]) LXIII

[Ms 251] ca. 1730: De trium corporum mutua attractione. Cf. [Knobloch 1992]. XVI

[Ms 252] 1738–1740: Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica. ([E 131]) XVI

[Ms 253] 1740: Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica. ([E 131]) XVI

[Ms 254] 1735–1740: Tabula anomaliae et logarithmorum distantiae a Sole computata ad opus de aequatione maxima planetarum. ([E 105]) XVI

[Ms 255] 1749: De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda. ([E 193]) XIX

[Ms 256] 1750–1751: [Fragment sur les inégalités du mouvement de Jupiter et de Saturne]. ([E 384]) XVII, LI, LIII

[Ms 257] 1749–1750: De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda. ([E 193]) XIX

[Ms 258] 1755: [Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur]. ([E 414]) XVI

[Ms 259] 1747: De motu corporum coelestium. ([E 232]) XVI

[Ms 260] 1759: Du mouvement des absides des satellites de Jupiter. ([E 402]) XIX

[Ms 261] vor 1746: [Fragment d'un ouvrage sur les dérangements, que la résistance de l'éther cause dans le mouvement des planètes]. XVI, XIX, XLII

[Ms 264] 1750er: Recherche des inégalités causées au mouvement des planètes par des forces quelconques. ([E 841]) XVI

[Ms 265] 1744–1749: [Solutio duorum problematum, astronomiam mechanicam spectantium]. ([E 835]) XIX

[Ms 266] 1752–1753: [Trois fragments d'un ouvrage sur les inégalités du mouvement des planètes. XVI, XL, XLIV

[Ms 267] 1765: Considérations sur le problème des trois corps. ([E 400]) XVI

[Ms 268] 1758–1759: Astronomia mechanica. ([E 834]) XVIII

[Ms 269] ca. 1747: [Fragment d'un ouvrage sur le mouvement de Saturne]. XVII, LXXXIV

[Ms 270] 1744-1746: [Fragmenta ex opere quodam de correctione observationum Solis]. XVI, XLII

[Ms 271] 1725–1726: De motu Lunae in ellipsi. XVII, XLVII

[Ms 272] 1726–1728: Dissertatio de motibus Lunae. XVII, XLVII

[Ms 273] 1727–1730: [Sex propositiones de perturbatione motus Lunae a Sole]. XVII, XIX, XXV, L

[Ms 274] 1748: De motu nodorum Lunae ejusque inclinationis ad eclipticam variatione. ([E 138]) XVII, XVIII

[Ms 275] 1748: Quantum motus Terrae a Luna perturbatur accuratius inquiritur. ([E 139]) XVI

[Ms 276] 1740er: De motu Lunae. XVII, XLVI, LXXXIII

[Ms 277] 1751–1752: Theoria motus et anomaliae Lunae. ([E 187]) XVII

[Ms 278] ca. 1746: De emendatione tabularum lunarium per observationes eclipsium Lunae. ([E 837]) XVII

[Ms 279] 1769: [Réponse à la question proposée par l'Academie Royale des sciences de Paris pour l'année 1770]. ([E 485]) XVII

[Ms 280] 1760er: [Deux fragments d'un ouvrage sur la théorie du mouvement de la Lune]. XVII, LXXXIII

[Ms 281] 1743–1745: [Fragmenta ex opere quodam de motu Solis ac Lunae]. XVI, XVII, XVIII, XXXIX, XL, XLVI, XLVII, L, LI, LXIV, LXVII, LXXII, LXXV, LXXVI, LXXVIII, LXXIX, LXXX, LXXXI

[Ms 282] 1745–1747: [Quinque capita ex opere quodam majori inedito de theoria Lunae]. (teilweise publiziert in [E 838]) XVII, LXXXIII

[Ms 283] ca. 1745: [Applicatio theoriae motus Lunae ad observationes eclipsium lunarium]. XVII, LXXXIV

[Ms 284] ca. 1769: [Fragmenta ex opere quodam de motu Lunae]. XVII

[Ms 285] 1742: Tres cometae observationes ad stilum veterum et meridianum londinensem reductae. XVI

[Ms 286] 1742: Determinatio orbitae cometae A. 1742 observati. XVI

[Ms 287] 1742: Methodus ex datis aliquot cometae observationibus ejus orbitam motumque verum determinandi. XVI

[Ms 288] 1742: Cometae, qui A. 1742 apparuit tria loca geocentrica Londoni observata. XVI

[Ms 289] 1742–1746: Determinatio orbitae cometae, qui mense Martio potissimum hujus anni 1742 fuit observatus. ([E 58]) XVI

[Ms 290] 1746: [Fragmentum ex opere quodam de determinatione orbitae cometae, qui anno 1742 est observatus]. ([E 58]) XVI

[Ms 291] vor 1745: De motu cometarum in orbitis parabolicis, Solem in foco habentibus. ([E 840]) XVI

[Ms 293] 1735: Tabula aequationis meridiei ex duabus aequalibus Solis altitudinibus ante et post meridiem observatis in minutis tertiis temporis computata pro singulis gradibus declinationis Solis ab intervallo observationum unius horae usque ad octodecim ad elevationem poli in observatorio Petropolitano, quae est 59°57′. XVI, XLI

[Ms 295] 1735: Tabula altitudinum Solis singulis horis Petropoli. XVI, XLI

[Ms 297] 1740–1741: [Methodus viri celeberrimi Leonh. Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli Telluris secundum mensuram a celeb[errimo] de Maupertuis cum sociis institutam]. ([E 132]) XIX

[Ms 298] 1761: Relatio observationum circa longitudinem penduli simplicis institutarum. XIX

[Ms 375] 1739–1740: Nöthige Erinnerungen, welche bey Beobachtungen der Ebbe und Fluth des Meers in Acht zu nehmen. XVIII

[Ms 393] 1766: Gedanken über das Steigen und Fallen des Wassers in dem Ladogaer See. XVIII

[Ms 397] 1725–1727: Adversaria mathematica I. XVI, XVII, XVIII, XXXII, XLVI, XLVII, LXVIII

[Ms 398] 1727: Adversaria mathematica II. XVI, XVII, XVIII, XXXVIII, LIII

[Ms 399] 1736–1740: Adversaria mathematica III. XVI, XVIII, XLI, LIX, LXII, LXIII, LXVI

[Ms 400] 1738–1744: Adversaria mathematica IV. XVI, XVII, XVIII, XXXIX, XLI, LXIII, LXXVI

[Ms 401] 1749–1753: Adversaria mathematica V. ("Diarium mathematicum") XVI, XVII, XVIII, XIX, XXVIII, LXI, LXXIV, LXXV, LXXXIII, LXXXIV

[Ms 402] 1746–1757: Adversaria mathematica VI. XVII, XVIII, LXXXIV

[Ms 403] 1760–1763: Adversaria mathematica VII. XVIII

[Ms 404] 1759–1761: Adversaria mathematica VIII. XVIII

[Ms 405] 1760–1769: Adversaria mathematica IX. XVIII

[Ms 406] 1770–1779: Adversaria mathematica X. XVII, XVIII

[Ms 407] 1775–1779: Adversaria mathematica XI. XVIII

[Ms 408] 1779–1783: Adversaria mathematica XII. XVIII

Briefe

[R 152] 1743.12.25: Daniel Bernoulli an Euler. [Fuss 1843], pp. 539–547 ; *Opera omnia* IVA 3/1, pp. 582–592. XXXIX

[R 153] 1744.02.04: Daniel Bernoulli an Euler. [Fuss 1843], pp. 548–552 ; *Opera omnia* IVA 3/2, pp. 597–604. LXIII, LXXVI

[R 210] 1738.12.31: Euler an Johann I Bernoulli. *Opera omnia* IVA 2, pp. 263–275. LXIII

[R 316] 1751.10.09: Bouguer an Euler. [Lamontagne 1966], pp. 228–229. XLIV

[R 317] 1752.04.02: Bouguer an Euler. [Lamontagne 1966], pp. 229–230. XLIV

[R 418] 1747.09.03: Clairaut an Euler. *Opera omnia* IVA 5, pp. 169–173. XXVI

[R 419] 1747.09.11: Clairaut an Euler. *Opera omnia* IVA 5, pp. 173–175. XXVI
[R 420] 1747.09.30: Euler an Clairaut. *Opera omnia* IVA 5, pp. 175–177. XXVI
[R 512] 1745.03.13: Euler an Delisle. [Bigourdan 1917], pp. 311–313. XXXIX
[R 514] 1745.05.08: Euler an Delisle. [Grigor'jan/Juškevič 1968], pp. 224–230. XLII, LI
[R 515] 1745.06.12: Euler an Delisle. [Bigourdan 1917], pp. 316–318. LXXXI
[R 517] 1746.02.15: Euler an Delisle. [Bigourdan 1918], pp. 70–71. XLII
[R 781] 1743.05.04: Goldbach an Euler. [Juškevič/Winter 1965], p. 162 ; *Opera omnia* IVA 4/1, pp. 259–261. LXIII, LXXVI
[R 788] 1743.10.15: Euler an Goldbach. [Juškevič/Winter 1965], pp. 182–188 ; *Opera omnia* IVA 4/1, pp. 284–291. LXIII, LXXVI
[R 1413] 1761.08.18: Euler an Lambert. [Bopp 1924], pp. 26–27. LXVIII
[R 1525] 1747.12.02: Euler an Maupertuis. *Opera omnia* IVA 6, pp. 94–95. XXVI
[R 1645] 1753.08.22: Mayer an Euler. [Kopelevič 1959], pp. 361–364 ; [Forbes 1971], pp. 73–76. XLIII
[R 1646] 1753.11.25: Mayer an Euler. [Kopelevič 1959], pp. 368–371 ; [Forbes 1971], pp. 76–78. XLIII
[R 1647] 1754.02.26: Euler an Mayer. [Kopelevič 1959], pp. 374–376 ; [Forbes 1971], pp. 78–80. XLIII
[R 2020] 1754.03.26: Pontoppidan an Euler. [Pontoppidan 1758], pp. 162–169. XXIX
[R 2021] 1754.05.11: Euler an Pontoppidan. [Pontoppidan 1755], pp. 171–183 ; [Pontoppidan 1758], pp. 170–183 ; [E 218]. XXIX, XXX
[R 2191] 1749.07.15: Euler an Teplov. [Juškevič/Winter 1961], pp. 173–174. XLIV
[R 2753] 1747.03.04: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 266–268 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 376–379. XXIX
[R 2763] 1749.06.28: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 282–283 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 401–402. XXIX, XLIII
[R 2764] 1749.09.27: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 283–285 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 403–406. XXIX, XLIII
[R 2765] 1749.09.20: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 285–288 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 406–409. XXIX, XXX, XLIII
[R 2778] 1752.08.29: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 308–310 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 435–438. XXIX
[R 2780] 1753.03.31: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 313–315 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 441–443. XXIX
[R 2783] 1754.01.08: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 319–321 ; *Opera omnia* IVA 7, pp. 449–452. XLIII

[R 2784] 1754.04.09: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 321–323; *Opera omnia* IVA 7, pp. 452–455. XXIX

[R 2787] 1755.03.01: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 328–330; *Opera omnia* IVA 7, pp. 461–464. XXIX, XLII

[R 2801] 1758.10.31: Euler an Wettstein. [Juškevič/Winter 1976], pp. 358–360; *Opera omnia* IVA 7, pp. 498–501. XXIX

BIBLIOGRAPHIE

[Aiton 1969] Aiton, E. J.: Newton's aether-stream hypothesis and the inverse square law of gravitation. *Annals of Science* 25 (1969), 255–260. XXI

[Aiton 1972] Aiton, E. J.: *The Vortex Theory of Planetary Motions*. London and New York, 1972. XXI, XXII

[Aiton 1989] Aiton, E. J.: The Cartesian vortex theory. In: [Taton/Wilson 1989], Chap. 11, pp. 207–221. XXI, XXII

[Aiton 1995] Aiton, E. J.: The vortex theory in competition with Newtonian celestial dynamics. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 3–21. XXI

[Aiton 2002] Aiton, E. J.: Newton's Aether-Stream Hypothesis and the Inverse Square Law of Gravitation. In: [Edwards 2002], pp. 61–64. XXI

[d'Alembert 1749] d'Alembert, J.: *Recherches sur la précession des equinoxes, et sur la nutation de l'axe de la terre, dans le systême newtonien*. Paris, 1749. XXX

[d'Alembert 2002] d'Alembert, J.: *Œuvres complètes*. Série I: Traités et mémoires mathématiques, 1736–1756. Volume 6: Premiers textes de mécanique céleste (1747–1749). Édition établie par Michelle Chapront-Touzé. Paris, 2002. L

[Aoki 1992] Aoki, S.: The Moon-Test in Newton's *Principia*: Accuracy of Inverse-Square Law of Universal Gravitation. *Archive for History of Exact Sciences* 44 (1992), 147–190. L

[Baker 2007] Baker, R. (ed.): *Euler Reconsidered. Tercentenary essays*. Heber City, Utah, 2007. 413

[Barrow-Green 1997] Barrow-Green, J.: *Poincaré and the Three Body Problem*. (History of Mathematics, Vol. 11). Oxford and Providence, Rhode Island, 1997. XXXIII, XXXIV

[Bernoulli 1741] Bernoulli, D.: Traité sur le flux et reflux de la mer. *Pièces qui ont remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences en 1740*. Paris, 1741, pp. 53–191; *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 3. Basel, 1987, pp. 327–438. 336

[Bernoulli 1744] Bernoulli, D.: De variatione motuum a percussione excentrica. *Comm. Petrop.* 9 (1737), 1744, 189–206; *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 3. Basel, 1987, pp. 145–159.

[Bernoulli 1683] Bernoulli, J.: *Dissertatio de gravitate aetheris*. Amstelaedami, 1683; *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Band 1. Basel, 1969, pp. 318–400. XXVII

[Beutler 2005] Beutler, G.: *Methods of Celestial Mechanics*. Volume I: Physical, Mathematical, and Numerical Principles. In Cooperation with Prof. Leos Mervart and Dr. Andreas Verdun. (Astronomy and Astrophysics Library). Berlin etc., 2005. XXXVI, LXI, LXVIII, XCV

[Bigourdan 1917] Bigourdan, G.: Lettres de Léonard Euler, en partie inédites. *Bulletin Astronomique*, Tome 34. Paris, 1917, pp. 258–319. 407

[Bigourdan 1918] Bigourdan, G.: Lettres de Léonard Euler, en partie inédites. *Bulletin Astronomique*, Tome 35. Paris, 1918, pp. 65–96. 407

[Blay 2004] Blay, M.: Mathematization of the science of motion at the turn of the seventeenth and eighteenth centuries: Pierre Varignon. In: *The reception of the Galilean science of motion in seventeenth-century Europe*. Dordrecht, 2004, pp. 243–259. XXII

[Bopp 1924] Bopp, K.: *Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel*. (Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, Nr. 2). Berlin, 1924. 407

[Bork 1987] Bork, A.: Newton and comets. *American Journal of Physics* 55 (1987), 1089–1095. XXXV, XXXVI

[Bradley et al. 2007] Bradley, R. E., Sandifer, C. E. (eds.): *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. (Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Vol. 5). Amsterdam, 2007. 415, 416

[Britton 1992] Britton, J. P.: *Models and Precision: The Quality of Ptolemy's Observations and Parameters*. Appendix 1: Secular Accelerations of the Sun and Moon. New York and London, 1992. XXIX

[Brosche et al. 1990] Brosche, P., Sündermann, J. (eds.): *Earth's Rotation from Eons to Days*. Proceedings of a Workshop Held at the Centre for Interdisciplinary Research (ZiF) of the University of Bielefeld, FRG, September 26–30, 1988. Berlin etc., 1990. LV

[Brown 1898] Brown, E. W.: *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*. Cambridge, 1898. LXXIII

[Buchwald et al. 2001] Buchwald, J. Z., Cohen, I. B.: *Isaac Newton's Natural Philosophy*. (Dibner Institute Studies in the History of Science and Technology). Cambridge, Massachusetts, 2001. 419, 424

[Burckhardt et al. 1983] Burckhardt, J. J., Fellmann, E. A., Habicht, W. (eds.): *Leonhard Euler 1707 – 1783. Beiträge zu Leben und Werk*. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Basel, 1983. 415

[Cassini 1716] Cassini, J.: De la figure de la Terre. *Mém. Paris* 15 (1713), 1716, 188–200. 334

[Cassini 1720] Cassini, J.: *De la Grandeur et de la Figure de la Terre*. (Suite des Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Année 1718). Paris, 1720. 334

[Cassini 1742] Cassini, [J.]: De la Méridienne de Paris, prolongée vers le nord, et des Observations qui ont été faites pour décrire les frontiéres du Royaume. *Mém. Paris* 42 (1740), 1742, 276–292. 334, 335

[Cassini 1744] Cassini, [J.]: *La Méridienne de l'Observatoire Royal de Paris.* (Suite des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Année 1740). Paris, 1744. 334

[Chandler 1975] Chandler, P.: Clairaut's critique of Newtonian attraction: Some insights into his philosophy of science. *Annals of Science* 32 (1975), 369–378. L

[Chandler 1977] Chandler, P.: The *Principia*'s Theory of the Motion of the Lunar Apse. *Historia Mathematica* 4 (1977), 405–410. XLVIII

[Clairaut 1743] Clairaut, A.-C.: *Théorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique.* Paris: 1743. XXV

[Clairaut 1749] Clairaut, A.-C.: Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle. *Mém. Paris* 47 (1745), 1749, 329–364. XXVI

[Clairaut 1752a] Clairaut, A. C.: De l'orbite de la Lune, en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices. *Mém. Paris* 50 (1748), 1752, 421–434. L

[Clairaut 1752b] Clairaut, A. C.: Théorie de la Lune, deduite du seul Principe de l'Attraction reciproquement proportionelle aux Quarrés des Distances. *Piece qui a remportée le Prix de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Pétersbourg proposé en 1750.* St. Pétersbourg, 1752. L

[Clairaut 1759a] Clairaut, A. C.: Mémoire sur l'orbite apparente du Soleil Autour de la Terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la Lune et des Planètes principales. *Mém. Paris* 56 (1754), 1759, 521–564. 31

[Clairaut 1759b] Clairaut, A. C.: Mémoire sur la Comète de 1682. *Le Journal des Sçavans* (1759), 38–45. XXX, 2, 283, 294

[Clairaut 1760] Clairaut, A. C.: *Théorie du Mouvement des Comètes, dans laquelle on a égard aux altérations que leurs orbites éprouvent par l'action des Planètes.* Paris, 1760. XXX, 2

[Clairaut 1762] Clairaut, A. C.: *Recherches sur la Comète des Années 1531, 1607, 1682 et 1759.* St. Pétersbourg, 1762. XXX

[Clairaut 1765] Clairaut, A. C.: Mémoire sur la Comète de 1759. *Mém. Paris* 61 (1759), 1765, 115–120. XXX

[Clemens 1902] Clemens, H.: Die älteren Ephemeridenausgaben der Berliner Akademie und die Begründung des Astronomischen Jahrbuches. *Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin-Dahlem*, Vol. 20. Berlin, 1902, pp. 171–196. XL

[Cohen 1975] Cohen, I. B. (ed.): *Isaac Newton's* Theory of the Moon's Motion *(1702)*. Folkestone, 1975. XLV

[Cohen 1980] Cohen, I. B.: *The Newtonian Revolution*. Cambridge etc., 1980. XXXII, XLIV

[Cohen et al. 1999] Cohen, I. B., Whitman, A.: *Isaac Newton – The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Berkeley etc., 1999. XX, XLIV, XLV, LIII, LVI, 420

[Dalitz et al. 2000] Dalitz, R. H., Nauenberg, M.: *The Foundations of Newtonian Scholarship*. Singapore etc., 2000. 418

[Demidov et al. 1992] Demidov, S. S., Folkerts, M., Rowe, D. E., Scriba, C. J. (eds.): *Amphora*. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. Basel, 1992. 415

[Dick et al. 2000] Dick, S., McCarthy, D., Luzum, B. (eds.): *Polar Motion: Historical and Scientific Problems*. IAU Colloquium 178 held in Cagliari, Sardinia, Italy, 27-30 September 1999. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 208). San Francisco, 2000. 421

[Drake 1996] Drake, E. T.: *Restless Genius – Robert Hooke and his earthly thoughts*. Oxford, 1996. LIV, LV

[Dunthorne 1749] Dunthorne, R.: A Letter from the Rev. Mr. Richard Dunthorne to the Reverend Mr. Richard Mason F.R.S. [...] concerning the Acceleration of the Moon. *Phil. Trans.* 46 (1749/50), 162–172. LV

[Edwards 2002] Edwards, M. R.: *Pushing Gravity – New perspectives on Le Sage's theory of gravitation*. Montreal, 2002. 409

[Ekman 1993] Ekman, M.: A concise history of the theories of tides, precession-nutation and polar motion (from antiquity to 1950). *Surveys in Geophysics* 14 (1993), 585–617. LVI

[Eneström 1910/13] Eneström, G.: *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband 4). Leipzig, 1910/13. XV, LI, LXXXVIII

[Fellmann 1995] Fellmann, E. A.: *Leonhard Euler*. (Rowohlts Monographien 387). Reinbek bei Hamburg, 1995. XXI

[Flamsteed 1683] Flamsteed, J.: An Exact Account of the Three late Conjunctions of Saturn and Jupiter. *Phil. Trans.* 13 (1683), 244–258. LII

[Fleckenstein 1948] Fleckenstein, J. O.: Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 2 (1948), 76–138. XXII

[Folkerts et al. 2006] Folkerts, M., Kühne, A. (eds.): *Astronomy as a Model for the Sciences in Early Modern Times*. Papers from the International Symposium Munich, 10–12 (recte 21–23) March 2003, organized by Bernhard Fritscher and Andreas Kühne. (Algorismus, Heft 59). Augsburg, 2006. 422

[Forbes 1971] Forbes, E. G.: *The Euler–Mayer Correspondence (1751–1755). A new perspective on eighteenth-century advances in the lunar theory.* New York, 1971. 407

[Forbes/Wilson 1995] Forbes, E. G., Wilson, C.: The solar tables of Lacaille and the lunar tables of Mayer. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 55–68. XXXIV, XXXVIII

[Fuss 1783] Fuss, N.: Nouvelles recherches sur les inégalités dans le mouvement de la Terre causées par l'action de Venus. *Acta Petrop.* 1780:I (1783), 381–398. XC

[Fuss 1843] Fuss, P.-H.: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^{ème} siècle*, Tome II. St.-Pétersbourg, 1843. Reprinted in *The Sources of Science*, No. 35, New York and London, 1968. 406

[Gal 2002] Gal, O.: *Meanest Foundations and Nobler Superstructures. Hooke, Newton and the "Compounding of the Celestiall Motions of the Planetts".* (Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 229). Dordrecht etc., 2002. XXIV

[Gauss 1809] Gauss, C. F.: Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beyden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden. *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde*, September 1809, pp. 197–224. XXXVI

[Gautier 1817] Gautier, A.: *Essai historique sur le problème des trois corps, ou dissertation sur la théorie des mouvemens de la Lune et des planètes, abstraction faite de leur figure.* Paris, 1817. XXXII, XXXIII, LI

[Goldreich et al. 1969] Goldreich, P. and Toomre, A.: Some Remarks on Polar Wandering. *Journal of Geophysical Research* 74 (1969), 2555–2567. LV

[González Redondo 2007] González Redondo, F. A.: Constants, units, measures, and dimensions in Leonard Euler's Mechanics, 1736–1765. In: [Baker 2007], pp. 205–231. LXXI

[Grigor'jan/Juškevič 1968] Grigor'jan, A. T. / Juškevič, A. P.: *Russko-francuzskie naučnye svjazi* (Relations scientifiques russo-françaises). Leningrad, 1968. 407

[Halley 1693] Halley, E.: Emendationes ac Notae in vetustas *Albatênii* Observationes Astronomicas, cum restitutione Tabularum Lunisolarium eiusdem Authoris. *Phil. Trans.* 17 (1691–93), 913–921. LV

[Halley 1695] Halley, E. (1695): Some Account of the Ancient State of the City of Palmyra, with short Remarks upon the Inscriptions found there. *Phil. Trans.* 19 (1695–97), 160–175. XXIX, LV

[Hankins 1967] Hankins, T. L.: The Reception of Newton's Second Law of Motion in the Eighteenth Century. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 20 (1967), 43–65. XXI

[Harman et al. 1992] Harman, P. M., Shapiro, A. E. (eds.): *The investigation of difficult things*. Essays on Newton and the history of the exact sciences in honour of D. T. Whitside. Cambridge, 1992. 423

[Herivel 1965] Herivel, J.: *The Background to Newton's Principia – A Study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664–84*. Oxford, 1965. LVI

[Hermann 1716] Hermann, J.: *Phoronomia, sive de Viribus et Motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*. Amstelaedami, 1716. LXI

[Hill 1878] Hill, G. W.: Researches in the Lunar Theory. *American Journal of Mathematics* 1 (1878), 1–26, 129–147. LXXIII

[Horrocks 1673] Horrocks, J.: *Jeremiae Horroccii Opera posthuma*. Londini, 1673. XXXII, LII

[Huygens 1690] Huygens, C.: *Discours de la Cause de la Pesanteur*. Leide, 1690. 59

[Isenkrahe 1881] Isenkrahe, C.: Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, (Historisch-literarische Ab-theilung), 26 (1881), 1–19. XXVII

[Jackisch 1977] Jackisch, G.: Sternzeiten (zur 275jährigen Geschichte der Berliner Sternwarte, der heutigen Sternwarte Babelsberg). Band I. (*Veröffentlichungen des Forschungsbereichs Geo- und Kosmoswissenschaften*, Heft 6). Berlin, 1977. 415

[Jones 2010] Jones, A. (ed.): *Ptolemy in Perspective. Use and Criticism of his Work from Antiquity to the Nineteenth Century*. (Archimedes: New Studies in the History of Science and Technology, Vol. 23). Dordrecht etc., 2010. 420

[Juškevič et al. 1975] Juškevič, A. P., Smirnov, V. I., Habicht, W.: *Leonhardi Euleri commercium epistolicum*. Vol. 1: Descriptio commercii epistolici. (*Opera omnia* IV A 1). Basileae, 1975.

[Juškevič/Taton 1980] Juškevič, A. P., Taton, R.: *Leonhardi Euleri commercium epistolicum*. Vol. 5: Commercium cum A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. (*Opera omnia* IV A 5). Basileae, 1980.

[Juškevič/Winter 1961] Juškevič, A. P., Winter, E.: *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*. Teil 2: Der Briefwechsel L. Eulers mit Nartov, Razumovskij, Schumacher, Teplov und der Petersburger Akademie 1730–1763. (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas, Band III/2). Berlin, 1961. 407

[Juškevič/Winter 1965] Juškevič, A. P., Winter, E.: *Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729–1764*. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jg. 1965, Nr. 1). Berlin, 1965. 407

[Juškevič/Winter 1976] Juškevič, A. P., Winter, E.: *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers.* Teil 3: Wissenschaftliche und wissenschaftsorganisatorische Korrespondenzen 1726–1774. (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas, Band III/3). Berlin, 1976. 407, 408

[Katz 1987] Katz, V. J.: The Calculus of Trigonometric Functions. *Historia Mathematica* 14 (1987), 311–324. XLVI, LXVI

[Kepler 1596] Kepler, J.: *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum.* Tubingae, 1596. LI, LII

[Kepler 1923] Kepler, J.: *Mysterium Cosmographicum – Das Weltgeheimnis.* Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar. Augsburg, 1923. LII

[Kirsten 1977] Kirsten, C.: Leonhard Eulers Programm für die Berliner Sternwarte. In: [Jackisch 1977], pp. 7–12. XL

[Knobloch 1984] Knobloch, W.: *Leonhard Eulers Wirken an der Berliner Akademie der Wissenschaften 1741–1766. Spezialinventar Regesten der Euler-Dokumente aus dem Zentralen Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR.* (Studien zur Geschichte der Akademie der Wissenschaften der DDR, Band 11). Berlin, 1984. XL, LXXVI

[Knobloch 1992] Knobloch, E.: Eulers früheste Studie zum Dreikörperproblem. In: [Demidov et al. 1992], pp. 389–405. XXXIII, 404

[Koetsier 2007] Koetsier, T.: Euler and Kinematics. In: [Bradley et al. 2007], pp. 167–194. LXXV

[Kollerstrom 1985] Kollerstrom, N.: Newton's Lunar Mass Error. *Journal of the British Astronomical Association* 95 (1985), 151–153. XXXII

[Kollerstrom 1995] Kollerstrom, N.: A Reintroduction of Epicycles: Newton's 1702 Lunar Theory and Halley's Saros Correction. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* 36 (1995), 357–368. XXXII, XLV

[Kollerstrom 2000] Kollerstrom, N.: *Newton's Forgotten Lunar Theory. His Contribution to the Quest for Longitude.* Santa Fe, 2000. XXXII, XLV

[Kopelevič 1959] Kopelevič, Ju. Ch.: Perepiska Leonarda Ejlera i Tobiasa Majera. *Istoriko-astronomičeskije issledovanija* 5 (1959), 271–444. 407

[Kopelevič et al. 1962] Kopelevič, Ju. Ch., Krutikova, M. V., Mikhailov, G. K., Raskin, N. M.: *Rukopisnye materialy L. Ejlera v Archive Akademii Nauk SSSR*, Tom I, Naučnoe opisanie (Manuscripta Euleriana Archivi Academiae Scientiarum URSS, Tomus I, Descriptio scientifica). Trudy Archiva, Vyp. 17 (Acta archivi academiae scientiarum URSS, Fasc. 17). Moskva i Leningrad, 1962. XV, XCVII, C

[Kopelevič 1983] Kopelevič, Ju. Ch.: Leonhard Euler und die Petersburger Akademie der Wissenschaften. In: [Burckhardt et al. 1983], pp. 373–383. 401

[Kriloff 1925] Kriloff, A. N.: On Sir Isaac Newton's Method of Determining the Parabolic Orbit of a Comet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 85 (1925), 640–656. XXXVI

[Kronk 1999] Kronk, G. W.: *Cometography. A Catalog of Comets*. Volume 1: Ancient – 1799. Cambridge, 1999. XXXV, 2

[Kushner 1989] Kushner, D.: The Controversy Surrounding the Secular Acceleration of the Moon's Mean Motion. *Archive for History of Exact Sciences* 39 (1989), 291–316. XXIX

[Kutschmann 1983] Kutschmann, W.: *Die Newtonsche Kraft. Metamorphose eines wissenschaftlichen Begriffs*. (Studia Leibnitiana, SH 12). Wiesbaden, 1983. XXI

[Lacaille 1758] Lacaille, N. L. de: *Tabulae solares*. Parisiis, 1758. LXXXIX, 31

[Lacaille 1762] Lacaille, N. L. de: Mémoire sur la théorie du Soleil. *Mém. Paris* 59 (1757), 1762, 108–144. 31, 33

[Lacaille 1763] Lacaille, N. L. de: *Tabulae solares ad meridianum Parisinum*. Vindobonae, 1763. LXXXIX, 31

[La Condamine 1745] La Condamine, C. M. de: *Relation abrégée d'un voyage fait dans l'interieur de l'Amérique Méridionale*. Paris, 1745. 334

[Lalande 1762] Lalande, J. de: Mémoire sur les équations séculaires, Et sur les moyens mouvemens du Soleil, de la Lune, de Saturne, de Jupiter et de Mars, Avec les observations de Tycho-Brahé, faites sur Mars en 1593, tirées des manuscrits de cet Auteur. *Mém. Paris* 59 (1757), 1762, 411–470. XXX

[Lalande 1784] Lalande, J. de: Mémoire sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique, et sur les conséquences qui en résultent. *Mém. Paris* 82 (1780), 1784, 285–314. XLI

[Lambeck 1980] Lambeck, K.: *The Earth's variable rotation: Geophysical causes and consequences*. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics). Cambridge, 1980. LV

[Lamontagne 1966] Lamontagne, R.: Lettres de Bouguer à Euler. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 19 (1966), 225–246. 406

[Langton 2007] Langton, S. G.: Euler on Rigid Bodies. In: [Bradley et al. 2007], pp. 195–211. LXXV

[Laplace 1787] Laplace, P. S. de: Mémoire Sur les Inégalités séculaires des Planètes et des Satellites. *Mém. Paris* 86 (1784), 1787, 1–50. XXX, LIII

[Laplace 1799] Laplace, P. S. de: *Traité de mécanique céleste*. Cinq volumes. Paris, an VII [1798/99]–1825. XIII

[Leadbetter 1742] Leadbetter, C.: *A compleat system of Astronomy*. In Two Volumes. The Second Edition, with Additions. London, 1742. XLVIII

[Legendre 1805] Legendre, A. M.: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, 1805. XXXVII

[Legentil 1762] Legentil, G. J. H. J.-B.: Recherches sur l'obliquité de l'écliptique, Et Remarques sur le Système de M. le Chevalier de Louville. *Mém. Paris* 59 (1757), 1762, 180–189. XLI

[Leibniz 1695] Leibniz, G. W.: Sistême nouveau de la nature et de la communication des substances, aussi-bien que de l'union qu'il y a entre l'ame et le corps. *Le Journal des Sçavans* (1695), 294-306. 138

[Lemonnier 1743] Lemonnier, P. C.: *La theorie des cometes, où l'on traite du progrés de cette partie de l'Astronomie*. Paris, 1743. XLII

[Lemonnier 1746] [Lemonnier, P. C.]: *Institutions astronomiques, ou leçons élémentaires d'astronomie, pour servir d'introduction à la Physique Céleste, et à la Science des Longitudes*. Paris, 1746. XLII

[Lemonnier 1751a] Lemonnier, P. C.: Sur le mouvement de Saturne, et sur l'inégalité de ses révolutions périodiques, qui dépendent de ses diverses configurations à l'égard de Jupiter. Première Partie. *Mém. Paris* 48 (1746), 1751, 209–222. 2

[Lemonnier 1751b] Lemonnier, P. C.: Sur le mouvement de Saturne. Seconde Partie. *Mém. Paris* 48 (1746), 1751, 689–710. 2

[Lemonnier 1752] Lemonnier, P. C.: Suite des Recherches sur la plus grande équation du centre du Soleil. Où l'on fait voir qu'elle ne paroît pas constante. *Mém. Paris* 49 (1747), 1752, 305–308. 2

[Leuzinger 1882] Leuzinger, H.: *Versuch einer Geschichte der Bestimmung parabolischer Bahnelemente von Newton bis Olbers*. Dissertation, Universität Zürich. Aussersihl, 1882. XXXVII

[Linton 2004] Linton, C. M.: *From Eudoxus to Einstein – A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge, 2004. L

[Lovett 1895] Lovett, E. O.: The great inequality of Jupiter and Saturn. *Astronomical Journal* 15 (1895), 113–127. LI

[Louville 1719] Louville, J.-E. d'Allonville, Chevalier de: De mutabilitate Eclipticae Dissertatio. *Acta eruditorum*, 1719, 281–294. XLI

[van Lunteren 1991] van Lunteren, F.: *Framing Hypotheses*. Dissertation, University of Utrecht, 1991. XXI, XXIV

[Machin 1729] Machin, J.: The Laws of the Moon's Motion according to Gravity. In: [Newton 1729], Vol. 2, pp. 289–292. XLVIII

[Maltese 1992] Maltese, G.: La storia di "$F = ma$". Firenze, 1992. XXI

[Marsden 1995] Marsden, B. G.: Eighteenth- and nineteenth-century developments in the theory and practice of orbit determination. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 181–190. XXXVI

[Maupertuis 1738] Maupertuis, P.-L. M. de: *La figure de la terre, déterminée par les observations* [...] *faites par ordre du Roy au cercle polaire*. Paris, 1738. 334, 335

[Maupertuis 1740] Maupertuis, P.-L. M. de: *Dégré du Méridien entre Paris et Amiens*. Paris, 1740. 334, 335

[Mayer 1750] Mayer, T.: Abhandlung über die Umwälzung des Monds um seine Axe und die scheinbare Bewegung der Mondsflecken; worinnen der Grund einer verbesserten Mondsbeschreibung aus neuen Beobachtungen geleget wird. *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748*. Nürnberg, 1750, *Sammlungen* pp. 52–183. XXXVII

[Mayer 1753] Mayer, T.: Novae tabulae motuum Solis et Lunae. *Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis* 2 (1752), 1753, 383–430. XXXVII

[Mayer 1770] Mayer, T.: *Tabulae motuum Solis et Lunae novae et correctae*. Londini, 1770. 34

[McCarthy/Seidelmann 2009] McCarthy, D. D. and Seidelmann, R. K.: *Time – From Earth Rotation to Atomic Physics*. Weinheim, 2009. LVI

[Meli 1993] Meli, D. B.: The emergence of reference frames and the transformation of mechanics in the Enlightenment. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 23 (1993), 301–335. LXX

[Mikhailov 1965] Mikhailov, G. K.: *Rukopisnye materialy L. Ejlera v Archive Akademii Nauk SSSR*, Tom II, Trudy po Mechanike, Čast 1 (Manuscripta Euleriana Archivi Academiae Scientiarum URSS, Tomus II, Opera mechanica, Volumen 1). Trudy Archiva, Vyp. 20 (Acta archivi, Fasc. 20). Moskva i Leningrad, 1965. LXII, 403

[Müller 1743] Müller, G. A.: *Untersuchung der wahren Ursache von Neutons Allgemeiner Schwehre, wie auch der bewegenden Kräffte der Cörper*. Weimar, 1743. XXVII

[Munk et al. 1975] Munk, W. H. and MacDonald, G. J. F.: *The Rotation of the Earth – A Geophysical Discussion*. Reprint of the 1960 edition, with corrections. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics). Cambridge, 1975. LV

[Nagel et al. 2005] Nagel, F. und Verdun, A. (eds.): *"Geschickte Leute, die was praestiren können ...". Gelehrte aus Basel an der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften des 18. Jahrhunderts*. Vorträge des Symposiums vom 10. Juli 2003 an der Akademie der Wissenschaften von St. Petersburg. (Deutsch-russische Beziehungen in Medizin und Naturwissenschaften, Band 11). Aachen, 2005. 421

[Nauenberg 2000] Nauenberg, M.: Newton's Portsmouth Perturbation Method and its Application to Lunar Motion. In: [Dalitz et al. 2000], pp. 167–194. XLIV

[Nauenberg 2001] Nauenberg, M.: Newton's Perturbation Methods for the Three-Body Problem and Their Application to Lunar Motion. In: [Buchwald et al. 2001], Chap. 7, pp. 189–224. XLIV

[Neuenschwander 2000] Neuenschwander, E. (ed.): *Scientific Models: Their Historical and Philosophical Relevance*. XIIIth DHS-DLMPS Joint Conference, 19–22 October 2000, Zurich (Switzerland). Zürich, 2000. 421

[Newton 1687] Newton, I.: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londini, 1687. XX, XXI, XXIX, XXXI, XXXV, XXXVI, XL, XLIV, XLVIII, XLIX, L, LII, LVI, LXI, 132, 133, 135, 150, 336

[Newton 1702] Newton, I.: A New and most Accurate Theory of the Moon's Motion; Whereby all her Irregularities may be solved, and her Place truly calculated to Two Minutes. Written by That Incomparable Mathematician Mr. Isaac Newton, And Published in Latin by Mr. David Gregory in his Excellent Astronomy. London, 1702. XLV

[Newton 1713] Newton, I.: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Editio secunda, auctior et emendatior. Cantabrigiae, 1713. XX, LXI

[Newton 1726] Newton, I.: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Editio tertia aucta et emendata. Londini, 1726. XX, XXV, XXXIX, XL, XLIV, XLIX, LII, LXI

[Newton 1729] Newton, I.: *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translated into English by Andrew Motte. In Two Volumes. London, 1729. 417

[Newton 1730] Newton, I.: *Opticks: or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*. The Fourth Edition, corrected. London, 1730. 288

[Newton 1999] Newton, I.: *Die mathematischen Prinzipien der Physik*. Übersetzt und herausgegeben von Volkmar Schüller. Berlin, 1999. XX, XXV, XXXI, XXXV, XXXVI, XXXIX, XL, XLIX, L, LII

[Newton 1970] Newton, R. R.: *Ancient Astronomical Observations and the Accelerations of the Earth and Moon*. Baltimore and London, 1970. LV

[Newton 1972] Newton, R. R.: *Medieval Chronicles and the Rotation of the Earth*. Baltimore and London, 1972. LV

[Newton 1979] Newton, R. R.: *The Moon's Acceleration and Its Physical Origins*. Volume 1: As Deduced from Solar Eclipses. Baltimore and London, 1979. LV

[Newton 1984] Newton, R. R.: *The Moon's Acceleration and Its Physical Origins*. Volume 2: As Deduced from General Lunar Observations. Baltimore and London, 1984. LV

[Nick 2001] Nick, K. R.: *Kontinentale Gegenmodelle zu Newtons Gravitationstheorie*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2001. XXIV

[Picard 1671] Picard, J.: *Mesure de la Terre*. Paris, 1671. 334

[Picard 1729] Picard, J.: Mesure de la Terre. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Depuis 1666, jusqu'à 1699*, Tome VII, Partie I. Paris, 1729, pp. 131–190. 334

[Poincaré 1890] Poincaré, H.: Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* 13 (1890), 1–270. XXXIII, XXXIV

[Pontoppidan 1755] Pontoppidan, E.: *Essays sur la nouveauté du monde*. Copenhague, 1755. XLIII, 394, 407

[Pontoppidan 1758] Pontoppidan, E.: *Abhandlung von der Neuigkeit der Welt oder ein aus der Natur und Geschichte geführter Beweis daß die Welt nicht ewig sey*. Aus dem Dänischen übersetzt von Christian Gottlob Mengel. Kopenhagen und Leipzig, 1758. XXIX, 407

[Pourciau 2006] Pourciau, B.: Newton's Interpretation of Newton's Second Law. *Archive for History of Exact Sciences* 60 (2006), 157–207. XXI

[Pourciau 2011] Pourciau, B. (2011): Is Newton's second law really Newton's? *American Journal of Physics* 79 (2011), 1015–1022. XXI

[Ruffner 1971] Ruffner, J. A.: The curved and the straight: Cometary theory from Kepler to Hevelius. *Journal for the History of Astronomy* 2 (1971), 178–194. XXXVI

[Schröder 1959] Schröder, K. (ed.): *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen*. Berlin, 1959.

[Seidelmann 1992] Seidelmann, P. K. (ed.): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and The American Ephemeris and Nautical Almanac. Mill Valley, 1992. XLI, XLII

[Sharma 2014] Sharma, A.: Isaac Newton, Leonhard Euler and $F = ma$. *Physics Essays* 27 (2014), 503–509. XXI

[Smith 1999a] Smith, G. E.: Planetary Perturbations: The Interaction of Jupiter and Saturn. In: [Cohen et al. 1999], pp. 211–217. LI, LII, LIII

[Smith 1999b] Smith, G. E.: Newton and the Problem of the Moon's Motion. In: [Cohen et al. 1999], pp. 252–257. XLIV, XLV, XLVI

[Smith 1999c] Smith, G. E.: The Motion of the Lunar Apsis. In: [Cohen et al. 1999], pp. 257–264. XLIV, XLVIII, XLIX, L

[Steele 2010] Steele, J. M.: Dunthorne, Mayer, and Lalande on the Secular Acceleration of the Moon. In: [Jones 2010], pp. 203–215. LV

[Stephenson et al. 1984] Stephenson, F. R. and Morrison, L. V.: Long-term changes in the rotation of the Earth: 700 B.C. to A.D. 1980. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, 313 (1984/85), 47–70. LV

[Stephenson et al. 1995] Stephenson, F. R., Morrison, L. V., Smith, F. T.: Long-term fluctuations in the Earth's rotation: 700 BC to AD 1990. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, 351 (1995), 165–202. LV

[Stephenson 1997] Stephenson, F. R.: *Historical Eclipses and Earth's Rotation*. Cambridge, 1997. LV

[Stigler 1986] Stigler, S. M.: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge, Massachusetts, 1986. XXXV

[Taton/Wilson 1989] Taton, R. and Wilson, C. (eds.): Planetary Astronomy from the Renaissance to the Rise of Astrophysics. Part A: Tycho Brahe to Newton. (*The General History of Astronomy*, Vol. 2). Cambridge, 1989. 409, 423

[Taton/Wilson 1995] Taton, R. and Wilson, C. (eds.): Planetary Astronomy from the Renaissance to the Rise of Astrophysics. Part B: The eighteenth and nineteenth centuries. (*The General History of Astronomy*, Vol. 2). Cambridge, 1995. 409, 413, 417, 422, 423, 424

[Truesdell 1960] Truesdell, C. A.: A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason. *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1960) 1–36 ; reprinted (slightly corrected and augmented) in [Truesdell 1968], pp. 85–137. XXI

[Truesdell 1968] Truesdell, C. A.: *Essays in the History of Mechanics*. Berlin etc., 1968. XXI, XXXI, 421

[Verdun/Beutler 2000] Verdun, A., Beutler, G.: Early Observational Evidence of Polar Motion. In: [Dick et al. 2000], pp. 67–81. LIV, LV

[Verdun 2000] Verdun, A.: Euler's Ether Pressure Model of Gravitation. In: [Neuenschwander 2000], pp. 141–143. XV, XXVII, XXVIII

[Verdun 2003a] Verdun, A.: Leonhard Eulers Einführung und Anwendung von Bezugssystemen in Mechanik und Astronomie. *Elemente der Mathematik* 58 (2003), 169–176. XIII, LXX, LXXIII

[Verdun 2003b] Verdun, A.: Leonhard Euler und die alte Sternwarte von St. Petersburg. *Orion* 319 (2003), 4–15. XIII

[Verdun 2004a] Verdun, A. (2004a): Die Bestimmung der Sonnen-Parallaxe aus den Venus-Transits im 18. Jahrhundert. *Orion* 322 (2004), 4–20. XIII, XXXV

[Verdun 2004b] Verdun, A.: The Determination of the Solar Parallax from Transits of Venus in the 18th Century. *Archives des Sciences* 57 (2004), 47–70. XIII, XXXV

[Verdun 2005] Verdun, A.: Die Entstehung moderner wissenschaftlicher Methoden in Leonhard Eulers Beiträgen zur Mechanik und Astronomie. In: [Nagel et al. 2005], pp. 147–171. XIII

[Verdun 2006] Verdun, A.: Methods of Modern Exact Sciences in the Astronomical Works of Leonhard Euler. In: [Folkerts et al. 2006], pp. 333–351. XIII

[Verdun 2010] Verdun, A.: "Astronomica" im Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli. *Acta Historica Astronomiae* 41 (2010), 169–199. XIII

[Verdun 2011] Verdun, A.: Die (Wieder-)Entdeckung von Eulers Mondtafeln. *NTM, Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin* 19 (2011), 271–297. XIII, LI, 392, 397, 402

[Verdun 2013a] Verdun, A.: Leonhard Euler's early lunar theories 1725–1752. Part 1: first approaches, 1725–1730. *Archive for History of Exact Sciences* 67 (2013), 235–303. XIII, LI

[Verdun 2013b] Verdun, A.: Leonhard Euler's early lunar theories 1725–1752. Part 2: developing the methods, 1730–1744. *Archive for History of Exact Sciences* 67 (2013), 477–551. XIII, LI

[Verdun 2015] Verdun, A.: *Leonhard Eulers Arbeiten zur Himmelsmechanik*. Zwei Bände. (Mathematik im Kontext). Berlin und Heidelberg, 2015. XI, XIII, XV, XXXVII, LXXVIII, 358, 379, 385, 397, 401, 402

[Verdun 2020] Verdun, A.: Leonhard Euler's early lunar theories 1725–1752. Part 3: the breakthrough, 1744–1752. *Archive for History of Exact Sciences* (in preparation). XIII, LI

[Verdun 2021] Verdun, A.: *Leonhard Euler's Principle of Angular Momentum. A reconstruction of its coming-to-be and its development into an established concept using his notebooks, manuscripts, and publications*. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). New York etc. (in preparation). XIII, XV, LVI, LXIII, LXV, LXXIV

[Waff 1976a] Waff, C. B.: *Universal Gravitation and the Motion of the Moon's Apogee: The Establishment and Reception of Newton's Inverse-Square Law, 1687–1749*. Dissertation, The Johns Hopkins University, 1975. Baltimore, 1976. XXX, XLIX, L

[Waff 1976b] Waff, C. B.: Isaac Newton: The Motion of the Lunar Apogee, and the Establishment of the Inverse Square Law. *Vistas in Astronomy* 20 (1976), 99–103. XXX, L

[Waff 1986] Waff, C. B.: Comet Halley's first expected return: English public apprehensions, 1755–58. *Journal for the History of Astronomy* 17 (1986), 1–37. XXX

[Waff 1995a] Waff, C. B.: Clairaut and the motion of the lunar apse: the inverse-square law undergoes a test. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 35–46. XXX, L

[Waff 1995b] Waff, C. B.: Predicting the mid-eighteenth-century return of Halley's Comet. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 69–82. XXX

[Waller 1705] Waller, R. (ed.): *The Posthumous Works of Robert Hooke*. London, 1705. LIV, LV

[Walmesley 1759] Walmesley, C.: Of the Irregularities in the Motion of a Satellite arising from the spheroidical Figure of its Primary Planet. *Phil. Trans.* 50, Part II, (1758), 1759, 809–835. XXX

[Watkins 1997] Watkins, E.: The Laws of Motion from Newton to Kant. *Perspectives on Science* 5 (1997), 311–348. XXI

[Weiler 1877] Weiler, A.: Die säkulare Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes. *Astronomische Nachrichten* 90, Nr. 2160, (1877), 369–382. LV

[Wepster 2010] Wepster, S. A.: *Between Theory and Observations. Tobias Mayer's Explorations of Lunar Theory, 1751–1755.* (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). New York etc., 2010. XXXVII, LI

[Westfall 1973] Westfall, R. S.: Newton and the Fudge Factor. *Science*, New Series, 179 (1973), 751–758. L

[Whiteside 1970] Whiteside, D. T.: The Mathematical Principles Underlying Newton's Principia Mathematica. *Journal for the History of Astronomy* 1 (1970), 116–138. XXII

[Whiteside 1976] Whiteside, D. T.: Newton's Lunar Theory: From high hope to disenchantment. *Vistas in Astronomy* 19 (1976), 317–328. XLV

[Whittaker 1937] Whittaker, E. T.: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Fourth edition. Cambridge, 1937. XXXIII

[Wilson 1980] Wilson, C.: Perturbations and Solar Tables from Lacaille to Delambre: the Rapprochement of Observation and Theory. *Archive for History of Exact Sciences* 22 (1980), 53–304. XXXIV, XXXVIII, XLI, XLII, XLIV, LI

[Wilson 1985] Wilson, C.: The Great Inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace. *Archive for History of Exact Sciences* 33 (1985), 15–290. XXX, LI, LIII, LX

[Wilson 1987a] Wilson, C.: D'Alembert versus Euler on the Precession of the Equinoxes and the Mechanics of Rigid Bodies. *Archive for History of Exact Sciences* 37 (1987), 233–273. XXX, LVI

[Wilson 1987b] Wilson, C.: On the Origin of Horrocks's Lunar Theory. *Journal for the History of Astronomy* 18 (1987), 77–94. XXXII

[Wilson 1989] Wilson, C.: The Newtonian achievement in astronomy. In: [Taton/Wilson 1989], pp. 233–274. XLVII, XLVIII, LVI

[Wilson 1992] Wilson, C.: Euler on action-at-a-distance and fundamental equations in continuum mechanics. In: [Harman et al. 1992], pp. 399–420. XXVII

[Wilson 1995a] Wilson, C.: The problem of perturbations analytically treated: Euler, Clairaut, d'Alembert. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 89–107. LI

[Wilson 1995b] Wilson, C.: The precession of the equinoxes from Newton to d'Alembert and Euler. In: [Taton/Wilson 1995], pp. 47–54. XXX, LVI

[Wilson 2001] Wilson, C.: Newton on the Moon's Variation and Apsidal Motion: The Need for a Newer "New Analysis". In: [Buchwald et al. 2001], pp. 139–188. XLV, XLVI, XLVII, XLVIII, XLIX, L

[Wilson 2010] Wilson, C.: *The Hill-Brown Theory of the Moon's Motion. Its Coming-to-be and Short-lived Ascendancy (1877–1984)*. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). New York etc., 2010. LXXIII

[Wolfers 1848] Wolfers, J. Ph.: *Leonhard Euler's Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung, mit Anmerkungen und Erläuterungen*. Erster Theil. Greifswald, 1848. LIX

INDEX NOMINUM